1.2 Opérations sur les suites

1.2.1 Définition

On appelle $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{N}$
On définit, dans cet ensemble les opérations suivantes :

1. **Addition** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n + u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
2. **Multiplication** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \times (v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n \times v_n)_{n\in\mathbb{N}}$
3. **Multiplication par un scalaire** **Pour tout** $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Nous admettons que, muni de l'addition et de la multiplication par un scalaire, $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$

1.2.2 Proposition

Soit $\mathcal{B}$ l'ensemble des suites numériques bornées Alors $\mathcal{B}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$

Démonstration

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}$; alors, en réécrivant l'hypothèse :

- ▷ Il existe $M_u > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant M_u$
- ▷ Il existe $M_v > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|v_n| \leqslant M_v$

1. On montre que $\mathcal{B}$ est stable pour l'addition et la multiplication par un scalaire et est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$
   (a) En ce qui concerne l'addition, comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant M_u$ et $|v_n| \leqslant M_v$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après l'inégalité triangulaire,
   $$|u_n + v_n| \leqslant |u_n| + |v_n| \leqslant M_u + M_v$$
   Ce qui montre que l'addition de 2 suites bornées est aussi une suite bornée.
   (b) D'autre part,
   $$(\forall\lambda \in \mathbb{K})\,(|\lambda u_n| = |\lambda|\,|u_n| \leqslant |\lambda|\,M_u)$$
   Ce qui montre que si on multiplie une suite bornée par un scalaire réel, on obtient aussi une suite bornée.

   $\mathcal{B}$ est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$
2. On montre, de plus, que $\mathcal{B}$ est stable par multiplication
   De même :
   $$|u_n v_n| = |u_n|\,|v_n| \leqslant M_u \times M_v$$
   Ce qui montre bien que le produit de 2 suites bornées est une suite bornée, c'est à dire, un élément de $\mathcal{B}$

1.2.3 Théorème : limite de la somme

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 2 suites
Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = u$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = v$. Alors, $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = u + v$

Démonstration

Soit $\varepsilon > 0$

- Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = u$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N_1$, alors $|u_n - u| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$
- De même, de $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = v$, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N_2$, alors $|v_n - v| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$

Posons $N = \max\{N_1, N_2\}$. Alors, pour $n \geqslant N$,

$$|(u_n - v_n) - (u - v)| = |(u_n - u) + (v_n - v)| \leqslant |u_n - u| + |v_n - v| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

On vient donc de montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n + v_n) = u + v$

Remarque 7 :

Ce qui se dit : la limite de la somme est la somme des limites

1.2.4 Théorème : limite du produit

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 2 suites
Supposons que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = u$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = v$. Alors, $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n \times v_n) = uv$

Démonstration

Soit $\varepsilon > 0$
Remarquons tout d'abord que :

$$\begin{aligned} |u_n v_n - uv| = & \ |u_n v_n - uv_n + uv_n - uv| \\ \leqslant & \ |u_n v_n - uv_n| + |uv_n - uv| \\ \leqslant & \ |v_n| \, |u_n - u| + |u| \, |v_n - v| \end{aligned}$$

— $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente donc bornée par $M_v > 0$, c'est à dire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|v_n| \leqslant M_v$
— De la même manière, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente donc bornée par $M_u > 0$, c'est à dire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant M_u$
— Soit $M > 0$ tel que $M \geqslant \max\{M_u, M_v, |u|, |v|\}$
Nous avons donc :

$$|u_n v_n - uv| \leqslant |v_n| \, |u_n - u| + |u| \, |v_n - v| \leqslant M \, |u_n - u| + M \, |v_n - v|$$

— Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = u$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N_1$, alors $|u_n - u| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2M}$
— De même, de $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = v$, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N_2$, alors $|v_n - v| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2M}$

Posons $N = \max\{N_1, N_2\}$. Alors, pour $n \geqslant N$,

$$|u_n v_n - uv| \leqslant M \, |u_n - u| + M \, |v_n - v| \leqslant M \times \frac{\varepsilon}{2M} + M \times \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

On vient donc de montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n v_n) = uv$

Remarque 8 :

1. Ce qui se dit : la limite du produit est le produit des limites
2. Un cas particulier de ce théorème est le suivant :

   Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique et $\lambda \in \mathbb{K}$
   Supposons que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = u$. Alors, $\lim\limits_{n \to +\infty} (\lambda \times u_n) = \lambda \times u$

   C'est l'application de 1.2.4 en prenant la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme étant la suite constante $u_n = \lambda$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

1.2.5 Théorème : limite du quotient

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = u$ avec $u \neq 0$.
Alors :

1. **Il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N$, alors $u_n \neq 0$**
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1}{u}$

Démonstration

1. **Démonstration du premier point**
   Nous allons utiliser l'inégalité triangulaire, à savoir, pour tout $x \in \mathbb{K}$ et tout $y \in \mathbb{K}$:
   $$||x| - |y|| \leqslant |x - y|$$
   Nous avons : $|u_n| = |(u_n - u) + u| \geqslant |u| - |u_n - u|$ et, si $n \geqslant N_1$, alors $-|u_n - u| \geqslant -\dfrac{|u|}{2}$.
   Donc, si $n \geqslant N_1$, alors
   $$|u_n| \geqslant |u| - |u_n - u| \geqslant |u| - \frac{|u|}{2} = \frac{|u|}{2}$$
   Donc, si $n \geqslant N_1$, $u_n \neq 0$
2. **Nous démontrons que** $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1}{u}$
   Soit $\varepsilon > 0$.
   Alors :
   $$\left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{u}\right| = \left|\frac{u_n - u}{u_n \times u}\right| = \frac{|u_n - u|}{|u_n|\,|u|}$$
   Si $n \geqslant N_1$, alors $|u_n| \geqslant \dfrac{|u|}{2}$, c'est à dire $\dfrac{1}{|u_n|} \leqslant \dfrac{2}{|u|}$. Donc, si $n \geqslant N_1$, alors
   $$\left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{u}\right| = \frac{|u_n - u|}{|u_n|\,|u|} \leqslant \frac{2\,|u_n - u|}{|u|^2}$$
   Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = u$, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N_2$, alors $|u_n - u| \leqslant \dfrac{\varepsilon\,|u|^2}{2}$
   Donc, si $n \geqslant \max\{N_1, N_2\}$, alors
   $$\left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{u}\right| \leqslant \frac{2}{|u|^2} \times \frac{\varepsilon\,|u|^2}{2} = \varepsilon$$
   Ce qui termine de montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1}{u}$

1.2.6 Corollaire

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique réelle telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = u$ avec $u \neq 0$.
Alors il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N$, alors $u_n \neq 0$ et u_n est du même signe que u

Démonstration

On suppose donc $u \neq 0$, c'est à dire $|u| > 0$
Il existe donc $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N_1$, alors $|u_n - u| \leqslant \dfrac{|u|}{2}$
Alors, si $n \geqslant N_1$, nous avons
$$|u_n - u| \leqslant \frac{|u|}{2} \iff u - \frac{|u|}{2} \leqslant u_n \leqslant u + \frac{|u|}{2}$$

— Si $u > 0$, l'inégalité $u - \dfrac{|u|}{2} \leqslant u_n \leqslant u + \dfrac{|u|}{2}$ devient $\dfrac{u}{2} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{3u}{2}$.
  Comme $u > 0$, $u_n \geqslant \dfrac{u}{2} > 0$, et donc $u_n \neq 0$

— Maintenant, si $u < 0$, l'inégalité $u - \dfrac{|u|}{2} \leqslant u_n \leqslant u + \dfrac{|u|}{2}$ devient $\dfrac{3u}{2} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{u}{2}$.
  Comme $u < 0$, $u_n \leqslant \dfrac{u}{2} < 0$, et donc $u_n \neq 0$

On vient de montrer que si $u \neq 0$,à partir d'un certain rang, u_n est non nul et de même signe que u.

Remarque 9 :

1. Nous avons aussi, bien entendu, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1}{u}$
2. Nous venons aussi de démontrer que $|u_n| \geqslant \dfrac{|u|}{2}$ à partir d'un certain rang.
3. Nous retrouverons des résultats sur "limites et relations d'ordre" plus loin.

1.2.7 Conséquence

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 2 suites
Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = u$ avec $u \neq 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = v$. Alors, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{v_n}{u_n}\right) = \dfrac{v}{u}$

Démonstration

La démonstration est une conséquence simple de 1.2.4 et 1.2.5

1.2.8 Théorème

Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique complexe, c'est à dire $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$
Nous supposons $z_n = a_n + ib_n$, c'est à dire que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
Soit $z = a + ib$. Alors :

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = z \iff \lim_{n\to+\infty} a_n = a \text{ et } \lim_{n\to+\infty} b_n = b$$

Démonstration

On rappelle que si $z \in \mathbb{C}$ et $z = a + ib$, alors $|a| \leqslant |z|$ et $|b| \leqslant |z|$

1. Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = z$

   Soit $\varepsilon >$
   Il existe alors $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N$, alors $|z_n - z| < \varepsilon$.
   Or, $z_n - z = (a_n - a) + i\,(b_n - b)$, et donc $|a_n - a| \leqslant |z_n - z|$ et $|b_n - b| \leqslant |z_n - z|$.
   Donc, si $n \geqslant N$, alors $|a_n - a| < \varepsilon$ et $|b_n - b| < \varepsilon$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = b$
2. Réciproquement, supposons $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = b$

   D'après 1.2.3 et 1.2.4, nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} ib_n = ib$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n + ib_n = a + ib$, c'est à dire

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = z$$

Remarque 10 :

La démonstration du second point peut se faire différemment :

Réciproquement, supposons $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = b$

Soit $\varepsilon > 0$.

Il existe alors $N_a \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N_a$, alors $|a_n - a| \leqslant \left(\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right)$

De même, il existe alors $N_b \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N_b$, alors $|b_n - b| \leqslant \left(\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right)$

Donc, si $n \geqslant \max\{N_a, N_b\}$, alors $|a_n - a| \leqslant \left(\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right)$ et $|b_n - b| \leqslant \left(\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right)$

Et donc, si $n \geqslant \max\{N_a, N_b\}$, alors :

$$|z_n - z| = \sqrt{(b_n - b)^2 + (b_n - b)^2} \leqslant \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon$$

Nous venons de montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = z$

Exercice 6 :

Dans cet exercice, étudier, en fonction de $x \in \mathbb{K}$, les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{1+n^2x^2}$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1-n^2x^2}{1+n^2x^2}$
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{x^n-1}{x^n+1}\right)^2$

Exercice 7 :

Donnez les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \prod\limits_{k=3}^{n} \dfrac{k^2-1}{k^2+4}$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \prod\limits_{k=2}^{n} \dfrac{k^3-1}{k^3+1}$