9.4 Recherche de solutions

9.4.1 Equation différentielle linéaire homogène associée

On considère l'équation différentielle linéaire du premier ordre

$$y' = a(x)\,y + b(x) \tag{9.5}$$

où a et b sont des fonctions réelles quelconques de x.
L'équation différentielle linéaire homogène associée (EDLHA) est

$$y' = a(x)\,y$$

Remarque 10 :

1. Le cas d'une équation $u(x)\,y' + v(x)\,y = w(x)$, du type de l'équation 9.4, se ramène au cas de l'équation 9.5 si u, v et w sont continues sur I, et si u ne s'annule pas sur I.
2. Si y_1 et y_2 sont solutions de l'EDLHA, alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et tout $\beta \in \mathbb{R}$, la fonction $\alpha y_1 + \beta y_2$ est solution de l'EDLHA.
3. Autrement dit, on retrouve le fait que l'ensemble S_0 des solutions de l'EDLHA forme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$

9.4.2 Théorème : résolution de l'EDLHA

On suppose la fonction a continue sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, c'est à dire que $a \in \mathcal{C}^0(I)$, et soit α une primitive de a sur I, c'est à dire : $\alpha(x) = \displaystyle\int a(x)\,dx$; alors, les solutions maximales de l'EDLHA sont données par

$$y(x) = Ce^{\alpha(x)} \text{ où } C \in \mathbb{R}$$

Démonstration

L'EDLHA est donc $y' = a(x)\,y$ qui est une équation à variables séparables. La fonction nulle $\mathcal{O}$ est solution de cette équation ; supposons $y \neq \mathcal{O}$; on peut alors diviser par y, et nous obtenons l'équation différentielle

$$\frac{y'}{y} = a(x)$$

En intégrant chaque membre, nous obtenons :

$$\int \frac{y'}{y}\,dx = \int a(x)\,dx$$

C'est à dire

$$\ln|y(x)| + K = \alpha(x) + K' \iff \ln|y(x)| = \alpha(x) + K_1$$

En passant à l'exponentielle, nous obtenons :

$$y(x) = Ce^{\alpha(x)} \text{ avec } C > 0$$

On peut remarquer que méme si $C < 0$, $y(x) = Ce^{\alpha(x)}$ est solution, et que, comme $\mathcal{O}$ est solution, l'ensemble des solutions de l'EDLHA est

$$\boxed{y(x) = Ce^{\alpha(x)} \text{ avec } C \in \mathbb{R}}$$

Exercice 3 :

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' - y = 0$ et $y(0) = \lambda$
2. $3y' + 7y = 0$ et $y(2) = -7$
3. $y" + 4y' = 0$ et $y(0) = 8$
4. $y" - 9y' = 0$ et $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$
5. $xy' - 2y = 0$ et $y(0) = 1$
6. $y' + |x|\, y = 0$ et $y(0) = 1$

9.4.3 Première méthode de résolution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre

Toutes les solutions de l'équation différentielle (9.5) s'obtiennent par addition d'une solution particulière de (9.5) et de la solution générale de l'EDLHA

Démonstration

C'est l'application du théorème 9.3.4

Exemple 7 :

Résolvons l'équation

$$\begin{cases} 2y' + 3xy = x \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

1. On résoud d'abord l'EDLHA $2y' + 3xy = 0$:

$$\begin{aligned} 2y' + 3xy = 0 &\iff 2y' = -3xy \\ &\iff \frac{y'}{y} = -\frac{3}{2}x \end{aligned}$$

   D'où $\displaystyle\int \frac{y'(x)}{y(x)}dx = \int -\frac{3}{2}x dx$, c'est à dire $\ln y(x) = -\dfrac{3x^2}{4} + K$, d'où nous avons $y(x) = Ce^{-\frac{3x^2}{4}}$ avec $C \in \mathbb{R}$, solution générale de l'EDLHA.

2. Recherchons maintenant une solution particulière de $2y' + 3xy = x$ que nous allons chercher parmi les fonctions constantes. On trouve facilement $y(x) = \dfrac{1}{3}$. La solution générale de l'équation est donc

$$y(x) = Ce^{-\frac{3x^2}{4}} + \frac{1}{3} \text{ avec } C \in \mathbb{R}$$

3. Pour résoudre le problème de Cauchy posé, il faut trouver la constante C telle que $y(0) = 0$. Or, $y(0) = C + \dfrac{1}{3} = 0$, d'où $C = -\dfrac{1}{3}$. La solution du problème de Cauchy est donc :

$$y(x) = \frac{1}{3}\left(1 - e^{-\frac{3x^2}{4}}\right)$$

9.4.4 Seconde méthode de résolution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre : la variation de la constante

On considére l'équation différentielle linéaire du premier ordre

$$y' = a(x)\, y + b(x)$$

La résolution de cette équation par la méthode de variation de la constante comporte 2 étapes :

Premiére étape : On résout l'EDLHA, et on obtient une solution du type $y = Ce^{\alpha(x)}$

Seconde étape : On considére la solution $y = Ce^{\alpha(x)}$, et on considére C comme une fonction de x, c'est à dire que nous écrivons $y(x) = C(x)\, e^{\alpha(x)}$.
On calcule alors $y'(x)$, et nous remplaçons $y(x)$ et $y'(x)$, par leurs valeurs dans l'équation $y' = a(x)\, y + b(x)$, et nous obtenons ainsi $C(x)$ que nous remplaçons pour obtenir la solution générale de l'équation $y' = a(x)\, y + b(x)$

Démonstration

Résolution de l'EDLHA Nous obtenons donc comme solution de cette équation, une famille de solutions du type $y = Ce^{\alpha(x)}$ où $C \in \mathbb{R}$

Résolution générale Nous faisons le changement de variables $z = e^{-\alpha(x)}y$, c'est à dire

$$\begin{cases} y = e^{\alpha(x)}z \\ y' = z'e^{\alpha(x)} + za(x)\,e^{\alpha(x)} \end{cases}$$

Ainsi,

$$y' = a(x)\,y + b(x) \Leftrightarrow z'e^{\alpha(x)} + za(x)\,e^{\alpha(x)} = a(x)\,e^{\alpha(x)}z + b(x)$$

C'est à dire

$$y' = a(x)\,y + b(x) \Leftrightarrow z'e^{\alpha(x)} = b(x) \Leftrightarrow z' = b(x)\,e^{-\alpha(x)}$$

En calculant $z(x) = \displaystyle\int b(x)\,e^{-\alpha(x)}\,dx$, et en le remplaçant, nous avons la solution

Remarque 11 :

Bien entendu, dans la démonstration, $z(x) = C(x)$

Exemple 8 :

Exemples de résolution

1. **Résoudre** $y' - 3y = \sin x$

Résolution de l'EDLHA On résoud $y' - 3y = 0$; c'est très facile : on trouve $y = Ce^{3x}$ avec $C \in \mathbb{R}$

Variation de la constante On écrit donc $y(x) = C(x)\,e^{3x}$ et donc $y'(x) = C'(x)\,e^{3x} + 3C(x)\,e^{3x}$, d'où, en remplaçant dans l'équation de départ, nous obtenons :

$$C'(x)\,e^{3x} + 3C(x)\,e^{3x} - 3C(x)\,e^{3x} = \sin x$$

C'est à dire

$$C'(x)\,e^{3x} = \sin x \Leftrightarrow C'(x) = e^{-3x}\sin x$$

Le probléme, maintenant consiste à trouver l'ensemble des primitives de $e^{-3x}\sin x$. Comment calculer ces primitives ? C'est une question classique de double intégration par parties, ou encore de fonctions complexes *($\sin x$ est la partie imaginaire de e^{ix}).*

On écrit : $\left\{ \begin{array}{ll} u = e^{-3x} & u' = -3e^{-3x} \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array} \right\}$ d'où, le calcul de l'intégrale donne :

$$\int e^{-3x}\sin x\,dx = -e^{-3x}\cos x - 3\int e^{-3x}\cos x\,dx$$

Nous recommençons une seconde intégration par parties, en posant : $\left\{ \begin{array}{ll} u = e^{-3x} & u' = -3e^{-3x} \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{array} \right\}$, et donc,

$$\int e^{-3x}\cos x\,dx = e^{-3x}\sin x + 3\int e^{-3x}\sin x\,dx$$

C'est à dire, que nous avons, en remplaçant :

$$\begin{aligned} \int e^{-3x}\sin x\,dx &= -e^{-3x}\cos x - 3\left(e^{-3x}\sin x + 3\int e^{-3x}\sin x\,dx\right) \\ &= -e^{-3x}\cos x - 3e^{-3x}\sin x - 9\int e^{-3x}\sin x\,dx \end{aligned}$$

D'où on tire : $\displaystyle\int e^{-3x}\sin x\,dx = -\frac{1}{10}e^{-3x}\cos x - \frac{3}{10}e^{-3x}\sin x + \lambda$ où $\lambda \in \mathbb{R}$

Donc, la solution générale de l'équation $y' - 3y = \sin x$ est donnée par :

$$y(x) = e^{3x}\left(\frac{-1}{10}e^{-3x}\cos x + \frac{-3}{10}e^{-3x}\sin x + \lambda\right) = \lambda e^{3x} - \frac{1}{10}\cos x - \frac{3}{10}\sin x$$

Avec $\lambda \in \mathbb{R}$

2. **Résoudre** $y'\sin x - y\cos x = \sin^2 x$

Tout d'abord, $\sin x$ n'étant pas la fonction nulle, on peut diviser par icelle et nous obtenons : $y' - y\cot x = \sin x$

Résolution de l'EDLHA On résoud donc $y' - y\cot x = 0$ qui est équivalente à

$$\frac{y'}{y} = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

D'où on tire $\ln|y| = \displaystyle\int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \ln|\sin x| + C$, d'où nous tirons $y(x) = C\sin x$

Variations de la constante Nous posons donc $y(x) = C(x)\sin x$ que nous dérivons donc.
$y'(x) = C'(x)\sin x + C(x)\cos x$, et en remplaçant,

$$y'\sin x - y\cos x = \sin^2 x \Leftrightarrow \sin x\,(C'(x)\sin x + C(x)\cos x) - \cos x\,(C(x)\sin x) = \sin^2 x$$

Ce qui donne

$$y'\sin x - y\cos x = \sin^2 x \Leftrightarrow C'(x)\sin^2 x = \sin^2 x \Leftrightarrow C'(x) = 1$$

D'où, $C(x) = x + k$, avec $k \in \mathbb{R}$

D'où nous tirons comme solution générale : $y(x) = (x+k)\sin x$ avec $k \in \mathbb{R}$