9.8 Équations différentielles du second ordre à coefficients constants

Le problème est plus simple si u, v et w sont des constantes; nous résolvons alors une équation du type $Ay'' + By' + Cy = g(x)$,où $A \neq 0$, ou, ce qui est équivalent, $y'' + py' + qy = g(x)$ Nous commencerons par étudier l'EDLHA

$$y'' + py' + qy = 0 \tag{9.12}$$

Il faudra toujours rappeler que $S_{9.12}$, ensemble des solutions de 9.12 est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2

Exemple 12 :

Résolution de cas particuliers

1. $y'' = 0$
2. $y'' + py' = 0$ avec $p \neq 0$

9.8.1 Théorème

Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et $(y_0, y'_0) \in \mathbb{R}^2$
En supposant que (9.12) admette 2 solutions particulières f_1 et f_2 telles que

$$W_{f_1,f_2}(x_0) = \begin{vmatrix} f_1(x_0) & f_2(x_0) \\ f'_1(x_0) & f'_2(x_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

Alors, il existe une unique solution f telle que $\begin{cases} f(x_0) = y_0 \\ f'(x_0) = y'_0 \end{cases}$
$W_{f_1,f_2}(x_0)$ s'appelle le Wronskien de f_1 et de f_2 en x_0

Démonstration

Si f_1 et f_2 sont solutions de (9.12), alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $\mu \in \mathbb{R}$, $\lambda f_1 + \mu f_2$ sont solutions de (**??**), car l'ensemble de ces solutions forment un $\mathbb{K}$-espace vectoriel
Existe-t-il $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{cases} \lambda f_1(x_0)) + \mu f_2(x_0) = y_0 \\ \lambda f_1(x_0)) + \mu f_2(x_0) = y'_0 \end{cases}$$

C'est un système linéaire du premier degré à 2 inconnues λ et μ qui admet des solutions uniques si le déterminant $W_{f_1,f_2}(x_0) = \begin{vmatrix} f_1(x_0) & f_2(x_0) \\ f'_1(x_0) & f'_2(x_0) \end{vmatrix} \neq 0$
λ et μ sont donc uniques et, parconséquent, f est unique.

9.8.2 Recherche d'une solution de 9.12

Pour $r \in \mathbb{R}$, la fonction $f(x) = e^{rx}$ est solution de (9.12) si et seulement si $r^2 + pr + q = 0$
On appelle équation caractéristique de (9.12), l'équation $r^2 + pr + q = 0$

Démonstration

Supposons que la fonction $f(x) = e^{rx}$ soit solution de (9.12)
Il faut alors calculer les dérivées successives de f, puis remplacer. Nous avons :

$$\begin{cases} f(x) = e^{rx} \\ f'(x) = re^{rx} \\ f''(x) = r^2 e^{rx} \end{cases}$$

Donc, en remplaçant y par f dans (9.12), nous obtenons :

$$r^2 e^{rx} + pre^{rx} + qre^{rx} = 0 \Leftrightarrow e^{rx}\left(r^2 + pr + q\right) = 0$$

Comme $e^{rx} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'équation $e^{rx}\left(r^2 + pr + q\right) = 0$ est vérifiée si et seulement si $r^2 + pr + q = 0$

9.8.3 Proposition : cas où $p^2 - 4q = 0$

On considère l'équation 9.12 pour laquelle $p^2 - 4q = 0$

1. L'ensemble des solutions générales de (9.12) est alors

$$S_{(9.12)} = \left\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \text{ telles que } f(x) = (\lambda + \mu x)\, e^{-\frac{p}{2}x} \text{ où } \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } \mu \in \mathbb{R}\right\}$$

2. Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et $(y_0, y_0') \in \mathbb{R}^2$ donnés
   Alors,(9.12) admet une unique solution f telle que

$$\begin{cases} f(x_0) = y_0 \\ f'(x_0) = y_0' \end{cases}$$

   Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (\lambda + \mu x)\, e^{-\frac{p}{2}x}$ où λ et μ sont définis par les conditions initiales.

Démonstration

1. Si $p^2 - 4q = 0$, alors, $\dfrac{-p}{2}$ est la seule solution de l'équation caractéristique $r^2 + pr + q = 0$, et alors, la fonction $f(x) = e^{\frac{-p}{2}x}$ est solution de l'équation (9.12)
2. Toute fonction f, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ peut s'écrire $f(x) = e^{\frac{-p}{2}x} g(x)$; quelles sont les conditions sur g pour que f soit solution de (9.12) ?
   Il suffit alors de calculer les dérivées successives de f pour montrer que f est solution de (9.12) si et seulement si $g"(x) = 0$, c'est à dire si $g(x) = ax + b$; et donc, $f(x) = (ax + b)\, e^{\frac{-p}{2}x}$

Remarque 14 :

1. Ce qui montre que $S_{(9.12)}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, de dimension 2 ; il est engendré par les fonctions numériques, linéairement indépendantes $e^{-\frac{p}{2}x}$ et $xe^{-\frac{p}{2}x}$. Toutes les solutions de 9.12 s'écrivent alors $\lambda e^{-\frac{p}{2}x} + +\mu x e^{-\frac{p}{2}x}$
2. Les conditions initiales données par $\begin{cases} f(x_0) = y_0 \\ f'(x_0) = y_0' \end{cases}$ permetent de définir des λ et des μ particuliers.

Exercice 25 :

Trouver f, telle que f soit solution de l'équation différentielle $y'' - 2y' + y = 0$, avec $\begin{cases} f(0) = 0 \\ f'(0) = 1 \end{cases}$

9.8.4 Proposition : cas où $p^2 - 4q > 0$

On considère l'équation 9.12 pour laquelle $p^2 - 4q > 0$

1. L'ensemble des solutions générales de (9.12) est alors

$$S_{(9.12)} = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \text{ telles que } f(x) = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x} \text{ où } \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } \mu \in \mathbb{R}\}$$

   et où r_1 et r_2 sont les racines du polynôme caractéristique

2. Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et $(y_0, y_0') \in \mathbb{R}^2$ donnés
   Alors,(9.12) admet une unique solution f telle que

$$\begin{cases} f(x_0) = y_0 \\ f'(x_0) = y_0' \end{cases}$$

   Cette solution est définie par : $f(x) = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$ où r_1 et r_2 sont les racines du polynôme caractéristique, et λ et μ définis par les conditions initiales.

Démonstration

1. Une première remarque consiste à dire que, $p^2 - 4q$ étant le discriminant d'une équation du second degré, il existe donc deux solutions distinctes r_1 et r_2
   Les deux fonctions $f_1(x) = e^{r_1 x}$ et $f_2(x) = e^{r_2 x}$ sont solutions de (9.12). De la structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2 de $S_{(9.12)}$, nous déduisons que toutes les solutions de 9.12 sont du type $\lambda e^{-r_1 x} + \mu e^{-r_2 x}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$
2. Le wronskien de f_1 et de f_2 est donné par :

$$W_{f_1, f_2}(x_0) = \begin{vmatrix} f_1(x_0) & f_2(x_0) \\ f_1'(x_0) & f_2'(x_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{r_1 x_0} & e^{r_2 x_0} \\ r_1 e^{r_1 x_0} & r_2 e^{r_2 x_0} \end{vmatrix} = (r_2 - r_1) e^{(r_1 + r_2) x_0}$$

   et nous avons sûrement pour tout $x \in \mathbb{R}$, $W_{f_1, f_2}(x) \neq 0$
   Il existe donc une unique solution f, combinaison linéaire de f_1 et de f_2 telle que $\begin{cases} f(x_0) = y_0 \\ f'(x_0) = y_0' \end{cases}$

Remarque 15 :

1. Le fait que

$$S_{(9.12)} = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \text{ telles que } f(x) = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x} \text{ où } \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } \mu \in \mathbb{R}\}$$

   montre une fois de plus que $S_{(9.12)}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, de dimension 2 ; il est engendré par les fonctions numériques, linéairement indépendantes $e^{r_1 x}$ et $e^{r_2 x}$
2. Les conditions initiales données par $\begin{cases} f(x_0) = y_0 \\ f'(x_0) = y_0' \end{cases}$ définissent donc des λ et des μ particuliers.

Exemple 13 :

Trouver f, solution de l'équation $y" - 5y' + 6y = 0$, telle que : $\begin{cases} f(0) = 0 \\ f'(0) = 1 \end{cases}$

9.8.5 Résolution dans le cas où $p^2 - 4q < 0$ et $p = 0$

Si $p = 0$, alors $-4q < 0$, ce qui veut dire que $q > 0$; on pose alors $q = \omega^2$, avec $\omega \neq 0$ et l'équation différentielle devient

$$y'' = -\omega^2 y \tag{9.13}$$

équation qui modélise la force de rappel des ressorts.

On considère l'équation 9.12 pour laquelle $p^2 - 4q < 0$ et $p = 0$

1. L'ensemble des solutions générales de (9.13) est alors

$$S_{(9.13)} = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \text{ telles que } f(x) = \lambda \cos \omega x + \mu \sin \omega x \text{ où } \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } \mu \in \mathbb{R}\}$$

   où $\omega = \sqrt{q}$

2. Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et $(y_0, y_0') \in \mathbb{R}^2$ donnés
   Alors,(9.13) admet une unique solution f telle que

$$\begin{cases} f(x_0) = y_0 \\ f'(x_0) = y_0' \end{cases}$$

   Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \lambda \cos \omega x + \mu \sin \omega x$ où λ et μ sont définis par les conditions initiales.

Démonstration

1. Les deux fonctions $f_1(x) = \cos \omega x$ et $f_2(x) = \sin \omega x$ sont solutions de (9.13)linéairement indépendantes. De la structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2 de $S_{(9.13)}$, nous déduisons que toutes les solutions de 9.13 sont du type $\lambda \cos \omega x + \mu \sin \omega x$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$
2. Les fonctions trigonométriques $f_1(x) = \cos \omega x$ et $f_2(x) = \sin \omega x$ sont des solutions particulières de (9.13), et

$$W_{f_1, f_2}(x) = \begin{vmatrix} \cos \omega x & \sin \omega x \\ -\omega \sin \omega x & \omega \cos \omega x \end{vmatrix} = \omega$$

   et donc $W_{f_1, f_2}(x) \neq 0$. Il existe donc une combinaison linéaire de f_1 et de f_2 telle que $f(x_0) = y_0$ et $f'(x_0) = y_0'$

Remarque 16 :

En fait, la fonction solution de 9.13 telle que

$$\begin{cases} f(x_0) = y_0 \\ f'(x_0) = y_0' \end{cases}$$

vérifie, pour tout réel $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = y_0 \cos \omega (x - x_0) + \frac{y_0'}{\omega} \sin \omega (x - x_0)$$

Exercice 26 :

Touver des fonctions f vérifiant $f'' + 4f = 0$ et telles que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 2$

9.8.6 Résolution dans le cas où $p \neq 0$

On considère l'équation 9.12 pour laquelle $p^2 - 4q < 0$; alors, l'équation caractéristique $r^2 + pr + q = 0$ admet deux solutions distinctes complexes et conjuguées $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \overline{r_1}$

1. L'ensemble des solutions générales de (9.12) est alors

$$S_{(9.12)} = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \text{ telles que } f(x) = (\lambda \cos \beta x + \mu \sin \beta x) e^{\alpha x} \text{ où } \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } \mu \in \mathbb{R}\}$$

2. Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et $(y_0, y_0') \in \mathbb{R}^2$ donnés
   Alors,(9.12) admet au moins une solution f telle que

$$\begin{cases} f(x_0) = y_0 \\ f'(x_0) = y_0' \end{cases}$$

   Cette solution est définie par : $f(x) = (\lambda \cos \beta x + \mu \sin \beta x) e^{\alpha x}$ où λ et μ définis par les conditions initiales.

Démonstration

1. Soit $f(x) = e^{\alpha x} g(x)$. Quelles sont les conditions sur g pour que f soit solution de (9.12) ? En faisant les divers calculs, on montre que f est solution si et seulement si :

$$g''(x) + (2\alpha + p) g'(x) + \left(\alpha^2 + p\alpha + q\right) g(x) = 0$$

2. Nous avons $\beta \neq 0$, car les racines sont complexes et non réelles ; d'autre part, $(\alpha + i\beta)$ étant racine de $r^2 + pr + q = 0$, nous avons $(\alpha + i\beta)^2 + (\alpha + i\beta) r + q = 0$, ce qui est équivalent à :

$$\begin{cases} \beta^2 = \alpha^2 + p\alpha + q \\ \beta(2\alpha + p) = 0 \end{cases}$$

   Et donc, comme $\beta \neq 0$, nous avons $2\alpha + p = 0$

3. g vérifie donc $g''(x) + \beta^2 g(x) = 0$, et donc $g(x) = \lambda \cos \beta x + \mu \sin \beta x$, d'où on tire

$$f(x) = e^{\alpha x}(\lambda \cos \beta x + \mu \sin \beta x)$$

   Si nous posons $f_1(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x$ et $f_2(x) = e^{\alpha x} \sin \beta x$, alors f_1 et f_2 sont linéairement indépendantes et comme $S_{(9.12)}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, de dimension 2 ; il est engendré par les fonctions numériques, linéairement indépendantes $f_1(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x$ et $f_2(x) = e^{\alpha x} \sin \beta x$. D'autre part, si nous considérons le Wronskien

$$W_{f_1, f_2}(x) = \begin{vmatrix} e^{\alpha x} \cos \beta x & e^{\alpha x} \sin \beta x \\ -\beta e^{\alpha x} \sin \beta x + \alpha e^{\alpha x} \cos \beta x & \beta e^{\alpha x} \cos \beta x + \alpha e^{\alpha x} \sin \beta x \end{vmatrix} = \beta e^{2\alpha x}$$

   Nous avons donc $W_{f_1, f_2}(x) \neq 0$, et le théorème est démontré

Exercice 27 :

Trouver une fonction f vérifiant $y'' + y' + y = 0$ où $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$