9.5 Quelques problèmes résolus

Nous allons résoudre, dans ce paragraphe quelques questions très classiques

9.5.1 Etude classique

Etude de l'équation différentielle
$$2x(1-x)y' + (1-x)y - 1 = 0 \tag{9.6}$$

1. **Sur l'intervalle** $]+1,+\infty[$
   (a) L'EDLHA associée est donnée par
   $$2x(1-x)y' + (1-x)y = 0$$
   Et comme $x > 1$, cette équation est équivalente à
   $$2xy' + y = 0$$
   Où nous tirons $\dfrac{y'}{y} = -\dfrac{1}{2x}$ où nous trouvons $y(x) = \dfrac{C}{\sqrt{x}}$ avec $C \in \mathbb{R}$

   (b) En utilisant la variation de la constante, nous avons :
   $$\begin{cases} y(x) = \dfrac{C(x)}{\sqrt{x}} \\ y'(x) = \dfrac{C'(x)}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{2}C(x)x^{\frac{-3}{2}} \end{cases}$$
   Donc, en remplaçant, nous avons :
   $$2x(1-x)\left(\frac{C'(x)}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2}C(x)x^{\frac{-3}{2}}\right) + (1-x)\left(\frac{C(x)}{2\sqrt{x}}\right) - 1 = 0$$
   $$\Longleftrightarrow$$
   $$2x^{\frac{1}{2}}(1-x)C'(x) - C(x)(1-x)x^{\frac{-1}{2}} + (1-x)C(x)x^{\frac{-1}{2}} - 1 = 0$$
   $$\Longleftrightarrow$$
   $$2x^{\frac{1}{2}}(1-x)C'(x) - 1 = 0$$
   $$\Longleftrightarrow$$
   $$C'(x) = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}(1-x)}$$
   Et on conclue donc que $C(x) = \displaystyle\int \frac{dx}{2x^{\frac{1}{2}}(1-x)}$

   (c) Il faut maintenant calculer $\displaystyle\int \frac{dx}{2x^{\frac{1}{2}}(1-x)}$
   On fait le changement de variables $u = x^{\frac{1}{2}}$, et nous obtenons $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}$, c'est à dire $dx = 2udu$
   Ainsi, calculer $\displaystyle\int \frac{dx}{2x^{\frac{1}{2}}(1-x)}$, c'est aussi calculer $\displaystyle\int \frac{2udu}{2u(1-u^2)} = \int \frac{du}{(1-u^2)}$

   (d) En développant en éléments simples, nous obtenons :
   $$\frac{1}{(1-u^2)} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{(1+u)} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{(1-u)}$$

de telle sorte que :

$$\begin{aligned}
\int \frac{du}{(1-u^2)} &= \frac{1}{2}\int \frac{du}{(1+u)} + \frac{1}{2}\int \frac{du}{(1-u)} \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{du}{(1+u)} - \frac{1}{2}\int \frac{-du}{(1-u)} \\
&= \frac{1}{2}\ln|1+u| - \frac{1}{2}\ln|1-u| \\
&= \frac{1}{2}\ln(1+u) - \frac{1}{2}\ln(u-1) \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{u+1}{u-1}\right)
\end{aligned}$$

Donc $C(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right) + K$ où $K \in \mathbb{R}$

(e) Et la solution générale de 9.6 est donnée par :

$$\boxed{y(x) = x^{\frac{-1}{2}}\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right) + K\right) \text{ avec } K \in \mathbb{R}}$$

(f) On peut faire remarquer que, pour tout $K \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} y(x) = +\infty$

2. **Sur l'intervalle** $]0,1[$

(a) L'EDLHA est toujours $2xy' + y = 0$ d'où nous tirons $\frac{y'}{y} = -\frac{1}{2x}$ où nous trouvons $y(x) = \frac{C}{\sqrt{x}}$ avec $C \in \mathbb{R}$

(b) En utilisant la variation de la constante, rien ne change et nous avons toujours :

$$C(x) = \int \frac{dx}{2x^{\frac{1}{2}}(1-x)}$$

(c) On fait toujours le changement de variables $u = x^{\frac{1}{2}}$, et nous devons toujours calculer $\int \frac{du}{(1-u^2)}$. Comme tout à l'heure,

$$\begin{aligned}
\int \frac{du}{(1-u^2)} &= \frac{1}{2}\int \frac{du}{(1+u)} - \frac{1}{2}\int \frac{-du}{(1-u)} \\
&= \frac{1}{2}\ln|1+u| - \frac{1}{2}\ln|1-u|
\end{aligned}$$

De $u \in]0,1[$, nous tirons $|1-u| = 1-u$ et

$$\begin{aligned}
\int \frac{du}{(1-u^2)} &= \frac{1}{2}\ln|1+u| - \frac{1}{2}\ln|1-u| \\
&= \frac{1}{2}\ln(1+u) - \frac{1}{2}\ln(1-u) \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+u}{1-u}\right)
\end{aligned}$$

Donc $C(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right) + K$ où $K \in \mathbb{R}$

(d) Et la solution générale de 9.6 sur l'intervalle $]0,1[$ est donnée par :

$$\boxed{y(x) = x^{\frac{-1}{2}}\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right) + K\right) \text{ avec } K \in \mathbb{R}}$$

(e) On peut faire remarquer que, pour tout $K \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} y(x) = +\infty$

3. **Sur l'intervalle** $]-\infty, 0[$

(a) L'EDLHA associée est donnée par

$$2x\,(1-x)\,y' + (1-x)\,y = 0$$

Et comme $x < 0$, cette équation est équivalente à

$$2xy' + y = 0$$

Où nous tirons $\dfrac{y'}{y} = -\dfrac{1}{2x}$ où nous trouvons $\ln|y\,(x)| = -\dfrac{1}{2}\ln|x| + C$ et

$$y\,(x) = \frac{C}{\sqrt{-x}} = C\,|x|^{-\frac{1}{2}} \text{ avec} C \in \mathbb{R}$$

(b) En utilisant la variation de la constante, nous avons :

$$\begin{cases} y\,(x) = C\,(x)\,(-x)^{-\frac{1}{2}} \\ y'\,(x) = C'\,(x)\,(-x)^{-\frac{1}{2}} + \dfrac{1}{2}C\,(x)\,(-x)^{\frac{-3}{2}} \end{cases}$$

Donc, en remplaçant, nous avons :

$$2x\,(1-x)\,C'\,(x)\,(-x)^{-\frac{1}{2}} + 2x\,(1-x) \times \frac{1}{2}C\,(x)\,(-x)^{\frac{-3}{2}} + (1-x)\,C\,(x)\,(-x)^{-\frac{1}{2}} - 1 = 0$$

En utilisant le fait que $(-x)^{-\frac{1}{2}} = |x|^{-\frac{1}{2}}$, et que comme $x < 0$, $-x = |x|$, nous avons :

$$-2\,|x|\,(1-x)\,C'\,(x)\,|x|^{-\frac{1}{2}} - |x|\,(1-x)\,C\,(x)\,|x|^{\frac{-3}{2}} + (1-x)\,C\,(x)\,|x|^{-\frac{1}{2}} - 1 = 0$$

Donc,

$$-2\,|x|\,(1-x)\,C'\,(x)\,|x|^{-\frac{1}{2}} - 1 = 0$$

D'où $C'\,(x) = \dfrac{-1}{2\,(1-x)\,|x|^{\frac{1}{2}}}$. Et on conclue donc que

$$C\,(x) = \int \frac{-dx}{2\,(-x)^{\frac{1}{2}}\,(1-x)}$$

Comme $x < 0$, on peut aussi écrire $\dfrac{-1}{2\,(-x)^{\frac{1}{2}}\,(1-x)} = \dfrac{-1}{2\sqrt{|x|}\,(1+|x|)}$

(c) On fait le changement de variables $u = \sqrt{-x}$, et nous obtenons $\dfrac{du}{dx} = -\dfrac{1}{2}\,(-x)^{\frac{-1}{2}} = -\dfrac{1}{2\,|x|^{\frac{1}{2}}}$,

c'est à dire $dx = -2udu$

Ainsi, calculer $\displaystyle\int \frac{-dx}{2\sqrt{-x}\,(1-x)}$, c'est aussi calculer

$$\int \frac{2udu}{2u\,(1+u^2)} = \int \frac{du}{(1+u^2)} = \arctan u + K$$

Donc $C\,(x) = \arctan\left(|x|^{\frac{1}{2}}\right) + K$ où $K \in \mathbb{R}$

(d) Et la solution générale de 9.6 sur l'intervalle $]-\infty, 0[$ est donnée par :

$$\boxed{y\,(x) = |x|^{\frac{-1}{2}}\left(\arctan\left(|x|^{\frac{1}{2}}\right) + K\right) \text{ avec } K \in \mathbb{R}}$$

4. **Existence de solutions** $]-\infty, 1[$
   Pour qu'une solution existe sur $]-\infty, 1[$, il faut que cette solution soit continue et dérivable sur cet intervalle. D'après l'équation 9.6, la seule valeur possible pour $y(0)$ est 1
   (a) A droite de 0
   $y(x)$ peut s'écrire $\dfrac{1}{\sqrt{x}}\left(\dfrac{1}{2}\left(\ln(1+\sqrt{x})-\ln(1-\sqrt{x})\right)+K\right)$. On utilise alors le développement limité de $\ln(1+x)$ à l'ordre 3 [3] :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x)$$

   Donc

$$\begin{aligned}\ln(1+\sqrt{x})-\ln(1-\sqrt{x}) &= \sqrt{x}-\frac{x}{2}+\frac{x^{\frac{3}{2}}}{3}-\left(-\sqrt{x}-\frac{x}{2}-\frac{x^{\frac{3}{2}}}{3}\right)+x^{\frac{3}{2}}\varepsilon(x)\\ &= 2\sqrt{x}+2\frac{x^{\frac{3}{2}}}{3}+x^{\frac{3}{2}}\varepsilon(x)\end{aligned}$$

   Et donc, $\dfrac{1}{2}\left(\ln(1+\sqrt{x})-\ln(1-\sqrt{x})\right)=\sqrt{x}+\dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{3}+x^{\frac{3}{2}}\varepsilon(x)$, puis,

$$\frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2}\left(\ln\left(1+\sqrt{x}\right)-\ln\left(1-\sqrt{x}\right)\right)+K\right)=\frac{K}{\sqrt{x}}+1+\frac{x}{3}+x\varepsilon(x)$$

   Ainsi, si $K\neq 0$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} y(x)$ n'existe pas, et si $K=0$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} y(x)=1$
   (b) A gauche de 0
   En utilisant le développement limité de $\arctan x$ au voisinage de 0, donné par :

$$\arctan x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+x^5\varepsilon(x)$$

   Nous avons

$$\begin{aligned}\frac{\arctan|x|^{\frac{1}{2}}}{|x|^{\frac{1}{2}}} &= \frac{1}{|x|^{\frac{1}{2}}}\left(|x|^{\frac{1}{2}}-\frac{|x|^{\frac{3}{2}}}{3}+\frac{|x|^{\frac{5}{2}}}{5}+|x|^{\frac{5}{2}}\varepsilon(x)\right)\\ &= 1-\frac{|x|}{3}+\frac{|x|^2}{5}+|x|^2\varepsilon(x)\end{aligned}$$

   D'où, au voisinage de 0, $y(x)=\dfrac{K}{|x|^{\frac{1}{2}}}+1-\dfrac{|x|}{3}+\dfrac{|x|^2}{5}+|x|^2\varepsilon(x)$
   Ainsi, si $K\neq 0$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} y(x)$ n'existe pas, et si $K=0$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} y(x)=1$
   (c) La seule solution continue sur $]-\infty,+1[$ est donnée par :

$$y(x)=\begin{cases}\dfrac{\arctan\sqrt{-x}}{\sqrt{-x}} \text{ si } x<0\\ +1 \text{ si } x=0\\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\ln\left(\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right) \text{ si } 0<x<+1\end{cases}$$

   (d) Il faut maintenant montrer qu'elle est dérivable en 0
   Pour ce faire, nous allons utiliser les développements limités de $\ln(1+x)$ et $\arctan x$ au voisinage de 0.

3. Il était aussi tout à fait possible d'utiliser la limite remarquable $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$

i. A gauche de 0, nous devons évaluer $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \dfrac{y(x) - y(0)}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \dfrac{y(x) - 1}{x}$

Or, $\dfrac{y(x)-1}{x} = \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{\arctan |x|^{\frac{1}{2}}}{|x|^{\frac{1}{2}}} - 1\right)$. Nous avons déjà le développement limité de $\dfrac{\arctan |x|^{\frac{1}{2}}}{|x|^{\frac{1}{2}}}$ au voisinage de 0, et donc, au voisinage de 0, nous avons :

$$\begin{aligned}
\frac{y(x)-1}{x} &= \frac{1}{x}\left(\frac{\arctan |x|^{\frac{1}{2}}}{|x|^{\frac{1}{2}}} - 1\right) \\
&= \frac{1}{x}\left(1 - \frac{|x|}{3} + \frac{|x|^2}{5} + |x|^2 \varepsilon(x) - 1\right) \\
&= \frac{1}{x}\left(-\frac{|x|}{3} + \frac{|x|^2}{5} + |x|^2 \varepsilon(x)\right) \\
&= \frac{1}{x}\left(\frac{x}{3} + \frac{x^2}{5} + x^2 \varepsilon(x)\right) \\
&= \frac{1}{3} + \frac{x}{5} + x\varepsilon(x)
\end{aligned}$$

Et donc, $y'_g(0) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \dfrac{y(x) - y(0)}{x} = \dfrac{1}{3}$

On montre ainsi que y est dérivable à gauche de 0, et de dérivée $y'_g(0) = \dfrac{1}{3}$

ii. De même, à droite de 0, nous devons évaluer $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \dfrac{y(x) - y(0)}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \dfrac{y(x) - 1}{x}$

Or, $\dfrac{y(x)-1}{x} = \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}} \ln\left(\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right) - 1\right)$. Nous connaissons le développement limité de $\dfrac{1}{2\sqrt{x}} \ln\left(\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)$ au voisinage de 0 qui est donné par :

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} \ln\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right) = 1 + \frac{1}{3}x + x\varepsilon(x)$$

et donc :

$$\frac{y(x)-1}{x} = \frac{1}{3} + \varepsilon(x)$$

Nous avons donc : $y'_d(0) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \dfrac{y(x) - y(0)}{x} = \dfrac{1}{3}$

On montre ainsi que y est dérivable à droite de 0, et de dérivée $y'_d(0) = \dfrac{1}{3}$.
Comme $y'_d(0) = y'_g(0)$, la fonction y est dérivable en 0 et continue en 0. La seule solution de 9.6 sur l'intervalle $]-\infty, +1[$ est donnée par :

$$y(x) = \begin{cases} \dfrac{\arctan \sqrt{-x}}{\sqrt{-x}} \text{ si } x < 0 \\ +1 \text{ si } x = 0 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \ln\left(\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right) \text{ si } 0 < x < +1 \end{cases}$$

Voir la figure 9.3

9.5.2 Equation non linéaire homogène

Une équation homogène est une équation du type $y' = F\left(\dfrac{y}{x}\right)$ où F est une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$

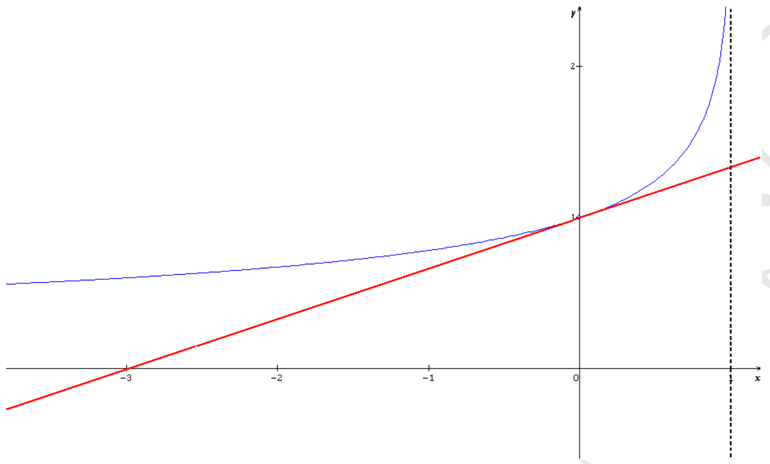

FIGURE 9.3 – La courbe solution de l'équation 9.6 sur l'intervalle $]-\infty, +1[$

Exemple 9 :

1. **Résolvons l'équation** $y' = 1 - \dfrac{y}{x} + \left(\dfrac{y}{x}\right)^2$ **sur l'intervalle** $]0, +\infty[$

   Nous sommes bien devant le cas $y' = F\left(\dfrac{y}{x}\right)$ où $F(t) = 1 - t + t^2$

   (a) Posons $y(x) = xu(x)$

   (b) ; alors $y'(x) = xu'(x) + u(x)$

   (c) **On remplace alors dans l'équation** et on obtient :

$$xu'(x) + u(x) = 1 - u(x) + u(x)^2$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$xu'(x) = 1 - 2u(x) + u(x)^2$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$xu'(x) = (u(x) - 1)^2$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\frac{u'(x)}{(u(x) - 1)^2} = \frac{1}{x}$$

   qui est, en fait, une équation à variables séparables, pour $x \in \mathbb{R}$ tel que $u(x) \neq 1$. En intégrant, nous obtenons :

$$\frac{1}{(1 - u(x))} = \ln x + K$$

   (d) Par calculs, on déduit donc que $u(x) = 1 - \dfrac{1}{\ln x + K}$, d'où

$$\boxed{y(x) = x - \frac{x}{\ln x + K}}$$

   avec $K \in \mathbb{R}$ et $x \neq e^{-K}$

   (e) Pour $u(x) = 1$, on obtient $y(x) = x$ qui est bien solution de l'équation proposée.

2. **Résolvons l'équation** $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$ **sur l'intervalle** $]0, +\infty[$

   (a) Cette équation est équivalente à $y' = \dfrac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(\dfrac{y}{x}\right)^2}$ et où nous avons $F(t) = t + \sqrt{1 + t^2}$

   (b) **Nous faisons le changement de variables** $y(x) = xt(x)$; alors $y'(x) = xt'(x) + t(x)$

(c) **On remplace alors dans l'équation** et on obtient :

$$xt'(x) + t(x) = t(x) + \sqrt{1 + t(x)^2}$$

C'est à dire :

$$t'(x) = \frac{\sqrt{1 + t(x)^2}}{x} \iff \frac{t'(x)}{\sqrt{1 + t(x)^2}} = \frac{1}{x}$$

(d) Les primitives de $\dfrac{t'(x)}{\sqrt{1 + t(x)^2}}$ sont du type $\operatorname{argsh}(t(x)) + K$, et nous obtenons l'dentité :

$$\operatorname{argsh}(t(x)) = \ln x + K \iff \operatorname{argsh}(t(x)) = \ln Kx \text{ avec } K > 0$$

D'où $t(x) = \dfrac{e^{\ln Kx} - e^{-\ln Kx}}{2}$, ce qui nous donne : $t(x) = \left(Kx - \dfrac{1}{Kx}\right) \times \dfrac{1}{2}$ avec $K > 0$.

L'ensemble des solutions est donc donné par : $y(x) = \dfrac{K^2x^2 - 1}{2K}$ avec $K > 0$

9.5.3 Equation de Bernouilli

On appelle équation de Bernouilli, toute équation différentielle de la forme :

$$y' + f(x)y + g(x)y^\alpha = 0$$

Où f et g sont des fonctions numériques et α un réel différent de 0 ou de 1 *(sinon, nous avons affaire à des équations linéaires).*

Résolution d'une équation de Bernouilli

1. **Faisons le changement de variables** $z = y^{1-\alpha}$. Alors, nous avons :

$$z' = (1 - \alpha)y'y^{-\alpha} \iff y' = \frac{z'y^\alpha}{1 - \alpha}$$

2. **En remplaçant, nous obtenons :**

$$\begin{aligned} y' + f(x)y + g(x)y^\alpha = 0 \quad &\iff \quad \frac{z'y^\alpha}{1-\alpha} + f(x)y + g(x)y^\alpha = 0 \\ &\iff \quad y^\alpha\left(\frac{z'}{1-\alpha} + f(x)y^{1-\alpha} + g(x)\right) = 0 \end{aligned}$$

Nous nous ramenons ainsi à une équation linéaire en z : $\dfrac{z'}{1-\alpha} + f(x)z + g(x) = 0$

Exemple 10 :

1. **Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation** $y' + y = xy^2$

On peut remarquer que la fonction nulle est solution de l'équation. Supposons maintenant que y ne soit pas la fonction nulle $\mathcal{O}$

(a) Faisons le changement de variables $z = y^{-1} = \dfrac{1}{y}$, alors $z' = -y'y^{-2} = -\dfrac{y'}{y^2}$

(b) Comme y n'est pas la fonction nulle, on peut diviser par y^2 ; nous obtenons :

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{y} = x \iff -z' + z = x$$

(c) On résoud maintenant l'équation linéaire $-z' + z = x$

i. L'EDLHA est donnée par $-z' + z = 0$, d'où on tire, de manière classique $z(x) = Ce^x$ avec $C \in \mathbb{R}$

ii. Il est facile de trouver une solution particulière $z_p : z_p(x) = x + 1$

iii. D'où la solution générale est donnée par : $z(x) = Ce^x + x + 1$ avec $C \in \mathbb{R}$

(d) On en déduit donc la solution y de l'équation de départ :

$$\begin{cases} y(x) = 0 \\ y(x) = \dfrac{1}{1 + x + Ce^x} \text{ avec } C \in \mathbb{R} \end{cases}$$

2. **Résoudre** $y' - \dfrac{y}{2x} = 5x^2y^5$ **sur** $\mathbb{R}^*$

On peut remarquer que la fonction nulle est solution de l'équation. Supposons maintenant que y ne soit pas la fonction nulle.

(a) On fait donc le changement de variables $z = y^{-4}$; alors, $z' = -4y'y^{-5}$

(b) En factorisant par y^5, nous obtenons :

$$\begin{aligned} y' - \frac{y}{2x} = 5x^2y^5 &\iff y' - \frac{y}{2x} - 5x^2y^5 = 0 \\ &\iff y^5\left(y'y^{-5} - \frac{y^{-4}}{2x} - 5x^2\right) = 0 \\ &\iff y^5\left(\frac{z'}{-4} - \frac{z}{2x} - 5x^2\right) = 0 \end{aligned}$$

Comme y n'est pas la fonction nulle, résoudre $y^5\left(\dfrac{z'}{-4} - \dfrac{z}{2x} - 5x^2\right) = 0$, c'est résoudre

$$\frac{z'}{-4} - \frac{z}{2x} - 5x^2 = 0 \iff \frac{1}{4}z' + \frac{z}{2x} + 5x^2 = 0 \iff z' + \frac{2}{x}z + 20x^2 = 0$$

qui est une équation différentielle linéaire classique.

(c) **Résolution de** $z' + \dfrac{2}{x}z + 20x^2 = 0$

i. L'équation différentielle linéaire homogène associée est $z' + \dfrac{2}{x}z = 0 \iff z' = -\dfrac{2}{x}z$ qui admet pour solution $z(x) = \dfrac{C}{x^2}$ avec $C \in \mathbb{R}$

ii. Utilisons la méthode de variation de la constante. Si $z(x) = \dfrac{C(x)}{x^2}$, alors $z'(x) = \dfrac{C'(x)x^2 - 2xC(x)}{x^4}$, et en remplaçant dans $z' + \dfrac{2}{x}z + 20x^2 = 0$, nous obtenons :

$$\frac{C'(x)x^2 - 2xC(x)}{x^4} + \frac{2}{x}\frac{C(x)}{x^2} + 20x^2 = 0$$

qui est équivalente à

$$\frac{C'(x)x^2 - 2xC(x) + 2xC(x) + 20x^6}{x^4} = 0$$

, c'est à dire $C'(x)x^2 + 20x^6 = 0$ d'où on tire que $C(x) = -4x^5 + K$

iii. Les solutions sont donc :

$$\begin{cases} z(x) = -4x^3 + \dfrac{K_1}{x^2} & \text{pour } x < 0 \text{ et } K_1 \in \mathbb{R} \\ z(x) = -4x^3 + \dfrac{K_2}{x^2} & \text{pour } x > 0 \text{ et } K_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

(d) Les solutions de l'équation de départ sont donc :

$$\begin{cases} y(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{-4x^3 + \dfrac{K_1}{x^2}}} & \text{pour } x < 0 \text{ et } K_1 \in \mathbb{R} \\ y(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{-4x^3 + \dfrac{K_2}{x^2}}} & \text{pour } x > 0 \text{ et } K_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

9.5.4 Equations fonctionnelles

Trouver toutes les fonctions f, continues sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$2\int_0^x tf(t)\,dt - x\int_0^x f(t)\,dt = 0$$

Nous allons dériver l'expression $L(x) = 2\int_0^x tf(t)\,dt - x\int_0^x f(t)\,dt$

$$L'(x) = 2xf(x) - xf(x) - \int_0^x f(t)\,dt$$

On appelle $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$; alors $F'(x) = f(x)$ et

$$L'(x) = xf(x) - F(x)$$

et nous avons à résoudre l'équation $xy' - y = 0$ qui donne comme solution $y(x) = Cx$ où $C \in \mathbb{R}$, et où on trouve que f est la fonction constante $f(x) = C$