6.9 Exercices complémentaires

Exercice 21 :

Vrai ou faux

1. $\mathbb{R}[X]$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}[X]$
2. Deux polynômes unitaires ayant les mêmes racines avec le même ordre de multiplicité sont égaux.
3. Le polynôme $B \in \mathbb{K}[X]$ étant fixé, l'application qui à $A \in \mathbb{K}[X]$ associe le reste dans la division euclidienne de A par B est un projecteur.
4. Le polynôme $1+X^4$ étant somme de 2 carrés n'est pas décomposable en produit de deux polynômes du second degré.
5. Deux polynômes de degré n qui prennent les mêmes valeurs en n points sont égaux.
6. La somme de deux polynômes de degré n est un polynôme de degré n.
7. Si la somme des coefficients d'un polynôme est nulle, il est factorisable par $X-1$.
8. Le polynôme $1+X+\ldots+X^n$ n'a pas de racine réelle.
9. Si le polynôme P est de degré n, alors, la famille $\left\{(P, P', P", \cdots, P^{(n)}\right\}$ des dérivées successives de P est une base de $\mathbb{K}_n[X]$
10. Si a est racine d'ordre k d'un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, alors a annule P et ses k premières dérivées.

6.9.1 Calculs sur les polynômes

Exercice 22 :

Montrer que $\left(X^3+X^2+X+1\right)\left(\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k X^k\right) = X^{2n+3}+X^{2n+1}+X^2+1$

Exercice 23 :

1. Vérifier que $1-X^3=(1-X)\left((1-X)^2+3X\right)$
2. En déduire que $\left(1-X^3\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k 3^k X^k (1-X)^{2n-2k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} 3^k X^k (1-X)^{2n-2k}$

Cet exercice ne fait pas l'objet d'une correction

Exercice 24 :

Effectuer $(1+X)\left(1+X^2\right)\left(1+X^4\right)\cdots\left(1+X^{2^n}\right)$

Exercice 25 :

Factoriser $Q_n(X) = 1-\frac{1}{1!}X+\frac{1}{2!}X(X-1)+\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}X(X-1)\cdots(X-n+l)$.

Exercice 26 :

Trouver $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant $(P')^2=4P$ où P' est le polynôme dérivé de P

Exercice 27 :

Trouver $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant $\left(X^2+1\right)P''-6P=0$ où P'' est le polynôme dérivée seconde de P

6.9.2 Arithmétique des polynômes

Exercice 28 :

De l'art d'accommoder les restes des divisions
Nous nous plaçons dans $\mathbb{C}[X]$

1. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Le reste de la division de P par $(X-2)$ est 5 ; le reste de la division de P par $(X-3)$ est 7.
   Quel est le reste de la division de P par $(X-2)(X-3)$?
2. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Le reste de la division de P par $(X-1)$ est 3 ; le reste de la division de P par $(X+1)$ est 1 ;le reste de la division de P par $(X-2)$ est 7
   Quel est le reste de la division de P par $(X-1)(X+1)(X-2)$?
3. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Le reste de la division de P par $\left(X^2+1\right)$ est $X+1$; le reste de la division de P par $(X-1)$ est 4.
   Quel est le reste de la division de P par $(X-1)\left(X^2+1\right)$?

Exercice 29 :

Soient $P(X) = 3X^3 + X + 1$ et $Q(X) = 3X^2 + X - 1$.
Rechercher $\text{pgcd}(P, Q)$ dans les cas suivants :

1. $P \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[X]$ et $Q \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[X]$
2. $P \in \mathbb{Q}[X]$ et $Q \in \mathbb{Q}[X]$
3. $P \in \mathbb{Z}[X]$ et $Q \in \mathbb{Z}[X]$

Exercice 30 :

Soient $a \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer dans $\mathbb{R}[X]$, le pgcd des polynômes $X^n - a$ et $X^m - a$

Exercice 31 :

Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$, les polynômes suivants :

1. $P_1(X) = X^6 + 1$
2. $P_2(X) = X^6 - 1$
3. $P_3(X) = X^9 + X^6 + X^3 + 1$
4. $P_4(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k X^k$

6.9.3 Dérivée d'un polynôme. Formule de Taylor

Exercice 32 :

Trouver tous les polynômes de $\mathbb{C}[X]$ tels que P' divise P

Exercice 33 :

Soient $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$, non nuls et $n \in \mathbb{N}$.
Nous considérons le polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ défini par $P(X) = \dfrac{X^n (a-bX)^n}{n!}$
Démontrer que P et toutes ses dérivées prennent des valeurs entières en $X = 0$ et $X = \dfrac{a}{b}$

Exercice 34 :

On note $f : \mathbb{R}_4[X] \longrightarrow \mathbb{R}_4[X]$ l'application linéaire définie par : $f(P)(X) = (X-1)P'(X) - P(X)$.

1. Calculer l'image de la base canonique de $\mathbb{R}_4[X]$. En déduire $\ker f$ et $\text{im} f$.
2. L'équation $f(P) = Q$ a-t-elle toujours des solutions dans $\mathbb{R}_4[X]$ pour tout $Q \in \mathbb{R}_4[X]$?

3. alculer $f\left((X-1)^k\right)$ pour $k=0,1,2,3,4$. En déduire une caractérisation des polynômes $Q \in \mathbb{R}_4[X]$ pour lesquels l'équation $f(P)=Q$ a des solutions.
4. Résoudre l'équation $(X-1)P'(X)-P(X)=X^2-2X+2$.

Cet exercice ne fait pas l'objet d'une correction

Exercice 35 :

Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{R}_5[X]$ tels que $(X+2)^3$ divise $P(X)+10$ et $(X-2)^3$ divise $P(X)-10$

Exercice 36 :

$\mathbb{R}[X]$ est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à une indéterminée.
On considère $A:\mathbb{R}[X]\longrightarrow\mathbb{R}[X]$ définie par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} A:\mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & A(P) \text{ où } A(P)(X)=\left(X^2-1\right)P''(X)-3XP'(X)-5P(X)\end{array}\right.$$

1. Vérifier que A est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$
2. $\mathbb{R}_n[X]$ est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n.
   (a) Montrer que si $P\in\mathbb{R}_n[X]$, alors $A(P)\in\mathbb{R}_n[X]$
   (b) Nous notons A_n la restriction de A à $\mathbb{R}[X]$, c'est à dire :
   $$\left\{\begin{array}{rcl} A_n:\mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & A_n(P)=A(P)\end{array}\right.$$
   Montrer qu'il existe une seule valeur de n pour laquelle $\mathrm{Im}A_n\subset\mathbb{R}_{n-1}[X]$
   (c) Déterminer le noyau et l'image de A_4
   (d) Déterminer l'image de A_5. En déduire la dimension et une base du noyau de A_5

Cet exercice ne fait pas l'objet d'une correction

Exercice 37 :

$\mathbb{C}[X]$ est le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes. Soit $A\in\mathbb{C}[X]$ un polynôme fixé tel que $\deg A=\alpha$
$\mathbb{C}_n[X]$ est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n.
On définit une application $f:\mathbb{C}[X]\longrightarrow\mathbb{C}[X]$ définie par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} f:\mathbb{C}[X] & \longrightarrow & \mathbb{C}[X] \\ P & \longmapsto & f(P)=A'P-AP'\end{array}\right.$$

A' et P' étant les polynômes dérivés de A et P

1. Déterminer $\ker f$, le noyau de f
2. Quel est le rang de la restriction de f à $\mathbb{C}_n[X]$
3. Montrer que $f(\mathbb{C}[X])\cap\mathbb{C}_n[X]=f(\mathbb{C}_{n-\alpha+1}[X])$ et déterminer sa dimension

Cet exercice ne fait pas l'objet d'une correction

Exercice 38 :

Soient $\mathbb{K}$ un corps et $\mathbb{K}_n[X]$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des polynômes à une indéterminée sur $\mathbb{K}$ de degré inférieur ou égal à n.

1. Soient $P\in\mathbb{K}_n[X]$ et $a\in\mathbb{K}$. Nous définissons le polynôme $Q\in\mathbb{K}[X]$ par :
   $$Q(X)=(X-a)\left[P'(X)+P'(a)\right]-2\left[P(X)-P(a)\right]$$
   Montrer que a est zéro triple de Q

2. Montrer que $Q \in \mathbb{K}_n[X]$
3. Soit $f : \mathbb{K}_n[X] \longrightarrow \mathbb{K}_n[X]$ une application définie par :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f : \mathbb{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}_n[X] \\ P & \longmapsto & f(P) = Q \end{array} \right.$$

Où $Q(X) = f(P)(X) = (X-a)[P'(X) + P'(a)] - 2[P(X) - P(a)]$
Montrer que f est une application linéaire

4. Trouver image et noyau de f

Exercice 39 :

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, factoriser dans $\mathbb{C}[X]$, le polynôme $P_n(X) = (X+1)^n - (X-1)^n$
2. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \cot\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

6.9.4 Miscelleanous

Exercice 40 :

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ où $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$

1. Pour $r > 0$ et $p \in \mathbb{N}$, calculer $\displaystyle\int_0^{2\pi} P\left(re^{it}\right) e^{-ipt}\,\mathrm{d}t$
2. En déduire que, s'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que $|P(z)| \leqslant M$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, alors P est un polynôme constant.

Exercice 41 :

Trouver la valeur minimum de $a^2 + b^2$, où a et b sont des nombres réels pour lesquels l'équation

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$$

admet au moins une solution réelle.
(On pourra poser $t = x + \dfrac{1}{x}$ et former un polynôme en a dont on étudiera le minimum).

Exercice 42 :

1. On rappelle que le nombre a *(réel ou complexe)* est appelé zéro du polynôme $P(x)$ si $P(a) = 0$.
On donne les trois polynômes de $\mathbb{C}[X]$

$$A(X) = a_2X^2 + a_1X + a_0 \quad B(X) = b_2X^2 + b_1X + b_0 \quad C(X) = c_2X^2 + c_1X + c_0$$

Les constantes $a_2, a_1, a_0, b_2, b_1, b_0, c_2, c_1, c_0$ sont réelles et choisies de telle façon que, pour tout X, on ait :$A^2(X) + B^2(X) = C^2(X)$.
D'autre part, aucun des nombres a_2, b_2 et c_2 n'est nul.

   (a) Démontrer que, si deux de ces trois polynômes admettent un zéro commun, réel ou complexe, ce zéro est aussi zéro du troisième.

   (b) Démontrer que,si les deux polyndmes $B(x) - C(x)$ et $B(x) + C(x)$ admettent un zéro commun, ce zéro est aussi zéro de $B(x)$ et de $C(x)$.

2. Dans toute la suite du problème, on suppose que les polynômes $A(x)$, $B(x)$ et $C(x)$ n'ont pas de zéro commun.

   (a) Démontrer que $C(x)$ possède deux zéros complexes conjugués.

(b) A partir de l'égalité $A^2(X) = (B(x) - C(x))(B(x) + C(x))$, démontrer que les polynômes $B(x) - C(x)$ et $B(x) + C(x)$ ont chacun un zéro double réel.

(c) En déduire que $A(x)$ et $B(x)$ admettent chacun 2 zéros réels distincts

(d) 0n prend $a_2 = 1$ et l'on suppose connus, les zéros, p et q, de $A(x)$
Démontrer qu'il existe une infinité de polynômes $B(x)$ et $C(x)$ dépendant d'un paramètre et vérifiant la relation $A^2(X) + B^2(X) = C^2(X)$

(e) Démontrer qu'entre les zéros p et q de $A(x)$ et les zéros r et s de $B(x)$, il existe une relation indépendante du paramètre précédent, et que l'on explicitera.

3. Les nombres réels p et q, zéros de $A(x)$ étant fixés, il existe une infinité de polynômes $C(x)$. 0n appellera $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$ les zéros de $C(x)$. Démontrer qu'entre α, β, p et q, il existe une relation que l'on explicitera.

Exercice 43 :

Dans ce problème, nous construisons un produit scalaire ainsi qu'une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$, adaptée à ce produit scalaire.
On considère p réels distincts fixés une fois pour toutes $x_1, x_2, \ldots, x_p$
Dans tout le problème n est un entier positif donné et p un entier strictement supérieur à $n+1$ ($p > n+1$).
$\mathbb{R}_n[X]$ est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n

1. On considère l'application de $\mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}$ qui à tout couple (P, Q) de polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ fait correspondre le réel

$$\langle P/Q \rangle = \sum_{k=1}^{p} P(x_k)\, Q(x_k)$$

(a) Montrer que pour tout couple $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X]$, nous avons : $\langle P/Q \rangle = \langle Q/P \rangle$

(b) Montrer que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\langle P/P \rangle \geqslant 0$, et que $\langle P/P \rangle = 0$ si et seulement si P est le polynôme nul

(c) Soit $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ un polynôme fixé. Montrer que l'application Φ_Q, ainsi définie

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \Phi_Q : \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & \Phi_Q(P) = \langle P/Q \rangle \end{array} \right.$$

est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$

2. On dit que deux polynômes $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ sont orthogonaux sur la famille $\{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$ si et seulement si $\langle P/Q \rangle = 0$

(a) Soit $P_0 = 1$, c'est à dire que P_0 est le polynôme constant et égal à 1. Montrer qu'il existe un et un seul polynôme normalisé P_1 du premier degré orthogonal à P_0 sur la famille $\{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$

(b) Montrer que l'on peut déterminer de manière unique les coefficients a_2 et b_2 de façon à ce que le polynôme $P_2 = XP_1 + a_2P_1 + b_2P_0$ soit orthogonal sur la famille $\{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$ à P_1 et P_0. Quel est le degré de P_2 ?

3. Le but de cette question est de définir deux suites $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telles que la suite des $n+1$ polynômes définie par P_0 , P_1 et la relation de récurrence

$$P_i = XP_{i-1} + a_iP_{i-1} + b_iP_{i-2} \qquad 2 \leqslant i \leqslant n$$

soit formée de polynômes non nuls, deux à deux orthogonaux sur la famille $\{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$
Pour nous simplifier les écritures, nous posons, pour $j \in \mathbb{N}$ et $0 \leqslant j \leqslant n$, $N_j = \langle P_j/P_j \rangle$

(a) Soit $i \in \{2, \ldots, n\}$
On suppose construits par récurrence les polynômes $P_0, P_1, \cdots, P_{i-1}$ orthogonaux sur sur la famille $\{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$ tels que les nombres N_j associés soient non nuls.
Déterminer a_i et b_i de façon que le polynôme P_i soit orthogonal sur la famille $\{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$ à P_{i-1} et P_{i-2}

(b) Montrer que pour tout $j \in \{0, 1, \dots, i-3\}$, nous avons $\langle XP_{i-1}/P_j\rangle = \langle P_{i-1}/XP_j\rangle = 0$
(Pour démontrer la seconde égalité, on remplacera XP_j par une combinaison linéaire de P_{j+1} , P_j et P_{j-1})

(c) En déduire que le polynôme P_i défini en a) est orthogonal à $P_0, P_1, \cdots, P_{i-1}$

(d) Montrer que P_i est non nul et déterminer son degré.

(e) Montrer que la famille de polynômes $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 44 :

Interpolation de Lagrange

Partie 1 : aspects théoriques

On se donne $n+1$ points $x_0, x_1, \dots, x_n$ de $\mathbb{R}$ tous distincts.

1. Soit L_i le polynôme défini par : $L_i(x) = \displaystyle\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$

   (a) Montrer que L_i est un polynôme de degré n.

   (b) Calculer la valeur $L_i(x_k)$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$

   (c) Pour i fixé, démontrer qu'il existe un unique polynôme P de degré inférieur ou égal à n, vérifiant
   $$P(x_k) = L_i(x_k) \text{ pour } 0 \leqslant k \leqslant n$$

2. (a) Démontrer que la famille de polynômes $\{L_0, L_1, L_2, \dots, L_n\}$ forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$

   (b) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Quelles sont les coordonnées de P dans la base $\{L_0, L_1, L_2, \dots, L_n\}$

   (c) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} L_i(x) = 1$

3. Soit f une fonction donnée, définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Nous considérons toujours $n+1$ points $x_0, x_1, \dots, x_n$ de $\mathbb{R}$ tous distincts.

Interpoler la fonction f, par un polynôme P de degré n aux points $x_0, x_1, \dots, x_n$, c'est résoudre le problème suivant : Trouver un polynôme P_f de degré inférieur ou égal à n tel que pour tout $i \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant i \leqslant n$, $P_f(x_i) = f(x_i)$

   Démontrer que l'unique solution du problème est le polynôme $P_f(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x)$

4. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur l'intervalle $[a; b]$ et on suppose que f s'annule en $n+2$ points de $[a; b]$
   Démontrer que

   (a) La dérivée f' s'annule au moins en $n+1$ points de $[a; b]$

   (b) La dérivée $n+1$-ième $f^{(n+1)}$ s'annule au moins une fois en un point $c \in [a; b]$

5. Nous appelons $q(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n) = \displaystyle\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$

   Calculer la dérivée $n+1$-ième de q

6. Soit $x \in [a; b]$ tel que, pour $i = 0, \dots, n$, nous ayions $x \neq x_i$. On appelle toujours P_f le polynôme d'interpolation de f. Nous construisons pour, tout $t \in [a; b]$ la fonction W_x définie par :
   $$W_x(t) = f(t) - P_f(t) - \frac{q(t)}{q(x)}(f(x) - P_f(x))$$

   (a) Démontrer que W_x est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur l'intervalle $[a; b]$ et calculer $W_x^{(n+1)}(t)$

(b) Démontrer que $W_x(x) = W_x(x_0) = W_x(x_1) = \ldots = W_x(x_n) = 0$

(c) En déduire qu'il existe $\xi \in [a;b]$ tel que $W_x^{(n+1)}(\xi) = 0$

(d) Conclure que pour tout $x \in [a;b]$, il existe $\xi \in [a;b]$ tel que

$$f(x) - P_f(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

7. Démontrer que si f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur l'intervalle $[a;b]$ alors, pour tout $x \in [a;b]$

$$|f(x) - P_f(x)| \leqslant \frac{|a-b|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{x \in [a;b]} \left| f^{(n+1)}(x) \right|$$

Partie 2 : applications numériques

1. Considérons les fonctions définies l'intervalle $[1;2]$ par $f(x) = \sqrt{x-1}$ et $g(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right)$, et trois points $x_0 = 1$, $x_1 = \frac{3}{2}$ et $x_2 = 2$.

   (a) Montrer, sans le calculer, que f et g ont le même polynôme d'interpolation sur le support $\{x_0, x_1, x_2\}$

   (b) Donner l'expression des polynômes de Lagrange relatifs à ce support.

   (c) Comparer sur un graphe

2. Pour $n = 4$, $[a;b] = [0;1]$ et $f(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{4}\right)$, trouver une majoration de $\sup_{x \in [0,1]} |f(x) - P(x)|$.

3. (a) Calculer la dérivée k-ième de $f(x) = \ln(1 + \lambda x)$ avec $\lambda > 0$

   (b) Pour $n = 4$, $[a;b] = [0;1]$ et $f(x) = \ln(1 + \lambda x)$, pour quelles valeurs de λ, sommes nous assurés que $\sup_{x \in [0,1]} |f(x) - P_f(x)| \leqslant 10^{-4}$

   (c) Soit $\lambda = \frac{1}{2}$; en utilisant l'inégalité de Taylor à l'ordre n en 0, montrer que si

$$P_n(x) = \frac{x}{2 \times 1} - \frac{x^2}{2^2 \times 2} + \frac{x^3}{2^3 \times 3} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{2^n \times n}$$

   Alors $\sup_{x \in [0,1]} \left| \ln\left(1 + \frac{x}{2}\right) - P_n(x) \right| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}(n+1)}$

   (d) Pour quelles valeurs de n est-on assuré que $\sup_{x \in [0,1]} \left| \ln\left(1 + \frac{x}{2}\right) - P_n(x) \right| \leqslant 10^{-4}$