Chapitre 9

Introduction aux équations différentielles

9.1 Généralités

9.1.1 Définition

On appelle équation différentielle du premier ordre, une équation de la forme :

$$y' = f(x, y(x)) \tag{9.1}$$

où $x \in I$ et $y : I \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, dérivable sur I et à valeurs dans un intervalle $J \subset \mathbb{R}$, et f une fonction définie sur $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$
Dans ces cas, on dit que y est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$

9.1.2 Définition

Soit $y' = f(x, y)$ une équation différentielle, où f est définie sur un domaine $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$. Les graphes des solutions s'appellent courbes intégrales

Exemple 1 :

1. Les solutions réelles définies sur un intervalle I de l'équation du premier ordre $y' = 1 + y^2$ sont les fonctions $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x \in I \qquad \varphi'(x) = 1 + \varphi^2(x)$$

   Comme exemple de fonction, solution de l'équation, on trouve les fonctions tan sur $I = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$
   Ici, la fonction f est définie par $f(x, y) = 1 + y^2$

2. Ainsi, si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, une solution de l'équation 9.1 sur I est une fonction y, dérivable sur I, à valeurs dans $\mathbb{R}$ est telle que :

$$(t, y(t))) \in \mathcal{U} \qquad y'(t) = f(t, y(t)) \text{ pour tout } t \in I$$

3. Le premier exemple qui nous vienne à l'idée est la recherche de primitive : chercher une primitive d'une fonction f, c'est résoudre l'équation différentielle $f' = F$

   (a) L'équation $y' = \dfrac{1}{x}$ a pour solutionS [1], une infinité de fonctions qui sont toutes de la forme $\ln|x| + K$ où $K \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^*$

1. Le S majuscule est ici, volontaire

(b) Plus généralement, si f est une fonction continue sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ *(Rappel : on dit que f est de classe $\mathcal{C}^0$)*, l'équation $y' = f(x)$ a pour solutions les fonctions de la forme

$$y(x) = \int_a^x f(t)\ dt + K \text{ où } K \in \mathbb{R}$$

En fait, nous avons $y(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t + y(a)$; c'est une forme du problème de Cauchy

4. Se pose, ici, le problème de l'unicité d'une solution d'une équation ; dans le cas des primitives, il y a une et une seule fonction vérifiant :

$$\begin{cases} y'(x) = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

5. Plus généralement, si elles existent, combien y-a-t-il de solutions à l'équation :

$$\begin{cases} y' = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

C'est le problème de Cauchy. L'unicité est le plus souvent fausse ; elle n'existe que dans des cas très précis. Nous y reviendrons

6. Soit $f(x) = 2x^2 + x + 1$; alors, f est solution de l'équation différentielle :

$$\begin{cases} y'^2 = 8y - 7 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Le problème inverse est : connaissant

$$\begin{cases} y'^2 = 8y - 7 \\ y(0) = 1 \end{cases} \tag{9.2}$$

Quelles sont les fonctions qui vérifient (9.2) ?... Ce qui est un problème beaucoup plus complexe ! !

7. Les équations différentielles forment un vaste domaine de recherche des mathématiques ; ces équations sont issues de divers domaines de la vie quotidienne : économie, biologie, électronique, par exemples

Exercice 1 :

1. **Exercices de mise en équation**
   (a) A quelle condition le coefficient directeur de la tangente en chaque point est-il proportionnel à l'abscisse de ce point ? Quelles sont les fonctions f qui satisfont cette condition ?
   (b) Dans une population $\mathcal{P}$, de n individus, $x(t)$ est le nombre des individus atteints par une maladie contagieuse $\mathcal{M}$ à un moment donné par t
   La vitesse de propagation de l'épidémie est proportionnelle au nombre des individus atteints et aussi à la différence $n - x(t)$ des individus sains. En considérant x comme fonction d'une variable réelle, traduire les conditions ci-dessus par une condition portant sur la fonction x et sa dérivée
2. Résolution dans des cas simples
   (a) Donner 2 fonctions différentes définies sur $\mathbb{R}$ et telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(x)$
   (b) En déduire une famille infinie de fonctions proportionnelles à leur dérivée.
3. Trouver une équation différentielle du premier ordre dont est solution, pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, la fonction exponentielle $x \longmapsto e^{\alpha x}$

Remarque 1 :

Les équations différentielles du premier ordre ne sont pas les seules que nous aurons à étudier ou qui se trouvent dans la nature. Par exemple l'équation $y'' + 2\sin y = 0$ est une équation du second ordre.

9.1.3 Le problème de Cauchy

1. Soit $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ et $(x_0, y_0) \in \mathcal{U}$.
   On appelle Problème de Cauchy ou *équation différentielle aux conditions initiales* l'équation :

$$\begin{cases} y' = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{9.3}$$

2. Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ résoudre le problème de Cauchy sur I, c'est trouver toutes les solutions de l'équation $y' = f(t, y(t))$ sur I, vérifiant $y(t_0) = y_0$

Remarque 2 :

En termes de courbe intégrale, on veut donc connaître toutes les courbes intégrales passant par (t_0, y_0)

Exercice 2 :

Donner le problème de Cauchy, vérifié par la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $x \longmapsto m(x - x_0) + y_0$

9.1.4 Solution maximale

On appelle solution maximale du problème de Cauchy 9.3 toute solution maximale pour la relation d'ordre sur les fonctions définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$ par :

$$(I, f)\, \mathcal{R}\, (\mathcal{I}, g) \Longleftrightarrow I \subset \mathcal{I} \text{ et } f = g \text{ sur } I$$

Remarque 3 :

1. Une solution f sur I est maximale si elle ne peut être prolongée sur un intervalle strictement plus grand.
2. Soit φ, une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ solution d'un problème de Cauchy 9.3 ; la restriction φ_1 de φ à tout sous-intervalle de I est encore solution.
3. Inversement, il peut exister des solutions φ_2 prolongeant φ ; si la seule solution prolongeant φ est φ elle-même, on dit que φ est solution maximale.
4. On admet, pour le moment, que : **Toute solution se prolonge en une solution maximale**

Exemple 2 :

Le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y' = xy^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

admet une seule solution maximale, laquelle est définie sur $\left]-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right[$

En effet, $y' = xy^2 \Longleftrightarrow y'y^{-2} = x$, et donc :

$$\int y'(x)\,(y(x))^{-2}\, dx = \frac{x^2}{2} + C$$

C'est à dire :

$$-\frac{1}{y(x)} = \frac{x^2}{2} + C \Longleftrightarrow y(x) = \frac{-1}{\frac{x^2}{2} + C}$$

Comme nous devons avoir $y(0) = 1$, nous en déduisons $C = -1$; d'où la solution au problème de Cauchy est donné par :

$$y(x) = \frac{2}{2 - x^2}$$

Autre remarque, nous avons ici, $f(x, y) = xy^2$

9.1.5 Interprétation graphique

Une fonction y est solution de 9.1, si en tout point de coordonnées $(x, y(x))$, la tangente à la courbe représentative de y a pour pente $f((x, y(x)))$. En chaque point (x, y) où la fonction f est définie, sa valeur donne la pente que doit avoir une solution passant par ce point.

> On appelle isocline de coefficient α de l'équation 9.1, l'ensemble I_α des points M du plan pour lesquels les solutions de 9.1 ont une tangente de pente α en M
> $M(x, y) \in I_\alpha$ si et seulement si $F(x, y) = \alpha$

Remarque 4 :

1. A tout point M de coordonnées (x_0, y_0), on peut associer une droite D_M passant par M et de coefficient directeur $f(x_0, y_0)$:

$$y - y_0 = f(x_0, y_0)(x - x_0)$$

   L'application $M \longmapsto D_M$ est appelée **champ des tangentes** associé à l'équation 9.1
2. Il n'y a pas de méthodes générales pour résoudre les équations différentielles du premier ordre. C'est seulement pour quelques familles d'entre elles *(Variables séparables, homogènes...)* que nous pouvons exhiber quelques méthodes.