9.2 Equations différentielles du premier ordre à variables séparées

9.2.1 Définition

On appelle équation différentielle à variables séparées, une équation de la forme :

$$\boxed{y'f(y) = g(x)}$$

Remarque 5 :

1. La résolution de ces équations équivaut à la résolution de $\displaystyle\int f \circ y(x)\, y'(x)\ dx = \int g(x)\ dx$ et si F est une primitive de f et G, primitive de g, nous avons

$$F(y(x)) = G(x) + k \text{ avec } K \in \mathbb{R}$$

2. En supposant F bijective sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, alors $y(x) = F^{-1}[G(x)) + K)]$

Exemple 3 :

1. Premier exemple d'équation à variable séparée : $y' = y$

   Que sous-entend une telle question ? Il faut en fait trouver une fonction y de classe $\mathcal{C}^1$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ $y'(x) = y(x)$
   - Si y est la fonction nulle, c'est à dire identiquement égale à 0, y est solution de l'équation.
   - Supposons y non identiquement nulle, alors, $\dfrac{y'(x)}{y(x)} = 1$, ce qui conduit, en intégrant chaque membre, à :$\ln|y(x)| = x + K$ avec $K \in \mathbb{R}$, d'où $|y(x)| = Ce^x$ avec $C > 0$; donc, en fait, l'ensemble des solutions est donné par $y(x) = Ce^x$ avec $C \in \mathbb{R}$

2. Résolution de $y' \cos y = x$

   De la même manière, l'équation est équivalente à $\displaystyle\int y'(x) \cos y(x)\ dx = \int x\ dx$ qui nous donne donc $\sin y(x) = \dfrac{x^2}{2} + K$ où $K \in \mathbb{R}$

   Pour qu'une solution soit définie, il faut que $\left|\dfrac{x^2}{2} + K\right| \leqslant 1$; alors, $y(x) = \arcsin\left(\dfrac{x^2}{2} + K\right)$ où $K \in \mathbb{R}$ et $\left|\dfrac{x^2}{2} + K\right| \leqslant 1$

3. Résoudre $y' \ln y = e^x$

   Cette équation est donc équivalente à $\displaystyle\int y'(x) \ln y(x)\, dx = \int e^x dx$. L'intégrale $\displaystyle\int y'(x) \ln y(x)\, dx$ se calcule par parties :

$$\left\{\begin{array}{ll} u' = y' & u = y \\ v = \ln y & v' = \dfrac{y'}{y} \end{array}\right\}$$

   Donc, $\displaystyle\int y'(x) \ln y(x)\, dx = y \ln y - \int y' = y \ln y - y$ et nous avons donc

$$y(x) \ln(y(x)) - y(x) = e^x + K$$

   On remarque que nous ne trouvons pas une expression de y, mais une relation fonctionnelle entre x et y beaucoup plus difficile à appréhender.

9.3 Equation différentielle linéaire

9.3.1 Définition

On appelle Equation différentielle linéaire du premier ordre toute équation de la forme

$$u(x)\,y' + v(x)\,y = w(x) \tag{9.4}$$

Où u, v et w sont des fonctions définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$
Résoudre cette équation sur I, c'est trouver toutes les fonctions y dérivables sur I à valeurs dans $\mathbb{C}$ telles que

$$u(x)\,y'(x) + v(x)\,y(x) = w(x) \text{ pour tout } x \in I$$

Les courbes d'équation $y = y(x)$ sont appelées courbes intégrales de l'équation

Exemple 4 :

1. Prenons par exemple l'équation $2x(1+x)\,y' + (1+x)\,y = 1$. Si cette équation a une solution sur $\mathbb{R}$ en entier, alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons

$$2x(1+x)\,y'(x) + (1+x)\,y(x) = 1$$

   En particulier pour $x = -1$; nous montrons ainsi, facilement que si y est solution de l'équation, $y(-1)$ n'existe pas. Il faudra donc se restreindre à l'étude de l'équation à deux intervalles : $]-1;+\infty[$ ou bien $]-\infty;-1[$
2. **Contre-exemples :** Les équations $(y')^2 + y = 2$ et $y' + \ln y = 2$ sont des équations différentielles du premier ordre **non linéaire**

9.3.2 Proposition

On appelle $\mathcal{C}^1(I)$, le sous-espace vectoriel des fonctions une fois continuement différentiables sur I et à valeurs dans $\mathbb{C}$ et $\mathcal{C}^0(I)$, le sous-espace vectoriel des fonctions continues sur I et à valeurs dans $\mathbb{C}$
Soit L l'application ainsi définie : [2]

$$\begin{cases} L : \mathcal{C}^1(I) & \longrightarrow & \mathcal{C}^0(I) \\ \quad y & \longmapsto & L(y) = u(x)\,y' + v(x)\,y \end{cases}$$

Alors, L est une application linéaire

Démonstration

La démonstration est simple et s'appuie essentiellement sur la linéarité de la dérivation.
Soient $y \in \mathcal{C}^1(I)$, $z \in \mathcal{C}^1(I)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned} L(\lambda y + \mu z) &= u(x)(\lambda y + \mu z)' + v(x)(\lambda y + \mu z) \\ &= u(x)(\lambda y)' + u(x)(\mu z)' + v(x)(\lambda y) + v(x)(\mu z) \\ &= \lambda u(x)(y)' + \mu u(x)(z)' + \lambda v(x)(y) + \mu v(x)(z) \\ &= \lambda\big(u(x)(y)' + v(x)(y)\big) + \mu\big(u(x)(z)' + v(x)(z)\big) \\ &= \lambda L(y) + \mu L(z) \end{aligned}$$

L est donc bien une application linéaire.

9.3.3 Définition

L'équation différentielle $L(y) = 0$ est l'équation différentielle linéaire homogène associée à (9.4)

2. L'écriture $L(y) = u(x)\,y' + v(x)\,y$ n'est pas correcte. L'écriture correcte est $L(y) = uy' + vy$ avec $u \in \mathcal{C}^0(I)$ et $v \in \mathcal{C}^0(I)$, mais c'est celle qui est communément admise

Remarque 6 :

1. C'est à dire que l'équation $u(x)\,y' + v(x)\,y = 0$ est l'équation différentielle linéaire homogène associée à $u(x)\,y' + v(x)\,y = w(x)$
2. Rechercher les fonctions $y \in \mathcal{C}^1(I)$ telles que $L(y) = 0$, c'est, en fait, rechercher le noyau de l'application linéaire L, c'est à dire $\ker L$

9.3.4 Théorème

L'ensemble S_0 des solutions de l'équation homogène $L(y) = 0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(I)$
L'ensemble S des solutions de (9.4) est donné par :

$$S = \{y_p + y_0 \text{ où } y_0 \in S_0\} = y_p + S_0$$

avec $L(y_p) = f(x)$
C'est à dire que toutes les solutions de (9.4) sont de la forme $y_p + y_0$ où y_p est une solution particulière de (9.4) et y_0 parcourt toutes les solutions de l'équation homogène $L(y) = 0$

Démonstration

1. Que S_0 soit un sous espace vectoriel, c'est immédiat, puisque S_0 est le noyau de l'application linéaire L
2. Pour démontrer la seconde affirmation, on la démontre en deux temps.
   (a) Soit z une fonction de la forme $z = y_p + y_0$; alors,
   $$L(z) = L(y_p + y_0) = L(y_p) + L(y_0) = f(x) + 0 = f(x)$$
   z est donc bien solution de (9.4)
   (b) Réciproquement, soit y_1 une solution quelconque de (9.4) et considérons $z_1 = y_p - y_1$; alors,
   $$L(z_1) = L(y_p - y_1) = f(x) - f(x) = 0$$
   La différence $y_p - y_1$ est bien dans S_0

Remarque 7 :

1. On admettra que S_0 est un sous-espace vectoriel de dimension 1 de $\mathcal{C}^1(I)$
2. S est alors un espace affine de dimension 1, passant par le point y_p et de direction S_0
3. Le théorème 9.3.4 n'est que l'application de la théorie des équations linéaires vue en Algèbre

Exemple 5 :

1. Dans la résolution, la mention de l'intervalle I est importante
   Par, exemple, soit à résoudre l'équation $xy' + y = 0$ sur $\mathbb{R}$
   — Si y est solution sur $\mathbb{R}$ en entier, alors, nous avons :
   $$0y'(0) + y(0) = 0$$
   D'où nous tirons que $y(0) = 0$.
   Comme $(xy)' = xy' + y = 0$, nous en déduisons que $xy = k$, et, donc, par continuité de y sur $\mathbb{R}$, $k = 0$. La seule solution de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ en entier est donc donnée par la fonction nulle $y = \mathcal{O}$
   — Si, maintenant, nous considérons l'intervalle $I =]0, +\infty[$, nous obtenons comme solution $y = \dfrac{k_1}{x}$ où $k_1 \in \mathbb{R}$
   — De même si nous considérons l'intervalle $I =]-\infty, 0[$, nous obtenons comme solution $y = \dfrac{k_2}{x}$ où $k_2 \in \mathbb{R}$

2. **Résolvons maintenant l'équation** $xy' - 2y = 0$.
   Comme tout à l'heure, si y est solution sur $\mathbb{R}$ en entier, alors, nous avons aussi, avec les mêmes arguments $y\,(0) = 0$
   — Comme $\left(\dfrac{y}{x^2}\right)' = \dfrac{y'x - 2y}{x^3}$, y est solution de l'équation $xy' - 2y = 0$ si et seulement si $\dfrac{y}{x^2} = k$ avec $k \in \mathbb{R}$
   — Donc, sur $I = \,]0, +\infty[$, nous obtenons comme solution $y = k_1 x^2$ où $k_1 \in \mathbb{R}$ et sur $I = \,]-\infty, 0[$, nous obtenons comme solution $y = k_2 x^2$ où $k_2 \in \mathbb{R}$
   — Existe-t-il une solution sur $\mathbb{R}$ en entier ? S'il existe donc une solution sur $\mathbb{R}$ en entier, il faut que y soit de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et que les restrictions sur $]0, +\infty[$ coïncident avec les fonctions $y = k_1 x^2$ et que les restrictions sur $]-\infty, 0[$, coïncident avec $y = k_2 x^2$. Autrement dit, estce que la fonction

$$\left\{\begin{array}{rcl} y : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & y\,(x) = \left\{\begin{array}{l} k_1 x^2 \text{ si } x \geqslant 0 \\ k_2 x^2 \text{ si } x \leqslant 0 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

   Le seul point posant difficulté est $x_0 = 0$; elle est évidemment continue en 0. On vérifie que cette fonction est dérivable en $x_0 = 0$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. y est donc une slution maximale sur $\mathbb{R}$

   Voir la figure 9.1

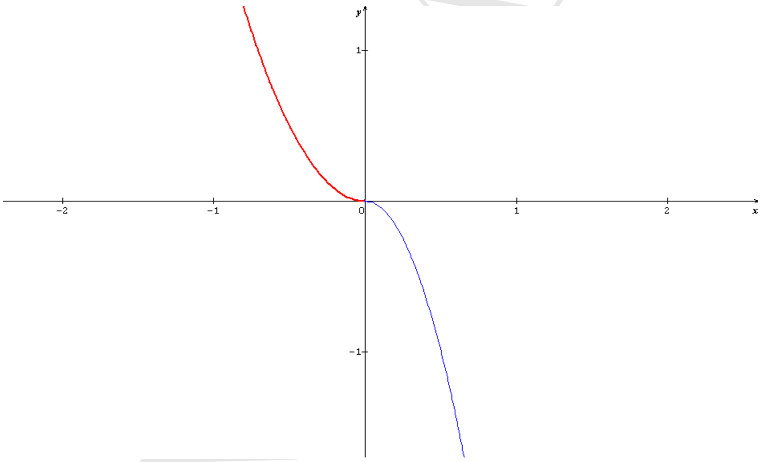

FIGURE 9.1 – Les courbes solutions de l'équation $xy' - 2y = 0$

9.3.5 Le problème de Cauchy dans le cas des équations linéaires

La présentation, ici, du problème de Cauchy, est une présentation très élémentaire

Soit $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{C}$.
On appelle Problème de Cauchy ou équation différentielle avec conditions initiales, l'équation :

$$\left\{\begin{array}{l} u\,(x)\,y' + v\,(x)\,y = w\,(x) \\ y\,(x_0) = y_0 \end{array}\right.$$

Résoudre ce problème de Cauchy sur I, c'est trouver toutes les solutions y définies sur I vérifiant, pour tout $x \in I$ $u\,(x)\,y'\,(x) + v\,(x)\,y\,(x) = w\,(x)$ et $y\,(x_0) = y_0$

Remarque 8 :

Un problème de Cauchy peut avoir plusieurs solutions (ou aucune)

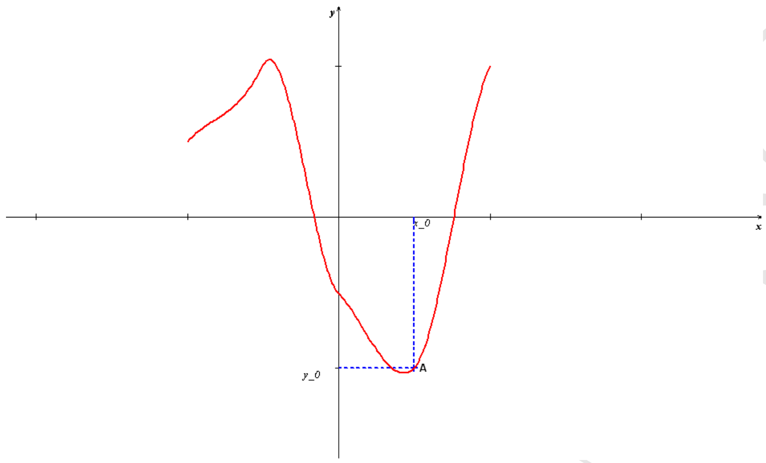

FIGURE 9.2 – En termes de courbes intégrales, il s'agit de trouver toutes les courbes qui passent par le point A de coordonnées (x_0, y_0)

Exemple 6 :

Reprenons les exemples

1. Dans la résolution de $xy' + y = 0$, le problème

$$\left\{\begin{array}{l} xy' + y = 0 \\ y(x_0) = y_0 \end{array}\right.$$

   n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$, si $y_0 \neq 0$
   Sur $I =]0, +\infty[$, le problème

$$\left\{\begin{array}{l} xy' + y = 0 \\ y(x_0) = y_0 \end{array}\right.$$

   a une solution et une seule définie par $y(x) = \dfrac{x_0 y_0}{x}$

2. Dans la résolution de $xy' - 2y = 0$, le problème

$$\left\{\begin{array}{l} xy' - 2y = 0 \\ y(0) = y_0 \end{array}\right.$$

   n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$, si $y_0 \neq 0$ et une infinité de solutions si $y_0 = 0$
   Sur $I =]0, +\infty[$, le problème

$$\left\{\begin{array}{l} xy' - 2y = 0 \\ y(x_0) = y_0 \end{array}\right.$$

   a une solution et une seule définie par $y(x) = \dfrac{y_0}{x_0^2} x^2$

9.3.6 Problème de Cauchy : existence et unicité

Soient a et b, 2 fonctions définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. Soient $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$
Si a et b sont continues sur I, alors, le problème de Cauchy :

$$\left\{\begin{array}{l} y' + a(x)\, y = b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{array}\right.$$

a une unique solution sur I

Démonstration

La fonction a étant continue sur I, admet, sur I une primitive A qui s'annule en x_0 :

$$A(x) = \int_{x_0}^{x} a(t)\,dt$$

Nous pouvons remarquer que $A(x_0) = 0$
On appelle $z(x) = e^{A(x)} y(x)$; nous avons, en particulier $z(x_0) = e^{A(x_0)} y(x_0) = y_0$
En calculant la dérivée de z, nous obtenons :

$$\begin{aligned} z'(x) &= e^{A(x)} y'(x) + a(x) e^{A(x)} y(x) \\ &= e^{A(x)} (y'(x) + a(x) y(x)) \\ &= e^{A(x)} b(x) \end{aligned}$$

D'où on tire $z(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} e^{A(t)} b(t)\,dt + y_0$, et donc que

$$e^{A(x)} y(x) = \int_{x_0}^{x} e^{A(t)} b(t)\,dt + y_0$$

C'est à dire

$$y(x) = e^{-A(x)} \left(\int_{x_0}^{x} e^{A(t)} b(t)\,dt + y_0 \right)$$

Réciproquement, on démontre que la fonction y ainsi trouvée est solution du problème de Cauchy. On vient donc de montrer l'existence et l'unicité de y

Remarque 9 :

Le cas d'une équation $u(x) y' + v(x) y = w(x)$ se ramène au cas du théorème 9.3.6 si u, v et w sont continues sur I, et si u ne s'annule pas sur I.