## 9.7 Équations différentielles du second ordre

### 9.7.1 Définition

On appelle équation différentielle linéaire du second ordre, toute équation de la forme :

$$u(x)\,y'' + v(x)\,y' + w(x)\,y = g(x) \tag{9.9}$$

où $u$, $v$, $w$ et $g$ sont des fonctions continues sur un intervalle $I$
L'équation différentielle linéaire homogène associée (EDLHA) est

$$u(x)\,y'' + v(x)\,y' + w(x)\,y = 0 \tag{9.10}$$

**Remarque 12 :**

1. Si $I$ est un intervalle de $\mathbb{R}$, une solution de l'équation 9.9 sur $I$ est une fonction $y$, 2 fois dérivable sur $I$, à valeurs dans $\mathbb{R}$
2. Pour $I$, intervalle de $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}^2(I)$ l'espace vectoriel des fonctions deux fois dérivables sur $I$, alors, l'application :
$$\left\{\begin{array}{rcl} \mathcal{C}^2(I) & \longrightarrow & \mathcal{C}^0(I) \\ y & \longmapsto & L(y) = u(x)\,y'' + v(x)\,y' + w(x)\,y \end{array}\right.$$
est linéaire.
3. Si $y_1$ et $y_2$ sont solutions de l'EDLHA9.10, alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et tout $\beta \in \mathbb{R}$, la fonction $\alpha y_1 + \beta y_2$ est solution de l'EDLHA 9.10.
Autrement dit, **l'ensemble des solutions de l'EDLHA forme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.**
C'est en fait le noyau de l'application $L$
4. Si $y_1$ et $y_2$ sont solutions de
$$u(x)\,y'' + v(x)\,y' + w(x)\,y = g(x)$$
, alors, $y_1 - y_2$ est solution de l'EDLHA associée.
5. La solution générale de $u(x)\,y'' + v(x)\,y' + w(x)\,y = g(x)$, s'obtient en **additionnant une solution particulière et la solution générale de l'EDLHA associée.** C'est un résultat de la théorie des équations linéaires.
6. On admet que l'ensemble des solutions de l'équation 9.10 forme un **espace vectoriel de dimension 2** et que l'ensemble des solutions de 9.9 forme un espace affine de dimension 2.

### 9.7.2 Définition

Soit $I$, un intervalle de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}$ et $y'_0 \in \mathbb{R}$
On appelle Problème de Cauchy ou équation différentielle à conditions initiales, l'équation

$$\left\{\begin{array}{l} u(x)\,y'' + v(x)\,y' + w(x)\,y = g(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \end{array}\right. \tag{9.11}$$

On admet que le problème de Cauchy 9.11 admet une solution unique.

**Remarque 13 :**

En dehors du cas où les coefficients sont constants, il n'existe pas de méthode de recherche qui soit générale.

### 9.7.3 Exemples de résolution

Résoudre sur $\mathbb{R}$, l'équation $x^2y'' + xy' - y = x^2$

1. **On recherche une solution particulière.** Au vu de la forme de l'équation, on la recherche du type $y(x) = ax^2 + bx + c$. Alors, $y'(x) = 2ax + b$ et $y''(x) = 2a$. En remplaçant dans l'équation, nous obtenons :
$$2ax^2 + x(2ax + b) - ax^2 - bx - c = x^2$$
Ceci est équivalent à :
$$3ax^2 - c = x^2$$
D'où on tire $a = \dfrac{1}{3}$ et $c = 0$. Une solution particulière est donc $y(x) = \dfrac{x^2}{3}$
2. **On cherches les solutions de l'EDLHA**
L'EDLHA est donc $x^2y'' + xy' - y = 0$. Au vu de la forme de l'équation, on la recherche du type $y(x) = x^\alpha$. Alors, $y'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ et $y''(x) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$. En remplaçant dans l'équation, nous obtenons : $\left(\alpha^2 - 1\right)x^\alpha = 0$ et alors, nous obtenons $\alpha = 1$ ou $\alpha = -1$. Nous obtenons alors 2 solutions linéairement indépendantes : $y(x) = x$ et $y(x) = \dfrac{1}{x}$. Les solutions de l'EDLHA sur $\mathbb{R}^*$ sont donc
$$y(x) = \lambda x + \frac{\mu}{x} \text{ où } \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } \mu \in \mathbb{R}$$
3. **La solution générale de l'équation est donc donnée par :**
$$\begin{cases} y(x) = \dfrac{x^2}{3} + \lambda_1 x + \dfrac{\mu_1}{x} & \text{si } x < 0 \\ y(x) = \dfrac{x^2}{3} + \lambda_2 x + \dfrac{\mu_2}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$
4. **Recherche de la solution sur $\mathbb{R}$**
   — La continuité sur $\mathbb{R}$ implique la continuité en 0. Pour que la solution soit continue en 0, nous devrons avoir $\mu_1 = \mu_2 = 0$
   — La dérivabilité sur $\mathbb{R}$ implique la dérivabilité en 0. Pour que la solution soit dérivable en 0, nous devrons avoir, en plus $\lambda_1 = \lambda_2$

   Les solutions sur $\mathbb{R}$ sont donc données par $y(x) = \dfrac{x^2}{3} + \lambda x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$

### 9.7.4 Comment obtenir une seconde solution d'une EDLHA ?

Soit $u(x)y'' + v(x)y' + w(x)y = 0$ une équation différentielle du second ordre qui admet une solution $y_0$ sur un intervalle $I$. Alors
$y = y_0 z$ est solution sur $I$ si et seulement si $z'$ est solution d'une équation différentielle du premier ordre

**Démonstration**

La démonstration est simple. Soit $y_0$ solution de l'équation sur un intervalle $I$, et posons $y = y_0 z$

1. Calculons les dérivées successives (formule de Leibniz)
   — $y' = y_0'z + z'y_0$
   — $y'' = y_0''z + 2y_0'z' + z''y_0$
2. De $uy'' + vy' + wy = 0$, on tire, en remplaçant :
$$\begin{aligned} uy'' + vy' + wy = & \; u\left(y_0''z + 2y_0'z' + z''y_0\right) + v\left(y_0'z + z'y_0\right) + wy_0z \\ = & \; \left(uy_0'' + vy_0' + wy_0\right)z + \left(uy_0''\right)z'' + \left(vz_0 + 2uy_0'\right)z' \end{aligned}$$
3. La fonction $z$ doit donc vérifier l'équation $\left(uy_0''\right)z'' + \left(vz_0 + 2uy_0'\right)z' = 0$

Ce que nous voulions

**Exemple 11 :**

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $(1+x)\,y''-3y'+(2-x)\,y=e^{-x}$

Une solution particulière de cette équation semble être de la forme $ae^{-x}$, dont la dérivée première est $-ae^{-x}$ et la dérivée seconde $ae^{-x}$. En remplaçant dans l'équation, nous obtenons :

$$(1+x)\,ae^{-x}+3ae^{-x}+(2-x)\,ae^{-x}=e^{-x}$$

C'est à dire :

$$(1+x)\,a+3a+(2-x)\,a=1 \Longleftrightarrow 9a=1 \Longleftrightarrow a=\frac{1}{6}$$

Une solution particulière de cette équation est donc $\dfrac{e^{-x}}{6}$

1. Résolution sur l'intervalle $]-1;+\infty[$
   (a) L'EDLHA à cette équation est $(1+x)\,y''-3y'+(2-x)\,y=0$ dont $y_0\,(x)=e^x$ est une solution évidente.
   (b) Soit $y=zy_0$ une autre solution ; alors :
   — $y'=y_0'z+z'y_0$
   — $y''=y_0''z+2y_0'z'+z''y_0$
   et, en remplaçant, nous obtenons :

$$(1+x)\,[y_0''z+2y_0'z'+z''y_0]-3\,(y_0'z+z'y_0)+2\,(2-x)\,y_0z=0$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$z\,[(1+x)\,y_0''-3y_0+(2-x)\,y_0]+z''\,[(1+x)\,y_0]+z'\,[(2x-1)\,y_0]=0$$

   (c) $z'$ est donc solution de

$$z''\,[(1+x)\,y_0]+z'\,[(2x-1)\,y_0]=0$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$(z''\,[(1+x)]+z'\,[(2x-1)])\,y_0=0$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$(z''\,[(1+x)]+z'\,[(2x-1)])\,e^x=0$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$z''\,(1+x)+z'\,(2x-1)=0$$

   (d) Pour résoudre cette équation différentielle, nous posons $Z=z'$, et nous avons donc à résoudre l'équation différentielle, sur l'intervalle $]-1;+\infty[$

$$Z'\,(1+x)+Z\,(2x-1)=0$$

   — Nous avons, pour $x\in\,]-1;+\infty[$, $\dfrac{Z'}{Z}=\dfrac{-2x+1}{x+1}=-2+\dfrac{3}{x+1}$, d'où nous tirons :

$$\ln|Z\,(x)|=-2x+3\ln(x+1)+K$$

   d'où nous tirons

$$Z\,(x)=C\,(x+1)^3\,e^{-2x} \text{ avec } C\in\mathbb{R}$$

   ce qui est équivalent à $z'\,(x)=C\,(x+1)^3\,e^{-2x}$ avec $C\in\mathbb{R}$
   — Pour calculer $z$, nous sommes condamnés à faire plusieurs intégrations par parties
   — Pour une première intégration par parties, nous posons :

$$\left\{\begin{array}{ll} u=(x+1)^3 & u'=3\,(x+1)^2 \\ v'=e^{-2x} & v=\dfrac{-1}{2}e^{-2x} \end{array}\right\}$$

   Alors,

$$\begin{aligned} z\,(x)= &\; C\left(\frac{-1}{2}e^{-2x}\,(x+1)^3-\int 3\,(x+1)^2\times\frac{-1}{2}e^{-2x}dx\right) \\ = &\; C\left(\frac{-1}{2}e^{-2x}\,(x+1)^3+\frac{3}{2}\int(x+1)^2\,e^{-2x}dx\right) \end{aligned}$$

— Pour la seconde intégration par parties, nous calculons $\displaystyle\int (x+1)^2 e^{-2x} dx$. Nous posons donc :

$$\left\{ \begin{array}{ll} u = (x+1)^2 & u' = 2(x+1) \\ v' = e^{-2x} & v = \dfrac{-1}{2} e^{-2x} \end{array} \right\}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \int (x+1)^2 e^{-2x} dx = & \ \frac{-1}{2} e^{-2x} (x+1)^2 - \int 2(x+1) \times \frac{-1}{2} e^{-2x} dx \\ = & \ \frac{-1}{2} e^{-2x} (x+1)^2 + \int (x+1) e^{-2x} dx \end{aligned}$$

— Et nous faisons une dernière intégration par parties pour calculer, cette fois ci $\displaystyle\int (x+1) e^{-2x} dx$. Nous posons donc :

$$\left\{ \begin{array}{ll} u = (x+1) & u' = 1 \\ v' = e^{-2x} & v = \dfrac{-1}{2} e^{-2x} \end{array} \right\}$$

Et donc :

$$\begin{aligned} \int (x+1) e^{-2x} dx = & \ \frac{-1}{2} e^{-2x} (x+1) - \int \times \frac{-1}{2} e^{-2x} dx \\ = & \ \frac{-1}{2} e^{-2x} (x+1) + \frac{1}{2} \int e^{-2x} dx \\ = & \ \frac{-1}{2} e^{-2x} (x+1) - \frac{1}{4} e^{-2x} + K \end{aligned}$$

Et maintenant, nous remontons :

$$\begin{aligned} \int (x+1)^2 e^{-2x} dx = & \ \frac{-1}{2} e^{-2x} (x+1)^2 + \int (x+1) e^{-2x} dx \\ = & \ \frac{-1}{2} e^{-2x} (x+1)^2 + \left( \frac{-1}{2} e^{-2x} (x+1) - \frac{1}{4} e^{-2x} + K \right) \\ = & \ -\frac{1}{2} e^{-2x} (x+1)^2 - \frac{1}{2} e^{-2x} (x+1) - \frac{1}{4} e^{-2x} + K \end{aligned}$$

D'où, nous avons $z(x)$ :

$$\begin{aligned} z(x) = & \ C \left( \frac{-1}{2} e^{-2x} (x+1)^3 + \frac{3}{2} \int (x+1)^2 e^{-2x} dx \right) \\ = & \ C \frac{-1}{2} e^{-2x} (x+1)^3 + C \frac{3}{2} \int (x+1)^2 e^{-2x} dx \\ = & \ C \frac{-1}{2} e^{-2x} (x+1)^3 + C \frac{3}{2} \left( -\frac{1}{2} e^{-2x} (x+1)^2 - \frac{1}{2} e^{-2x} (x+1) - \frac{1}{4} e^{-2x} + K \right) \end{aligned}$$

(e) En synthèse, nous avons : $z(x) = \lambda e^{-2x} \left(4x^3 + 18x^2 + 30x + 27\right) + \mu$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$ Ce qui donne comme solution de l'équation, pour $x > -1$,

$$y(x) = \lambda e^{-x} \left(4x^3 + 18x^2 + 30x + 27\right) + \mu e^{x} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } \mu \in \mathbb{R}$$

La solution générale sur $]-1; +\infty[$ est donc :

$$S(x) = \lambda e^{-x} \left(4x^3 + 18x^2 + 30x + 27\right) + \mu e^{x} + \frac{e^{-x}}{6} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } \mu \in \mathbb{R}$$

2. Résolution sur l'intervalle $]-\infty; -1[$
S'il existe des analogies avec l'étude précédente, il ne sera pas question de tout refaire !
   (a) L'EDLHA à cette équation est toujours $(1+x)y'' - 3y' + (2-x)y = 0$ avec la même solution évidente $y_0(x) = e^{x}$.

(b) Soit $y = zy_0$ une autre solution ; alors, de la même manière, nous arrivons à l'équation différentielle : $z''(1+x) + z'(2x-1) = 0$, puis, en posant $Z = z'$ nous avons donc à résoudre l'équation différentielle, sur l'intervalle $]-\infty;-1[$

$$Z'(1+x) + Z(2x-1) = 0$$

— Nous avons toujours, pour $x \in ]-\infty;-1[$, $\dfrac{Z'}{Z} = \dfrac{-2x+1}{x+1} = -2 + \dfrac{3}{x+1}$, d'où nous tirons :

$$\ln|Z(x)| = -2x + 3\ln|x+1| + K$$

d'où nous tirons

$$Z(x) = C(x+1)^3 e^{-2x} \text{ avec } C \in \mathbb{R}$$

ce qui est équivalent à $z'(x) = C(x+1)^3 e^{-2x}$ avec $C \in \mathbb{R}$

— Pour calculer $z$, nous sommes toujours condamnés à faire plusieurs intégrations par parties et nous avons $z(x) = \lambda e^{-2x}\left(4x^3 + 18x^2 + 30x + 27\right) + \mu$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$, ce qui donne comme solution de l'équation, pour $x < -1$,

$$y(x) = \lambda e^{-x}\left(4x^3 + 18x^2 + 30x + 27\right) + \mu e^x \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } \mu \in \mathbb{R}$$

La solution générale sur $]-\infty;-1[$ est donc :

$$S(x) = \lambda e^{-x}\left(4x^3 + 18x^2 + 30x + 27\right) + \mu e^x + \frac{e^{-x}}{6} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } \mu \in \mathbb{R}$$

3. <u>Existe-t-il une solution sur $\mathbb{R}$ ?</u> Nous avons comme solutions :

$$\begin{cases} \text{Si } x < -1 & S_1(x) = \lambda_1 e^{-x}\left(4x^3 + 18x^2 + 30x + 27\right) + \mu_1 e^x + \dfrac{e^{-x}}{6} \text{ avec } \lambda_1 \in \mathbb{R} \text{ et } \mu_1 \in \mathbb{R} \\ \text{Si } x > -1 & S_2(x) = \lambda_2 e^{-x}\left(4x^3 + 18x^2 + 30x + 27\right) + \mu_2 e^x + \dfrac{e^{-x}}{6} \text{ avec } \lambda_2 \in \mathbb{R} \text{ et } \mu_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Une solution $S$ sur $\mathbb{R}$ sera de classe $\mathcal{C}^2$ ; ici, le problème se posera en $x = -1$. Nous devrons donc avoir :

$$\lim_{\substack{x\to-1\\x<-1}} S_1(x) = \lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}} S_2(x)$$
$$\lim_{\substack{x\to-1\\x<-1}} S_1'(x) = \lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}} S_2'(x)$$
$$\lim_{\substack{x\to-1\\x<-1}} S_1''(x) = \lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}} S_2''(x)$$