1.3 Suites et ordre

ATTENTION !! IL N'EXISTE PAS DANS $\mathbb{C}$ DE RELATION D'ORDRE TOTAL COMPATIBLE AVEC L'ADDITION ET LA MULTIPLICATION. IL FAUDRA DONC, À CHAQUE RÉSULTAT EST TRÈS PRÉCIS SUR LES HYPOTHÈSES.

1.3.1 Un premier théorème de majoration

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique une suite numérique de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique réelle telle que :

- $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$
- **A partir d'un certain rang,** $|v_n| \leqslant u_n$

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

Démonstration

La démonstration est très simple.
Soit $\varepsilon > 0$
Alors, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N_1$, alors $|u_n| < \varepsilon$
De plus, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant N_2$, alors $|v_n| \leqslant u_n$ *(donc, en particulier $u_n \geqslant 0$)*
Donc, pour $n \geqslant \max\{N_1, N_2\}$, nous avons $|v_n| \leqslant u_n \leqslant \varepsilon$
C'est à dire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

Exemple 5 :

1. Le premier exemple est la suite complexe $\left(\dfrac{e^{in\alpha}}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons :

$$\left|\frac{e^{in\alpha}}{n}\right| = \frac{1}{n}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, nous avons donc, dans $\mathbb{C}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e^{in\alpha}}{n} = 0$

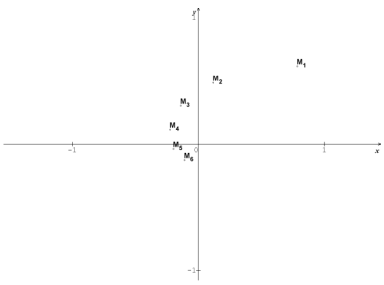

FIGURE 1.2 – Une visualisation de la suite $\left(\dfrac{e^{in\frac{2}{3}}}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$

2. Un autre exemple, vu dans le cours de L_0, est classique :
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = a$ et $u_{n+1} = \sin\left(\dfrac{u_n}{2}\right)$.
De l'inégalité $|\sin x| \leqslant |x|$, on tire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n| = \left|\sin\left(\frac{u_{n-1}}{2}\right)\right| \leqslant \frac{|u_0|}{2^n}$$

Et donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

1.3.2 Théorème des limites par encadrement

Attention!! ce théorème n'est valable que pour **les suites numériques réelles** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, trois suites numériques réelles telles que :

1. **Il existe $p \in \mathbb{N}$, tel que si $n \geqslant p$, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$**
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l$

Alors

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$

Démonstration

Soit $\varepsilon > 0$ et $p \in \mathbb{N}$, tel que si $n \geqslant p$, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$.
Donc, pour $n \geqslant p$, $u_n - l \leqslant v_n - l \leqslant w_n - l$, et donc, pour $n \geqslant p$, nous avons :

$$|v_n - l| \leqslant \max\{|u_n - l|, |w_n - l|\}$$

- Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$, il existe $N_u \in \mathbb{N}$ tel que, si $n \geqslant N_u$, alors $|u_n - l| < \varepsilon$
- De même, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l$, il existe $N_w \in \mathbb{N}$ tel que, si $n \geqslant N_w$, alors $|w_n - l| < \varepsilon$

Ainsi, si $n \geqslant \max\{p, N_u, N_w\}$, alors $|v_n - l| < \varepsilon$
Nous venons donc de montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$

Remarque 11 :

Il existe une appellation non controlée du théorème 1.3.2 ; on l'appelle souvent **le théorème des gendarmes**

Exemple 6 :

Etudions $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{n}{n^2+k}$
Pour tout $k = 1, \cdots, n$, nous avons :

$$\frac{1}{n^2+n} \leqslant \frac{1}{n^2+k} \leqslant \frac{1}{n^2+1}$$

Et donc, en passant à la sommation :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+n} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+1} \iff \frac{n}{n^2+n} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k} \leqslant \frac{n}{n^2+1}$$

Puis, en multipliant par n,

$$\frac{n^2}{n^2+n} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k} \leqslant \frac{n^2}{n^2+1}$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2}{n^2+n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2}{n^2+1} = 1$ et donc, d'après le théorème 1.3.2, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{n}{n^2+k} = 1$

Exercice 8 :

Donner les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{3n+4} \dfrac{1}{\sqrt{n^2+k}}$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{\mathrm{C}_n^k} = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{\binom{n}{k}}$

1.3.3 Théorème

Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ admet une limite l, et si il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, si $n \geqslant N$ alors $u_n \geqslant a$, alors $l \geqslant a$

Démonstration

Nous allons faire une démonstration par l'absurde.
Supposons $l < a$ et soit $\varepsilon > 0$
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$, il existe un entier $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, tel que si $n \geqslant N_\varepsilon$, alors $|u_n - l| < \varepsilon$
En particulier, pour $\varepsilon = \dfrac{a-l}{2}$, si $n \geqslant N_\varepsilon$, alors $\dfrac{-(a-l)}{2} \leqslant u_n - l \leqslant \dfrac{a-l}{2}$, c'est à dire

$$l - \frac{(a-l)}{2} \leqslant u_n \leqslant l + \frac{a-l}{2}$$

c'est à dire : $u_n \leqslant \dfrac{a+l}{2}$
Or, $\dfrac{a+l}{2} < a$, car $l < a$, et $\dfrac{a+l}{2}$ est le milieu de l'intervalle $[l\ a]$
Il y a donc une contradiction avec l'hypothèse $u_n \geqslant a$ et donc $l \geqslant a$

Remarque 12 :

1. Le problème est le même si il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, si $n \geqslant N$ alors $u_n \leqslant a$: si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$, alors $l \leqslant a$
2. Les inégalités strictes ne sont pas conservées ; par exemple : $\dfrac{1}{n} > 0$, mais, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$

1.3.4 Proposition

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 2 suites convergentes.
Si $u_n \geqslant v_n$ à partir d'un certain rang p, alors $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \geqslant \lim\limits_{n\to+\infty} v_n}$

Démonstration

La démonstration de ce théorème est simple : on crée la suite $w_n = u_n - v_n$, alors, $w_n \geqslant 0$ à partir d'un certain rang .
Comme la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, que sa limite est $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$, et que, d'après le théorème 1.3.3 précédent, $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n \geqslant 0$, on a le résultat.

1.3.5 Caractérisation des parties denses de $\mathbb{R}$

Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie de $\mathbb{R}$.
A est dense dans $\mathbb{R}$ <u>si et seulement si</u> tout réel $x \in \mathbb{R}$ est limite d'une suite d'éléments de A

> **Rappel :** A est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$, il existe $a \in A$ tel que $x < a < y$

Démonstration

1. <u>Supposons A dense dans $\mathbb{R}$</u>
   Soit $x \in \mathbb{R}$
   Il faut montrer qu'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = x$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, Comme A est dense dans $\mathbb{R}$, il existe $a \in A$ tel que $a \in \left]x - \frac{1}{n}\ ,\ x + \frac{1}{n}\right[$. On appelle a_n l'un de ces éléments.

On construit ainsi une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de A telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|a_n - x| < \frac{1}{n}$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = x$

Il existe donc bien une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = x$

2. <u>Réciproquement, supposons que tout réel $x \in \mathbb{R}$ est limite d'une suite d'éléments de A</u>

   Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$.

   Il faut montrer qu'il existe $a \in A$ tel que $x < a < y$.

   On considère $X = \frac{x+y}{2}$

   Il existe donc une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = X$.

   Pour $\varepsilon = \frac{|y-X|}{4} = \frac{|y-x|}{4} = \frac{y-x}{4}$, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N_\varepsilon$, alors $|a_n - X| \leqslant \varepsilon$. Or :

$$\begin{aligned} |a_n - X| \leqslant \varepsilon &\iff -\varepsilon + X \leqslant a_n \leqslant \varepsilon + X \\ &\iff -\left(\frac{y-x}{4}\right) + \frac{x+y}{2} \leqslant a_n \leqslant \frac{y-x}{4} + \frac{x+y}{2} \\ &\iff \frac{3x+y}{4} \leqslant a_n \leqslant \frac{x+3y}{4} \end{aligned}$$

   Nous avons $x < \frac{3x+y}{4}$ et $\frac{x+3y}{4} < y$. Donc, si $n \geqslant N_\varepsilon$, alors $x < a_n < y$

   Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$, il existe $a \in A$ tel que $x < a < y$

1.3.6 Corollaire

$\mathbb{Q}$ étant dense dans $\mathbb{R}$, tout nombre réel est limite d'une suite de nombres rationnels

Exemple 7 :

La suite de nombres rationnels (éléments de $\mathbb{Q}$)définie par $u_0 = 5$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)$ converge vers $\sqrt{2}$; or, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$