9.11 Correction de quelques exercices

Exercice 1 :

1. (a) *A quelle condition le coefficient directeur de la tangente en chaque point est-il proportionnel à l'abscisse de ce point ? Quelles sont les fonctions f qui satisfont cette condition ?*

   Si f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivable, le coefficient directeur de la tangente au graphe d'une fonction numérique est donné par $f'(x)$.
   La proportionnalité du coefficient directeur de la tangente à l'abscisse du point se traduit par $f'(x) = kx$ où $k \in \mathbb{R}$

   C'est une simple recherche de primitive, et nous trouvons, bien entendu, $f'(x) = k\dfrac{x^2}{2} + \lambda$ où $k \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

   (b) *Dans une population $\mathcal{P}$, de n individus, $x(t)$ est le nombre des individus atteints par une maladie contagieuse $\mathcal{M}$ à un moment donné par t*
   La vitesse de propagation de l'épidémie est proportionnelle au nombre des individus atteints et aussi à la différence $n - x(t)$ des individus sains. En considérant x comme fonction d'une variable réelle, traduire les conditions ci-dessus par une condition portant sur la fonction x et sa dérivée

   Si nous désignons par $x'(t)$ la vitesse de propagation de la maladie, l'énoncé nous autorise à écrite :
   $$x'(t) = k_1 x(t) + k_2 (n - x(t)) \text{ avec } k_1 \in \mathbb{R} \text{ et } k_2 \in \mathbb{R}$$
   Cette équation peut encore s'écrire :
   $$x'(t) = \lambda x(t) + \mu n \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } \mu \in \mathbb{R}$$

2. *Donner les fonctions différentes définies sur $\mathbb{R}$ et telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(x)$*

   Il est clair que toutes les fonctions exponentielles vérifient cette équation différentielle. Les fonctions f qui vérifient $f'(x) = f(x)$ sont les fonctions $f(x) = Ce^x$ avec $C \in \mathbb{R}$

3. *Trouver une équation différentielle du premier ordre dont est solution, pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, la fonction exponentielle $x \longmapsto e^{\alpha x}$*

   Si $f(x) = e^{\alpha x}$, alors $f'(x) = \alpha e^{\alpha x}$ et l'équation différentielle vérifiée par f est donnée par $y' = \alpha y$

Exercice 2 :

Donner le problème de Cauchy, vérifié par la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $x \longmapsto m(x - x_0) + y_0$

Très simple ! ! ! $y'(x) = m$ et $y(x_0) = y_0$

Exercice 3 :

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $3y' + 7y = 0$ *et* $y(2) = -7$

   C'est un problème de Cauchy, appliqué aux équations différentielles linéaires.
   Sans difficulté, on démontre que toutes les solutions de l'équation $3y' + 7y = 0$ sont du type $y(x) = Ce^{\frac{-7x}{3}}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

   De l'hypothèse $y(2) = -7$, nous tirons $-7 = Ce^{\frac{-14}{3}}$; d'où $C = -7e^{\frac{14}{3}}$. D'où, nous obtenons comme solutions :
   $$y(x) = 7e^{\frac{14}{3}} \times e^{\frac{-7x}{3}} \Longleftrightarrow y(x) = 7e^{\frac{-7}{3}(x-2)}$$

2. $y" + 4y' = 0$ *et* $y(0) = 8$

   C'est une équation du second ordre ! ! *(Il y a des dérivées secondes qui apparaissent)*. Alors, comment s'en sortir ?

Nous faisons le changement de variables $z = y'$, de telle sorte que nous avons :

$$y" + 4y' = 0 \Longleftrightarrow z' + 4z = 0$$

D'où nous tirons comme solution $z = Ce^{-4x}$ avec $C \in \mathbb{R}$, et comme $y' = Ce^{-4x}$, nous obtenons $y = \dfrac{-C}{4}e^{-4x} + \mu$ avec $C \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$.

Nous pouvons avoir une solution plus générale en écrivant :

$$y = \lambda e^{-4x} + \mu \text{ où } \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } \mu \in \mathbb{R}$$

La condition initiale $y(0) = 8$ se traduit par $\lambda + \mu = 8$ et donc $\mu = 8 - \lambda$; d'où la solution proposée est donc :

$$y(x) = \lambda e^{-4x} + 8 - \lambda \Longleftrightarrow y(x) = \lambda\left(e^{-4x} - 1\right) + 8 \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

3. $y" - 9y' = 0$ *et* $y(0) = 1$ *et* $y'(0) = 2$

   Cette équation est du même tonneau que celle que nous avons ci-dessus, et la métode de résolution est la même.

   Nous arrivons à la solution générale $y = \lambda e^{9x} + \mu$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$

   Les conditions initiales nous donnent :

$$\left\{\begin{array}{rl} \lambda + \mu = & 1 \\ 9\lambda = & 2 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \lambda = \frac{2}{9} \text{ et } \mu = \frac{7}{9}$$

   La solution de ce problème de Cauchy est donc :

$$y(x) = \frac{2e^{9x} + 7}{9}$$

4. $xy' - 2y = 0$ *et* $y(0) = 1$

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $x \times y'(x) - 2y(x) = 0$, et en particulier, pour $x = 0$

$$0 \times y'(0) - 2y(0) = 0 \Longrightarrow y(0) = 0$$

   Le problème de Cauchy proposé n'a donc pas de solution

5. $y' + |x|\, y = 0$ *et* $y(0) = 1$

   Voici une question plus compliquée et qui mérite réflexion !!

   - **Nous allons étudier la solution générale de cette équation sur l'intervalle** $]0; +\infty[$

     L'équation devient alors $y' + xy = 0$. Nous avons :

$$\begin{aligned} y' + xy = 0 \Longleftrightarrow & \quad \frac{y'}{y} = -x \\ \Longleftrightarrow & \quad \int \frac{y'}{y}\,\mathrm{d}x = -\int x\,\mathrm{d}x \\ \Longleftrightarrow & \quad \ln|y(x)| = -\frac{x^2}{2} + K \end{aligned}$$

     D'où nous obtenons, sur $\mathbb{R}^{*+}$ $y(x) = C_1 e^{\frac{-x^2}{2}}$ avec $C_1 \in \mathbb{R}$

   - **Nous allons étudier la solution générale de cette équation sur l'intervalle** $]-\infty; 0[$

     L'équation devient alors $y' - xy = 0$. Nous avons :

$$\begin{aligned} y' - xy = 0 \Longleftrightarrow & \quad \frac{y'}{y} = x \\ \Longleftrightarrow & \quad \int \frac{y'}{y}\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}x \\ \Longleftrightarrow & \quad \ln|y(x)| = \frac{x^2}{2} + K \end{aligned}$$

     D'où nous obtenons, sur $\mathbb{R}^{*-}$ $y(x) = C_2 e^{\frac{x^2}{2}}$ avec $C_2 \in \mathbb{R}$

▷ La question suivante est en fait celle qui pose la question de l'existence d'une solution continue et dérivable en $x_0 = 0$ en particulier et sur $\mathbb{R}$ en général.

Dans un premier temps, nous avons $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} C_1 e^{\frac{-x^2}{2}} = C_1$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} C_2 e^{\frac{x^2}{2}} = C_2$, et le prolongement par continuité nous impose de poser $C_1 = C_2$. Ainsi, la fonction

$$y(x) = \begin{cases} Ce^{\frac{-x^2}{2}} & \text{si } x \geqslant 0 \\ Ce^{\frac{x^2}{2}} & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases} \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

est-elle continue sur $\mathbb{R}$ et est telle que $y(0) = C$

Est-elle dérivable en O ? Pour le démontrer, nous allons utiliser le théorème de prolongement de la dérivée 5.3.15

- ⋆ Sur $\mathbb{R}^{*-}$, la fonction dérivée est donnée par $y'(x) = Cxe^{\frac{x^2}{2}}$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} Cxe^{\frac{x^2}{2}} = 0$
- ⋆ De même, sur $\mathbb{R}^{*+}$, la fonction dérivée est donnée par $y'(x) = -Cxe^{\frac{-x^2}{2}}$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} -Cxe^{\frac{-x^2}{2}} = 0$

La fonction $y(x)$ est donc continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, et cette solution est la seule sur $\mathbb{R}$

Pour que nous répondions au problème de Cauchy, nous devons avoir $y(0) = 1$, nous devons avoir $C = 1$.

Ainsi, la solution au problème de Cauchy est donnée par :

$$y(x) = \begin{cases} e^{\frac{-x^2}{2}} & \text{si } x \geqslant 0 \\ e^{\frac{x^2}{2}} & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

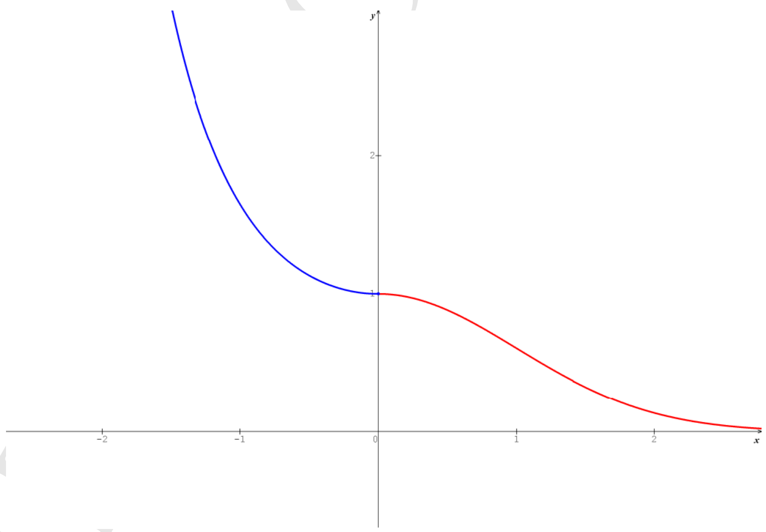

FIGURE 9.4 – Le graphe de la solution

Exercice 6 :

Intégrer les équations différentielles à variables séparables suivantes :

1. $y' = 4e^{x+y}$

Nous avons : $y' = 4e^{x+y} \Longleftrightarrow y'e^{-y} = 4e^x$

Et donc, en passant à la recherche de primitives :

$$\int y'(x)\,e^{-y(x)}\,\mathrm{d}x = 4\int e^x\,\mathrm{d}x \iff -e^{-y(x)} = 4e^x + k \text{ avec } k \in \mathbb{R}$$

De là, nous déduisons $e^{-y(x)} = k - 4e^x$ et donc $y(x) = -\ln(k - 4e^x)$ avec $k \in \mathbb{R}$

En poussant un peu notre étude, nous pouvons remarquer que si $k \leqslant 0$, alors $\ln(k - 4e^x)$ n'est pas définie. Nous devons donc avoir $k > 0$

2. $y' \tan x = y$

Honnêtement, il n'y a pas grand chose à en dire

- ▷ La fonction nulle $\mathcal{O}$ est bien solution de cette équation
- ▷ Supposons y différente de la fonction nulle ; alors :

$$y' \tan x = y \iff \frac{y'}{y} = \frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x}$$

En passant à l'intégrale, :

$$\int \frac{y'(x)}{y(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x \iff \ln|y(x)| = \ln|\sin x| + K$$

D'où nous trouvons $y(x) = C\sin x$ avec $C \in \mathbb{R}$

- ▷ La fonction nulle est incluse dans la solution générale $y(x) = C\sin x$ lorsque la constante $C = 0$

3. $y' = \sqrt{1 - y^2}$

- ▷ Il est clair que la fonction constante et égale à 1, c'est à dire telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y(x) = 1$ est bien solution de l'équation.
- ▷ Supposons, maintenant que y soit différente de la fonction constante égale à 1.

Nous avons, bien sûr $y' = \sqrt{1 - y^2} \iff \dfrac{y'}{\sqrt{1 - y^2}} = 1$, et donc, en passant à l'intégration :

$$\int \frac{y'(x)}{\sqrt{1 - y^2(x)}}\,\mathrm{d}x = \int 1\,\mathrm{d}x \iff \arcsin y(x) = x + K \text{ avec } K \in \mathbb{R}$$

D'où, nous avons $y(x) = \sin(x + K)$ avec $K \in \mathbb{R}$

- ▷ Les solutions de cette équation sont donc $y(x) = \sin(x + K)$ avec $K \in \mathbb{R}$ ou $y(x) = 1$

4. $xy' + y^2 = 0$

- ▷ Il est clair que la fonction nulle est solution de cette équation
- ▷ Supposons que y ne soit pas la fonction nulle.
  - → Supposons $x > 0$; alors :

$$xy' + y^2 = 0 \iff xy' = -y^2 \iff \frac{-y'}{y^2} = \frac{1}{x}$$

En passant à l'intégrale, nous obtenons :

$$\int \frac{-y'(x)}{y^2(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \iff \frac{1}{y(x)} = \ln x + k_1 \text{ avec } k_1 \in \mathbb{R}$$

Ainsi, la solution sur l'intervalle $]0; +\infty[$ est $y(x) = \dfrac{1}{\ln x + k_1}$ avec $k_1 \in \mathbb{R}$

  - → Supposons $x < 0$; alors, nous avons toujours :

$$xy' + y^2 = 0 \iff xy' = -y^2 \iff \frac{-y'}{y^2} = \frac{1}{x}$$

En passant à l'intégrale, nous obtenons :

$$\int \frac{-y'(x)}{y^2(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \iff \frac{1}{y(x)} = \ln|x| + k_2 \text{ avec } k_2 \in \mathbb{R}$$

Ainsi, la solution sur l'intervalle $]-\infty; 0[$ est $y(x) = \dfrac{1}{\ln|x| + k_2}$ avec $k_2 \in \mathbb{R}$

▷ Existe-t-il une fonction sur $\mathbb{R}$ en entier ?

En fait, la question est : existe-t-il une autre fonction que la fonction nulle qui soit solution sur $\mathbb{R}$.

→ Tout d'abord, de l'équation $xy' + y^2 = 0$, nous tirons $y^2(0) = 0$, c'est à dire $y(0) = 0$

→ Ensuite $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \dfrac{1}{\ln x + k_1} = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \dfrac{1}{\ln x + k_2} = 0$ et donc la fonction :

$$Y(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\ln x + k_1} \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \\ \dfrac{1}{\ln |x| + k_2} \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}^*$

→ Est-elle dérivable en 0 ?

Si nous calculons la dérivée de Y sur $]0; +\infty[$, nous obtenons $Y'(x) = \dfrac{-1}{x(\ln x + k_1)^2}$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} Y'(x) = -\infty$

Y n'est donc pas dérivable en 0

En dehors de la fonction nulle, il n'existe pas de solution sur $\mathbb{R}$ en entier

Les solutions à cette équation sont donc du type $y(x) = \dfrac{1}{\ln x + k_1}$ avec $k_1 \in \mathbb{R}$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$ et $y(x) = \dfrac{1}{\ln |x| + k_2}$ avec $k_2 \in \mathbb{R}$ sur l'intervalle $]-\infty; 0[$ et $y(x) = 0$

Exercice 7 :

Intégrer l'équation différentielle $(x^2 - x)\, y' = y^2 + y$; montrer qu'il existe plus d'une solution valant 0 pour $x = 1$

▷ Tout dabord, nous avons $(x^2 - x)\, y' = y^2 + y \iff x(x-1)\, y' = y^2 + y$, et, de là, nous pouvons dire que :

$$y(0) = 0 \text{ ou } y(0) = -1 \text{ tout comme } y(1) = 0 \text{ ou } y(1) = -1$$

▷ Supposons $x > 1$

Alors :

$$x(x-1)\, y' = y^2 + y \iff \frac{y'}{y^2 + y} = \frac{1}{x(x-1)}$$

Et, en passant à l'intgration, nous obtenons :

$$\int \frac{y'(x)}{y^2(x) + y(x)}\, \mathrm{d}x = \int \frac{1}{x(x-1)}\, \mathrm{d}x$$

⇒ En décomposant en éléments simples, nous avons :

⋆ $\dfrac{y'(x)}{y^2(x) + y(x)} = \dfrac{y'(x)}{y(x)} - \dfrac{y'(x)}{y(x)+1}$, et donc :

$$\int \frac{y'(x)}{y^2(x) + y(x)}\, \mathrm{d}x = \int \frac{y'(x)}{y(x)}\, \mathrm{d}x - \int \frac{y'(x)}{y(x)+1}\, \mathrm{d}x = \ln |y(x)| - \ln |y(x) + 1| = \ln \left| \frac{y(x)}{y(x)+1} \right|$$

⋆ De même, $\dfrac{1}{x(x-1)} = \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x}$ et donc :

$$\int \frac{1}{x(x-1)}\, \mathrm{d}x = \int \frac{1}{x-1}\, \mathrm{d}x - \int \frac{1}{x}\, \mathrm{d}x = \ln(x-1) - \ln x + K = \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) + K = \text{ avec } K \in \mathbb{R}$$

⇒ Nous obtenons donc $\ln \left| \dfrac{y(x)}{y(x)+1} \right| = \ln\left(1 - \dfrac{1}{x}\right) + K \iff \left| \dfrac{y(x)}{y(x)+1} \right| = C\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)$ avec $C > 0$

Nous obtenons donc $\dfrac{y(x)}{y(x)+1} = \dfrac{Cx}{x-1}$ avec $C \in \mathbb{R}$ d'où nous tirons $y(x) = \dfrac{Cx}{(C-1)x-1}$ où $C \in \mathbb{R}$

Ainsi, sur l'intervalle $]+1;+\infty[$, l'ensemble des solutions sont du type $y(x) = \dfrac{Cx}{(C-1)x-1}$ où $C \in \mathbb{R}$