9.6 Exercices sur les équations différentielles du premier ordre

9.6.1 Exercices résolus

Exercice 4 :

Résoudre, dans $\mathbb{R}^{*+}$, l'équation différentielle linéaire :

$$xy' - 2y + x\ln x = 0$$

1. **On résoud d'abord, l'équation différentielle linéaire homogène associée**
Cette équation est donnée par : $xy' - 2y = 0$. Pour $x > 0$, cette équation est équivalente à
$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{x}$$
En intégrant de part et d'autre, nous obtenons $\ln|y| = 2\ln x + C$, c'est à dire que nous obtenons comme solution de l'équation différentielle linéaire homogène associée :
$$\boxed{y(x) = Cx^2 \text{où } C \in \mathbb{R} \text{ et } x > 0}$$

2. **Recherche de la solution générale par variation de la constante**
On écrit $y(x) = C(x)x^2$; alors, $y'(x) = 2xC(x) + x^2C'(x)$. En remplaçant dans l'équation, nous obtenons :
$$\begin{aligned} x\left(2xC(x) + x^2C'(x)\right) - 2x^2C(x) + x\ln x &= 2x^2C(x) + x^3C'(x) - 2x^2C(x) + x\ln x \\ &= x^3C'(x) + x\ln x \end{aligned}$$
Nous devons donc résoudre l'équation $x^3C'(x) + x\ln x = 0$, laquelle est équivalente, parce que $x > 0$, à :
$$\begin{aligned} x^2C'(x) + \ln x = 0 &\Longleftrightarrow x^2C'(x) = -\ln x \\ &\Longleftrightarrow C'(x) = \frac{-\ln x}{x^2} \end{aligned}$$
Nous tirons donc que $C(x) = \displaystyle\int \frac{-\ln x}{x^2}\,dx$, que nous obtiendrons par une intégration par parties.
— Nous posons alors :
$$\left\{\begin{array}{ll} u = \ln x & u' = \dfrac{1}{x} \\ v' = \dfrac{-1}{x^2} & v = \dfrac{1}{x} \end{array}\right\}$$
— Alors,
$$\begin{aligned} \int \frac{-\ln x}{x^2}\,dx &= \frac{\ln x}{x} - \int \frac{1}{x^2}\,dx \\ &= \frac{\ln x}{x} + \int \frac{-1}{x^2}\,dx \\ &= \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} + K \text{ avec } K \in \mathbb{R} \end{aligned}$$
Nous en déduisons donc que $C(x) = \dfrac{\ln x}{x} + \dfrac{1}{x} + K$ et que la solution générale de l'équation différentielle proposée est donnée par :
$$\boxed{y(x) = x\ln x + x + Kx^2 \text{ avec } K \in \mathbb{R}}$$

Exercice 5 :

1. Trouver $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$ tels que :
$$\frac{1}{T^2 - 4} = \frac{A}{T+2} + \frac{B}{T-2}$$
2. Résoudre l'équation différentielle $z' = z^2 - 4$
3. Résoudre l'équation différentielle $y' = (y - 4x)^2$

1. **Trouver $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$ tels que :** $\dfrac{1}{T^2-4} = \dfrac{A}{T+2} + \dfrac{B}{T-2}$
   Le plus simple est de procéder par indentification :

$$\begin{aligned} \frac{A}{T+2} + \frac{B}{T-2} &= \frac{A(T-2)+B(T+2)}{T^2-4} \\ &= \frac{(A+B)T+2(B-A)}{T^2-4} \end{aligned}$$

   D'où nous tirons :

$$\begin{cases} B+A = & 0 \\ B-A = & \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

   D'où nous tirons $B = \dfrac{1}{4}$ et $A = \dfrac{-1}{4}$. Ainsi :

$$\boxed{\frac{1}{T^2-4} = \frac{\frac{1}{4}}{T-2} - \frac{\frac{1}{4}}{T+2}}$$

2. **Résoudre l'équation différentielle** $z' = z^2 - 4$
   (a) Nous pouvons d'ores et déjà remarquer que les fonctions constantes $z(x) = +2$ et $z(x) = -2$ sont solutions de l'équation sur $\mathbb{R}$ en entier
   (b) Supposons maintenant $z(x) \neq +2$ et $z(x) \neq -2$; nous avons alors une équation à variables séparables. En effet,

$$z' = z^2 - 4 \Longleftrightarrow \frac{z'}{z^2-4} = 1$$

   D'après l'étude précédente,

$$\frac{z'}{z^2-4} = \frac{1}{4}\left(\frac{z'}{z-2} - \frac{z'}{z+2}\right)$$

   Nous avons donc à résoudre :

$$\int \frac{1}{4}\left(\frac{z'(x)}{z(x)-2} - \frac{z'(x)}{z(x)+2}\right)\,dx = \int 1\,dx$$

   — Commençons par le plus simple : $\displaystyle\int 1\,dx = x + K$ où $K \in \mathbb{R}$
   — Puis,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{4}\left(\frac{z'(x)}{z(x)-2} - \frac{z'(x)}{z(x)+2}\right)\,dx &= \frac{1}{4}\int \frac{z'(x)}{z(x)-2} - \frac{z'(x)}{z(x)+2}\,dx \\ &= \frac{1}{4}\left(\int \frac{z'(x)}{z(x)-2}\,dx - \int \frac{z'(x)}{z(x)+2}\,dx\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(\ln|z(x)-2| - \ln|z(x)+2|\right) \\ &= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{z(x)-2}{z(x)+2}\right| \end{aligned}$$

   — En revenant à l'égalité, nous obtenons : $\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{z(x)-2}{z(x)+2}\right| = x+K$, c'est à dire $\ln\left|\dfrac{z(x)-2}{z(x)+2}\right| = 4x+K$
   En passant ensuite à l'exponentielle, nous obtenons : $\dfrac{z(x)-2}{z(x)+2} = Ce^{4x}$ avec $C \in \mathbb{R}$. En faisant, maintenant, des calculs simples, nous obtenons :

$$z(x) = -2 + \frac{4}{1-Ce^{x}}$$

(c) En synthèse, nous avons comme solution :

$$\boxed{\begin{cases} z(x) = +2 \\ z(x) = -2 \\ z(x) = -2 + \dfrac{4}{1 - Ce^x} \text{ avec } C \in \mathbb{R} \end{cases}}$$

3. **Résoudre l'équation différentielle** $y' = (y - 4x)^2$
   Pour résoudre cette équation, nous faisons le changement de variables $z = y - 4x$; à ce moment là, $z' = y' - 4$, et en remplaçant, nous obtenons :
   $$y' = (y - 4x)^2 \iff z' + 4 = z^2 \iff z' = z^2 - 4$$
   Nous avons déjà résolu l'équation $z' = z^2 - 4$, d'où le ssolutions sont données par :
   $$\boxed{\begin{cases} y(x) = 4x + 2 \\ y(x) = 4x - 2 \\ y(x) = 4x - 2 + \dfrac{4}{1 - Ce^x} \text{ avec } C \in \mathbb{R} \end{cases}}$$
   Remarque : L'équation $y' = (y - 4x)^2$ n'est en aucun cas une équation de Bernouilli

9.6.2 Equations à variables séparables

Il faut remarquer que les équations à variables séparables ne sont pas forcément des équations linéaires

Exercice 6 :

Intégrer les équations différentielles à variables séparables suivantes :

1. $y' = 4e^{x+y}$; *on trouve comme réponse :* $y(x) = -\ln(k - 4e^x)$ *avec* $k > 0$
2. $y' \tan x = y$; *on trouve comme réponse :* $y(x) = k \sin x$ *avec* $k \in \mathbb{R}$
3. $y' = \sqrt{1 - y^2}$ *on trouve comme réponse :* $y(x) = \sin(x + k)$ *avec* $k \in \mathbb{R}$ *ou* $y(x) = 1$
4. $xy' + y^2 = 0$; *on trouve comme réponse :* $y(x) = \dfrac{1}{k + \ln|x|}$ *avec* $k \in \mathbb{R}$ *ou bien* $y(x) = 0$

Exercice 7 :

Intégrer l'équation différentielle $\left(x^2 - x\right) y' = y^2 + y$; montrer qu'il existe plus d'une solution valant 0 pour $x = 1$

9.6.3 Equations différentielles linéaires

Exercice 8 :

Résoudre les équations différentielles du premier ordre :

1. $y' + y \sin x = 0$
2. $y' - y - e^{3x} = 0$
3. $y' - y + 1 = e^x$
4. $y' = 2xy + x^3$
5. $y'\left(1 + x^2\right) + x^2 y = x^2$
6. $xy' - y + x^\alpha \ln x = 0$, où $x > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$

Exercice 9 :

Résoudre l'équation différentielle $xy' - y + \ln x = 0$ *(Réponse :* $y(x) = \ln x + 1 + kx$ *avec* $k \in \mathbb{R}$*)*

Exercice 10 :

Soient a et b 2 réels avec $a \neq 0 (a \in \mathbb{R}^*)$ et $b \in \mathbb{R}$. Vérifier que la solution sur $\mathbb{R}^+$ de l'équation

$$ay' + by = f(x)$$

vérifiant la condition initiale $y(0) = 0$ s'écrit sous la forme

$$y(x) = \int_0^x f(u)\,\psi(x-u)\,du$$

Où ψ est une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$, indépendante de f. Vérifier que ψ est solution de l'équation sans second membre

9.6.4 Autres équations différentielles

Exercice 11 :

Equations différentielles homogènes se ramenant à des équations à variables séparables

Faire le changement de variables $y(x) = xz(x)$

1. $x^2y' - 2y^2 + xy = 0$. *On trouve comme réponse :* $y(x) = \dfrac{x}{1-kx^2}$ *avec* $k \in \mathbb{R}$ *ou bien* $y(x) = 0$
2. (a) $xy' - y - x\cos\dfrac{y}{x} = 0$
   (b) $(xy' - y)^2 = x^2 - y^2$
   (c) $y = x\left(y' - \sqrt{1+y'^2}\right)$

Exercice 12 :

Résoudre les équations de Bernouilli suivantes

1. $xy' - y - \sqrt{y} = 0$
2. $x^2y' + y + y^2 = 0$
3. $y' + xy = x^3y^3$
4. $y - y'\cos x = y^2\cos x\,(1 - \sin x)$

Exercice 13 :

Donner une équation différentielle dont les solutions sont les fonctions de la forme

$$x \longrightarrow \frac{C+x}{1+x^2} \text{ avec } C \in \mathbb{R}.$$

Exercice 14 :

1. Résoudre l'équation différentielle $f' + xf^3 = 0$
2. On considère l'équation différentielle $y' = 3\left(\dfrac{y}{x}\right) - \left(\dfrac{y^3}{x^5}\right)$

   Résoudre l'équation en faisant le changement de variables $z = yx^{-3}$

Exercice 15 :

1. Résoudre l'équation différentielle $2xz' + 2z = -1$
2. On considère l'équation différentielle $2xy' - y^2 + 1 = 0$
   (a) Vérifier que la fonction constante $y(x) = 1$ est solution
   (b) En posant $y = 1 + \dfrac{1}{z}$ résoudre l'équation différentielle.

9.6.5 Equations différentielles linéaires du premier ordre : problèmes de prolongement

Exercice 16 :

1. Déterminer les solutions de l'équation différentielle $xy' - 2y + x = 0$, sur chacun des intervalles $]-\infty\ 0[$ et $]0\ +\infty[$
2. Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ en entier
3. Si on exige que les solutions soient 2 fois dérivables, le résultat est-il modifié ?

Exercice 17 :

On considère l'équation différentielle du premier ordre : $xy' - 3y = 2x + 3$

1. Résoudre cette équation sur $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$
2. L'équation admet-elle une solution sur $\mathbb{R}$ en entier ?

Exercice 18 :

Résoudre, chercher les solutions maximales *(c'est à dire celles qu'on ne peut pas prolonger en d'autres solutions)* et tracer les courbes intégrales des équations différentielles suivantes :

1. $x^2y' + xy = 1$
2. $y' \sin x - 2y \cos x = 0$
3. $|x|\, y' + y = x^2$

Exercice 19 :

On considère l'équation différentielle $2x^2y' + y = 1$

1. Résoudre cette équation sur $\mathbb{R}^{+*}$
2. Résoudre cette équation sur $\mathbb{R}^{-*}$; montrez que toutes les les solutions sur $\mathbb{R}^{-*}$ peuvent être prolongées en une solution sur $\mathbb{R}^{-}$
3. Existe-til une solution à l'équation définie sur $\mathbb{R}$

9.6.6 Application des équations différentielles aux équations fonctionnelles

Exercice 20 :

Trouver toutes les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ telles que $f(x) = x^4 + \displaystyle\int_0^x tf(t)\, dt$

Exercice 21 :

Soit g une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et telle que, pour tout $x \in [a, b]$, on ait $g(x) > 0$. On pose $G(x) = \displaystyle\int_a^x \frac{1}{g(t)} dt$.

Trouver toutes les solutions sur un intervalle $[t_0, t_1]$ à préciser du problème différentiel suivant :

$$\begin{cases} y(t_0) = a \\ y' = g(y) \end{cases}$$

Exercice 22 :

L'objet de cet exercice est de trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dérivables sur $\mathbb{R}$ et telles que :

$$\left(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2\right) \left(f(x + y) = e^x f(y) + e^y f(x)\right) \tag{9.7}$$

1. Démontrer que $f(0) = 0$
2. En dérivant par rapport à x, démontrer que f vérifie l'équation différentielle :

$$f'(y) = f(y) + ae^y \text{ où } a = f'(0)$$

3. En déduire toutes les fonctions qui vérifient (9.7)

Exercice 23 :

L'objet du problème est de trouver toutes les fonctions continues sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\int_0^x f(t)\,dt = \frac{x}{3}\left(f(x) + 2f(0)\right) \tag{9.8}$$

On pose $\psi(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$

1. Démontrer que $\psi(x)$ vérifie l'équation différentielle du premier ordre
$$\frac{x}{3}y' - y = \frac{-2xf(0)}{3}$$
2. Résoudre cette équation différentielle
3. En déduire toutes les fonctions f qui vérifient (9.8)

Exercice 24 :

L'objet de cette question est de déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues, vérifiant

$$(\forall x \in \mathbb{R})\left(f(x) = \int_0^x tf(t)\,dt + 1\right)$$

1. Quelle est la seule valeur possible pour $f(0)$?
2. Démontrer que f est une solution de l'équation différentielle $y' - xy = 0$
3. En déduire f