9.9 Équations différentielles du second ordre à coefficients constants avec second membre

9.9.1 Cas simple où le second membre est une exponentielle

Résolution de l'équation différentielle du type

$$ay'' + by' + cy = \beta e^{\alpha x}$$

avec $c \neq 0$

Résolution

Pour résoudre une telle équation, nous faisons le changement de variables $y(x) = e^{\alpha x} z(x)$; alors :

$$y'(x) = e^{\alpha x} z'(x) + \alpha e^{\alpha x} z(x) \qquad y''(x) = e^{\alpha x} z''(x) + 2\alpha e^{\alpha x} z'(x) + \alpha^2 e^{\alpha x} z(x)$$

En remplaçant, nous obtenons :

$$a\left(e^{\alpha x} z''(x) + 2\alpha e^{\alpha x} z'(x) + \alpha^2 e^{\alpha x} z(x)\right) + b\left(e^{\alpha x} z'(x) + \alpha e^{\alpha x} z(x)\right) + c e^{\alpha x} z(x) = \beta e^{\alpha x}$$

qui devient donc, après simplification par $e^{\alpha x}$:

$$az'' + (2a\alpha + b) z' + \left(a\alpha^2 + b\alpha + c\right) z = \beta$$

Remarque 17 :

Si $c = 0$, alors l'équation devient : $ay'' + by' = \beta e^{\alpha x}$ et y' devient solution d'une équation du premier ordre.

Exemple 14 :

Résoudre l'équation différentielle

$$y'' - 5y' + 6y = e^{2x}$$

1. On commence donc par faire le changement de variables $y(x) = e^{2x} z(x)$; alors :

$$\begin{aligned} y'(x) &= 2e^{2x} z(x) + e^{2x} z'(x) \\ y''(x) &= 4e^{2x} z(x) + e^{2x} z'(x) \end{aligned}$$

   Et en remplaçant dans l'équation initiale, nous obtenons :

$$e^{2x} z'' - e^{2x} z' = e^{2x} \Longleftrightarrow z'' - z' = 1$$

2. Une solution particulière de l'équation $z'' - z' = 1$ [4] est donnée par $z_0(x) = -x$. L'EDLHA est $z'' - z' = 0$ dont l'équation caractéristique est $r^2 - r = 0$ qui admet donc pour solutions particulières $r = 0$ et $r = 1$.
   Les solutions de l' EDLHA sont donc : $z = \lambda e^x + \mu$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$. Les solutions de $z'' - z' = 1$ sont donc

$$z(x) = \lambda e^x + \mu - x$$

   Avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$

3. Les solutions de l'équation $y'' - 5y' + 6y = e^{2x}$ sont donc :

$$y(x) = \lambda e^{3x} + \mu e^{2x} - x e^{2x}$$

   Avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$

4. Une autre méthode de résolution pourrait être de faire le changement de variables $Z = z'$, et nous aurions alors à résoudre l'équation du premier ordre $Z' - Z = 1$, puis à chercher une primitive de Z

9.9.2 Cas simple où le second membre est un polynôme

$\mathbb{R}_n[X]$ est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n

On considère l'équation différentielle du type

$$ay'' + by' + cy = P_n(x)$$

dans laquelle $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ et $c \neq 0$
Alors, il existe à cette équation une unique solution particulière, polynômiale de degré n

Démonstration

Soit

$$\left\{ \begin{array}{rcl} L : \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & L(P) = aP'' + bP' + cP \end{array} \right.$$

L est une application linéaire de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$.

- La linéarité est évidente.
- Quant à la bijection, il suffit de considérer la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ donnée par $\mathcal{B}_0 = \{e_0, e_1, \cdots, e_n\}$ où $e_k(X) = X^k$. Alors, pour tout $k = 0, \ldots, n$, nous avons

$$L(e_k)(X) = cX^k + bkX^{k-1} + ak(k-1)X^{k-2}$$

C'est à dire :

$$L(e_k) = ce_k + bke_{k-1} + ak(k-1)e_{k-2}$$

La matrice de L dans la base $\mathcal{B}_0$ est alors donnée par :

$$\mathcal{M}(L)_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} c & b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & \cdots & \vdots & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & \vdots & b(n-1) & an(n-1) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & c & bn \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

C'est une matrice triangulaire supérieure, d'ordre $n+1$ dont le déterminant est $\det \mathcal{M}(L)_{\mathcal{B}_0} = c^{n+1}$; comme $c \neq 0$, alors $\det \mathcal{M}(L)_{\mathcal{B}_0} \neq 0$ et L est bien un isomorphisme

Il existe donc un seul polynôme P de degré n tel que $aP'' + bP' + cP = P_n$

Remarque 18 :

1. A nouveau, si $c = 0$, alors l'équation devient : $ay'' + by' = P_n(x)$ et y' devient solution d'une équation du premier ordre.
2. La recherche de la solution particulière de l'équation différentielle se fait en prenant un polynôme de degré n et en utilisant une méthode d'indentification.

Exemple 15 :

Résoudre l'équation différentielle $y'' + 5y' + 6y = 6x^2 + 4x + 3$

1. D'après le théorème précédent, il existe une unique solution polynômiale de degré 2. Soit $y_0(x) = ax^2 + bx + c$ cette solution ; alors : $y_0'(x) = 2ax + b$ et $y_0''(x) = 2a$ et, en remplaçant, nous obtenons :

$$2a + 5(2ax + b) + 6\left(ax^2 + bx + c\right) = 6x^2 + 4x + 3$$

En développant, et en regroupant, nous obtenons :

$$6ax^2 + (10a + 6b)x + (2a + 5b + 6c) = 6x^2 + 4x + 3$$

En identifiant, nous obtenons le système :

$$\begin{cases} 6a = & 6 \\ 10a + 6b = & 4 \\ 2a + 5b + 6c = & 3 \end{cases}$$

En résolvant, nous trouvons $a = 1 \quad b = -1 \quad c = 1$. La solution particulière est donc

$$y_0(x) = x^2 - x + 1$$

2. On résoud, maintenant, l'équation différentielle linéaire homogène associée $y'' + 5y' + 6y = 0$ dont l'équation caractéristique est $r^2 + 5r + 6 = 0$.
   La solution générale de cette équation différentielle est simple ; elle est donnée par :

   $$y_h(x) = \lambda e^{-2x} + \mu e^{-3x}$$

   où $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$
3. La solution générale de l'équation $y'' + 5y' + 6y = 6x^2 + 4x + 3$ est donnée par :

   $$y(x) = \lambda e^{-2x} + \mu e^{-3x} + x^2 - x + 1$$

   où $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$

Exemple 16 :

Résolution de l'équation différentielle du type

$$ay'' + by' + cy = e^{\alpha x} P_n(x)$$

dans laquelle $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ et $c \neq 0$

Pour résoudre une telle équation, nous faisons le changement de variables $y(x) = e^{\alpha x} z(x)$; alors :

$$y'(x) = e^{\alpha x} z'(x) + \alpha e^{\alpha x} z(x) \qquad y''(x) = e^{\alpha x} z''(x) + 2\alpha e^{\alpha x} z'(x) + \alpha^2 e^{\alpha x} z(x)$$

En remplaçant, nous obtenons :

$$a\left(e^{\alpha x} z''(x) + 2\alpha e^{\alpha x} z'(x) + \alpha^2 e^{\alpha x} z(x)\right) + b\left(e^{\alpha x} z'(x) + \alpha e^{\alpha x} z(x)\right) + ce^{\alpha x} z(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$$

qui devient donc, après simplification par $e^{\alpha x}$:

$$az'' + (2a\alpha + b) z' + \left(a\alpha^2 + b\alpha + c\right) z = P_n(x)$$

Et nous nous retrouvons dans la situation de 9.9.2

Exemple 17 :

Résoudre l'équation différentielle

$$y'' + y' - 2y = e^{2x}(4x + 1)$$

1. On commence donc par faire le changement de variables $y(x) = e^{2x} z(x)$; alors :

   $$\begin{array}{l} y'(x) = 2e^{2x} z(x) + e^{2x} z'(x) \\ y''(x) = 4e^{2x} z(x) + e^{2x} z'(x) \end{array}$$

   Et en remplaçant dans l'équation initiale, nous obtenons :

   $$z'' + 5z' + 4z = 4x + 1$$

2. Une solution particulière de l'équation $z'' + 5z' + 4z = 4x + 1$ est un polynôme du premier degré du type $z(x) = ax + b$; en remplaçant, et en identifiant, nous trouvons comme solution particulière $z_0(x) = x - 1$
3. L'EDLHA est donc $z'' + 5z' + 4z = 0$ dont le polynôme caractéristique est $r^2 + 5r + 4 = 0$ dont les solutions sont -1 et -4. Les solutions de l' EDLHA sont donc : $z(x) = \lambda e^{-x} + \mu e^{-4x}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$. Les solutions de $z'' + 5z' + 4z = 4x + 1$ sont donc
$$z(x) = \lambda e^{-x} + \mu e^{-4x} + (x - 1)$$
Avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$
4. Les solutions de l'équation $y'' + y' - 2y = e^{2x}(4x + 1)$ sont donc :
$$y(x) = \lambda e^{x} + \mu e^{-2x} + e^{2x}(x - 1)$$
Avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$

Exercice 28 :

Soit l'équation différentielle

$$y'' - 4y' + 5y = e^{x}(6x - 4) + 2x^2 - 10x + 12$$

1. Montrer que si f est solution de l'équation $y'' - 4y' + 5y = e^{x}(6x - 4)$ et si g est solution de l'équation $y'' - 4y' + 5y = x^2 - 10x + 12$, alors $f + g$ est solution de $y'' - 4y' + 5y = e^{x}(6x - 4) + 2x^2 - 10x + 12$
2. En déduire toutes les solutions de $y'' - 4y' + 5y = e^{x}(6x - 4) + 2x^2 - 10x + 12$

9.10 Liste d'exercices

9.10.1 Les équations différentielles linéaires à coefficients constants

Exercice 29 :

1. $y'' - 5y' - 6y = 0$
2. $y'' - 4y' + 13y = 0$
3. $y'' - 6y' + 9y = 0$
4. $y'' - 4y' + 2y = 4$

Exercice 30 :

Cas où le second membre est un polynôme, c'est à dire, cas de l'équation $ay'' + by' + cy = P(x)$ où P est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$
On cherche une solution particulière polynômiale, de degré $\deg P$ en identifiant, qu'on ajoute ensuite, à la solution générale de l'EDLHA. Nous somme dans la situation de 9.9.2

1. $y'' - 3y' + 2y = 2x^2 - 5x + 3$
2. $y'' - y = x^2 + 1$
3. $y'' - 4y' + 2y = x^2 - 2x$
4. $y'' + y' = x^2 - 1$
5. $y'' = 8x^3$
6. $y'' - y - 1 = 2x^2$

Exercice 31 :

Résoudre les équations suivantes :

1. $y'' - 5y' + 6y = 3e^{4x}$
2. $y'' + 2y' + 5y = 2e^{3x}$
3. $y'' - 4y' + 4y = 1 + 5e^{2x}$
4. $y'' - 6y' + 9y = 5e^{3x} + 1$
5. $y'' - 2y' + y = \cosh x$

9.10.2 Résolution d'équations à coefficients non constants

Exercice 32 :

On considère l'équation différentielle suivante :

$$(1+x)\,y'' - 2y' + (1-x)\,y = xe^{-x}$$

1. (a) Vérifier que $y_0(x) = e^x$ est solution particulière de l'équation différentielle linéaire associée.
   (b) Soit y une solution quelconque de l'équation différentielle linéaire associée. On pose $y(x) = y_0(x)\,z(x)$. Quelle équation différentielle doit vérifier z ?
   (c) Trouver toutes les fonctions z solutions de l'équation différentielle.
2. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle proposée

Exercice 33 :

On considère l'équation différentielle suivante :

$$x(1+x)\,y'' - y' - 2y = 3x^2$$

1. (a) Trouver une solution particulière de l'équation différentielle linéaire associée du type x^α
   (b) Trouver toutes les solutions de l'équation différentielle linéaire associée
2. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle proposée

Exercice 34 :

1. Rechercher toutes le solutions développables en séries entières au voisinage de 0 de :

$$x(x+1)\,y'' + 3xy' + y = 0$$

2. En rechercher toutes les solutions

9.10.3 Problème

L'objet du problème est de trouver toutes les fonctions f 2 fois dérivables, telles que

$$f''(x) + f(-x) = x + e^{-x} \tag{9.14}$$

On remarquera que ce n'est pas une équation différentielle classique.

1. Résoudre $y'' + y = e^x + e^{-x}$
2. Résoudre $y'' - y = x - \lambda \cos x + \sinh x$
3. Soit f vérifiant 9.14, et $\varphi(x) = f(x) + f(-x)$. Montrer que φ est paire et qu'elle vérifie (1) ; en déduire φ
4. Montrer que si f vérifie (9.14)alors elle vérifie l'équation différentielle (2)
5. En déduire f