Chapitre 1

Les suites numériques

Dans ce chapitre, nous revoyons et approfondissons les suites numériques. Nous nous intéresserons indifféremment aux suites réelles ou complexes. Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

1.1 Premières Définitions et premières propriétés

1.1.1 Définition

Soit E un ensemble quelconque.
On appelle suite d'éléments de E, une application f de $I \subset \mathbb{N}$ dans E

$$\begin{cases} f : I & \xrightarrow{f} & E \\ \quad n & \xmapsto{f} & f(n) \end{cases}$$

Remarque 1 :

Sans revenir aux définitions de base vues en L_0, nous rappelons quelques notions

1. I peut être un ensemble fini ou infini.
   - Si I est un ensemble fini, **la suite est dite finie**.
   - Si I est un ensemble infini, la suite est dite infinie
2. Nous utiliserons toujours la notation indicielle :
   - $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne la suite
   - u_n désigne le terme d'indice n *(c'est l'image de l'entier n par la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$)*
3. E peut être n'importe quel ensemble ; par exemple, $E = \mathbb{C}$ où $\mathbb{C}$ est l'ensemble des nombres complexes ou bien E un ensemble d'applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$

   Exemple :
   Les suites de fonctions

   - $f_n(x) = x + e^{-nx}$
   - $g_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^n}$
   - $h_n(x) = \dfrac{x^n}{n!}$

   Les suites de fonctions seront étudiées dans un chapitre ultérieur
4. Si $E = \mathbb{K}$, on parle alors de **suites numériques**. L'ensemble des suites numériques est noté $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$

1.1.2 Notion de suite extraite

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique. On appelle suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = u_{g(n)}$ avec g fonction strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$

Exemple 1 :

L'exemple le plus classique de suite extraite est la suite des termes de rang pair ou des termes de rang impair : étant donnée une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, nous avons :

— $w_n = u_{2n}$

— $v_n = u_{2n+1}$

Remarque 2 :

Toute application strictement croissante $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g(n) \geqslant n$

Une application strictement croissante $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est telle que, pour tout $n_1 \in \mathbb{N}$ et tout $n_2 \in \mathbb{N}$,

$$n_1 > n_2 \Longrightarrow g(n_1) > g(n_2)$$

Montrons que si $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est une application croissante, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g(n) \geqslant n$

Nous faisons cette démonstration par récurrence

- Elle est vraie pour $n = 0$, puisque comme $g(0) \in \mathbb{N}$, nous avons forcément $g(0) \geqslant 0$
- Supposons que nous ayions, au rang n, $g(n) \geqslant n$
- Démontrons que nous avons $g(n+1) \geqslant n+1$
  Comme g est strictement croissante, nous avons $g(n+1) > g(n)$; de l'hypothèse de récurrence, par transitivité de la relation d'ordre, nous avons $g(n+1) > n$, c'est à dire $g(n+1) \geqslant n+1$

Ce que nous voulions

Exercice 1 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$; démontrer que toute suite extraite de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

1.1.3 Définition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique et $l \in \mathbb{K}$
On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l, si, à tout nombre $\varepsilon > 0$, on peut associer un entier N_ε tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $n \geqslant N_\varepsilon \Longrightarrow |u_n - l| \leqslant \varepsilon$
On écrit alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$

Remarque 3 :

On dit aussi que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente ou u'elle admet comme limite l.

1.1.4 Théorème : unicité de la limite

Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite, alors, cette limite est unique

Démonstration

Supposons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admettent 2 limites l_1 et l_2 telles que $l_1 \neq l_2$.

FIGURE 1.1 – Une visualisation de l'unicité de la limite

Posons $\varepsilon = \dfrac{|l_1 - l_2|}{4}$; nous avons bien $\varepsilon > 0$

▷ **On écrit, dans un premier temps que $\lim_{n\to+\infty} u_n = l_1$**

Il existe donc $N_1 \in \mathbb{N}$, tel que si $n \geqslant N_1$, alors $|u_n - l_1| \leqslant \varepsilon$

▷ **On écrit, dans un second temps que $\lim_{n\to+\infty} u_n = l_2$**

Il existe donc $N_2 \in \mathbb{N}$, tel que si $n \geqslant N_2$, alors $|u_n - l_2| \leqslant \varepsilon$

▷ **Faisons la synthèse :**

$$|l_1 - l_2| = |l_1 - u_n + u_n - l_2| \leqslant |l_1 - u_n| + |u_n - l_2|$$

On appelle $N = \max\{N_1, N_2\}$. Si $n \geqslant N$ alors $n \geqslant N_1$ et $n \geqslant N_2$ et donc, $|u_n - l_1| \leqslant \varepsilon$ et $|u_n - l_2| \leqslant \varepsilon$

Donc, si $n \geqslant N$

$$|l_1 - l_2| \leqslant |l_1 - u_n| + |u_n - l_2| \leqslant 2\varepsilon = 2 \times \frac{|l_1 - l_2|}{4} = \frac{|l_1 - l_2|}{2}$$

Comme $|l_1 - l_2| \leqslant \dfrac{|l_1 - l_2|}{2}$ est impossible, l'hypothèse $l_1 \neq l_2$ est impossible.

Donc, $l_1 = l_2$ et la limite est donc unique.

Exemple 2 :

1. La suite $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite qui tend vers zéro

   Pas très difficile ! !

   Soit $\varepsilon > 0$. pour que $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$, nous devons avoir $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$.

   Ainsi, en choisissant $N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, alors, si $n \geqslant N$, alors $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$.

   En effet,
   $$n \geqslant N \Longrightarrow n \geqslant \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 \Longrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$$

2. La suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite qui n'admet aucune limite

   Soit $l \in \mathbb{R}$ une limite possible de la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Alors $|l - u_n| = |1 - 1|$ ou $|l - u_n| = |1 + 1|$

   Soit $A = \max\{|1 - 1|, |1 + 1|\}$ et $\varepsilon = \dfrac{A}{2}$. Alors, pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > N$ et $|l - u_n| > \varepsilon$

   Ainsi, pour tout $l \in \mathbb{R}$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > N$ et $|l - u_n| > \varepsilon$.

   Ce qui est la négation de la définition de suite qui admet une limite. Donc, la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite qui n'admet aucune limite

3. La suite $\left(\dfrac{n+1}{2n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite qui admet pour limite $\dfrac{1}{2}$

   Soit $\varepsilon > 0$

   Il faut montrer qu'il est possible de majorer $\left|\dfrac{n+1}{2n+1} - \dfrac{1}{2}\right|$ par ε, à partir d'un certain rang.

   Or :
   $$\left|\frac{n+1}{2n+1} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{1}{2(2n+1)}\right| = \frac{1}{2(2n+1)}$$

   Or, $\dfrac{1}{2(2n+1)} < \dfrac{1}{n}$, et la démonstration est facile à terminer

Exercice 2 :

Terminer la démonstration de $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n+1}{2n+1} = \dfrac{1}{2}$

1.1.5 Proposition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique qui admet une limite $l \in \mathbb{K}$. Alors, toute suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l

Démonstration

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers $l \in \mathbb{K}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite extraite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{g(n)}$ avec g fonction croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$
Ecrivons que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$. Soit donc $\varepsilon > 0$.
Il existe donc un entier $N \in \mathbb{N}$, tel que si $n \geqslant N$, alors $|u_n - l| < \varepsilon$.
g étant une fonction croissante, nous avons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g(n) \geqslant n$. Donc, si $n \geqslant N$, alors $g(n) \geqslant N$, et donc, si $n \geqslant N$, alors $\left|u_{g(n)} - l\right| < \varepsilon$, c'est à dire $|v_n - l| < \varepsilon$.
Nous venons de montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$

Remarque 4 :

La réciproque est fausse
Pour le voir, il suffit de penser à la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui n'est pas convergente, alors que la suite extraite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} = 1$ est convergente.
On peut donc avoir des suites extraites convergentes, alors que la suite globale ne l'est pas.

Exercice 3 :

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique telle que les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ soient convergentes. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique telle que les suites extraites $(u_{3n+2})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{4n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{5n+3})_{n\in\mathbb{N}}$ soient convergentes.La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?
3. **Généralisation :** soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique, $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}$, 2 entiers premiers entre eux.
   On suppose que :
   — La suite $(u_{bn})_{n\in\mathbb{N}}$ extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge
   — Pour tout entier $r \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant r < a$, la suite $(u_{an+r})_{n\in\mathbb{N}}$ extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite notée l_r
   Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge

Exercice 4 :

La suite numérique réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \dfrac{1}{n} + (-1)^n$ est-elle convergente ?

1.1.6 Théorème de Césaro

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers l. Alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$v_n = \frac{u_0 + u_1 + \cdots + u_n}{n+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k$$

converge, elle aussi, vers l

Démonstration

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers l et la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$v_n = \frac{u_0 + u_1 + \cdots + u_n}{n+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k$$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ représente la moyenne arithmétique de $u_0, u_1, \cdots, u_n$
Démontrons que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, elle aussi, vers l

1. **Premièrement**

$$\begin{aligned} v_n - l = & \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} u_k - l \\ = & \frac{1}{n+1} \left(\sum_{k=0}^{n} u_k - (n+1)\, l \right) \\ = & \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} (u_k - l) \end{aligned}$$

   Et, en passant aux valeurs absolues :

$$|v_n - l| \leqslant \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} |u_k - l|$$

2. Soit $\varepsilon > 0$
   — Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$, il existe donc $p \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant p$, alors $|u_n - l| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$, et donc, pour $n \geqslant p$, nous avons :

$$\sum_{k=p}^{n} |u_k - l| \leqslant (n - p + 1)\, \frac{\varepsilon}{2} \leqslant (n+1)\, \frac{\varepsilon}{2}$$

   Ainsi, pour $n \geqslant p$, nous avons $\dfrac{1}{n+1} \displaystyle\sum_{k=p}^{n} |u_k - l| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$

   — $\mathbb{R}$ étant archimédien, il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} |u_k - l| \leqslant q \frac{\varepsilon}{2}$

   Donc, pour $n \geqslant \max\{p, q\}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} |u_k - l| \leqslant (n+1)\, \frac{\varepsilon}{2}$

   — Ainsi, pour $n \geqslant \max\{p, q\}$, nous pouvons écrire :

$$|v_n - l| \leqslant \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} |u_k - l| \leqslant \frac{1}{n+1} \left(\sum_{k=0}^{p-1} |u_k - l| + \sum_{k=p}^{n} |u_k - l| \right) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Nous venons de démontrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = l$

Remarque 5 :

Bien entendu, la réciproque est fausse :

Considérons la suite $\left((-1)^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ qui est une suite n'admettant aucune limite.

Soit $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k$ et

$$v_n = \frac{u_0 + u_1 + \cdots + u_n}{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{S_n}{n+1}$$

On peut remarquer que $S_0 = 1$, $S_1 = 0$, $S_2 = 1$ et $S_3 = 0$, et donc, par une récuurence très simple, $S_{2n} = 1$ et $S_{2n+1} = 0$, de telle sorte que $v_{2n} = \dfrac{1}{n+1}$ et $v_{2n+1} = 0$. Donc, $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$, alors que la suite $\left((-1)^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas convergente.

Exemple 3 :

Considérons la suite $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ qui est une suite qui tend vers zéro. Alors, par le théorème de Cesaro 1.1.6 la suite $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{kn}$ tend aussi vers zéro.

En effet,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{kn} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}}{n}$$

Exercice 5 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en moyenne si $v_n = \dfrac{u_0 + u_1 + \cdots + u_n}{n+1}$ admet une limite l. Démontrer qu'une suite périodique converge en moyenne.

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **périodique** s'il existe $t \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+t} = u_n$.
Exemple de suite périodique : la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de période 2
Cet exercice démontre, par un contre exemple, qu'il ne peut y avoir de réciproque au théorème de Césaro.

1.1.7 Définition de suite bornée

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
On dit que cette suite est bornée si l'ensemble : $\{u_n$ avec $n \in \mathbb{N}\}$ est borné
Une définition équivalente est donnée par :

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée } \iff (\exists M_u > 0)\,(\forall n \in \mathbb{N})\,(|u_n| \leqslant M_u)$$

Exemple 4 :

Il est très facile de trouver de suites bornées :

- $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$
- $\left(e^{in\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$
- $(\sin n)_{n\in\mathbb{N}}$

1.1.8 Théorème

Toute suite convergente est bornée

Démonstration

Soit donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui admet pour limite $l \in \mathbb{K}$
Il existe donc un entier $N \in \mathbb{N}$, tel que si $n \geqslant N$, alors $|u_n - l| \leqslant 1$.
Comme $|u_n - l| \leqslant 1 \iff l - 1 \leqslant u_n \leqslant l + 1$, nous avons $|u_n| \leqslant \max\{|l-1|, |l+1|\} \leqslant |l| + 1$
Soit A, le plus grand des nombres $|u_0|, |u_1|, \ldots, |u_{N-1}|, |l|+1$, c'est à dire $A = \max\{|u_0|, |u_1|, \ldots, |u_{N-1}|, |l|+1\}$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $|u_n| \leqslant A$
Ce qui montre que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Remarque 6 :

Et, évidemment, la réciproque est fausse!! Il suffit de prendre la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est une suite bornée non convergente.