1.4 Variations des suites

CETTE SECTION NE CONCERNE QUE LES SUITES RÉELLES

1.4.1 Définition de suite croissante

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique réelle de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

1. **On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante si, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $m \in \mathbb{N}$, nous avons**

$$n \geqslant m \Longrightarrow u_n \geqslant u_m$$

2. **On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante si, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $m \in \mathbb{N}$, nous avons**

$$n > m \Longrightarrow u_n > u_m$$

1.4.2 Définition de suite décroissante

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique réelle de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

1. **On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante si, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $m \in \mathbb{N}$, nous avons**

$$n \geqslant m \Longrightarrow u_n \leqslant u_m$$

2. **On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante si, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $m \in \mathbb{N}$, nous avons**

$$n > m \Longrightarrow u_n < u_m$$

Remarque 13 :

1. Une suite est dite **monotone** si elle est croissante ou décroissante
2. De même, une suite est dite **strictement monotone** si elle est strictement croissante ou strictement décroissante
3. Si une suite numérique réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = -u_n$ est décroissante

1.4.3 Caractérisation

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique réelle de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

1. **La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $u_n \leqslant u_{n+1}$**
2. **La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $u_n \geqslant u_{n+1}$**

Exemple 8 :

Soit $a \in \mathbb{R}$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = u_n - u_n^2 \end{cases}$$

Cette suite est décroissante car $u_{n+1} - u_n = -u_n^2 \leqslant 0$, c'est à dire $u_{n+1} \leqslant u_n$

Exercice 9 :

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite croissante. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$v_n = \frac{u_0 + u_1 + \cdots + u_n}{n+1}$$
Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
2. Etudier les variations de la la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie, pour $n \in \mathbb{N}^*$ par : $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{kn}$

Exercice 10 :

Etudier les variations des suites suivantes :

1. $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k}$
2. $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$
3. $w_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2n+2k-1}$

1.4.4 Convergence et monotonie

Toute suite croissante et majorée converge

Démonstration

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite numérique de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, croissante et majorée.
Donc, $\{u_n; n \in \mathbb{N}\}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ non vide et majoré, qui admet donc une borne supérieure M.
Soit donc $M = \sup\{u_n; n \in \mathbb{N}\}$ et soit $\varepsilon > 0$.
Alors, $M - \varepsilon$ n'est pas un majorant de l'ensemble $\{u_n; n \in \mathbb{N}\}$; il existe donc $N_M \in \mathbb{N}$ tel que $M - \varepsilon \leqslant u_{N_M} \leqslant M$.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante, nous avons : $n \geqslant N_M \Longrightarrow M - \varepsilon \leqslant u_{N_M} \leqslant u_n \leqslant M$, donc, $|u_n - M| \leqslant \varepsilon$, c'est à dire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = M$
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc convergente et sa limite est sa borne supérieure.

Remarque 14 :

1. On vient de montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite numérique croissante, alors elle converge vers sa borne supérieure
2. Donc, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite numérique décroissante et minorée, alors, elle converge vers sa borne inférieure
3. Une suite peut etre convergente sans être croissante ou décroissante.

   Exemple : $\dfrac{(-1)^n}{n}$; cette suite converge vers zéro, mais n'est ni croissante, ni décroissante ; elle est, par contre bornée *(majorée et minorée)*, comme toute suite convergente
4. Une suite peut etre bornée *(majorée, entre autres)* sans toutefois être convergente.

   Exemples : $u_n = \sin\dfrac{n\pi}{6}$, $v_n = (-1)^n$,
5. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique croissante. Si elle est convergente, alors elle est bornée.
En prenant la contrapposée, si elle est non bornée, alors elle est divergente.

Exemple 9 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par : $u_0 = 0$, et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n}$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 3. Qu'en déduire ?
   - On montre tout d'abord que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive et majorée par 3.
     Cette démonstration se fait par récurrence.
     On appelle $P(n)$ la propriété : $P(n)$: $\quad 0 \leqslant u_n \leqslant 3$
     - $P(0)$ est évidemment vraie
     - Supposons que $P(n)$ soit vraie
     - Démontrons que $P(n+1)$ est vraie.
       Tout d'abord, comme $u_{n+1} = \sqrt{6+u_n}$, nous avons bien $u_{n+1} \geqslant 0$
       De plus, $u_{n+1} - 3 = \sqrt{6+u_n} - 3 = \dfrac{6 + u_n - 9}{\sqrt{6+u_n}+3} = \dfrac{u_n - 3}{\sqrt{6+u_n}+3}$.
       Comme $u_n \leqslant 3, \dfrac{u_n - 3}{\sqrt{6+u_n}+3} \leqslant 0$, et donc $u_{n+1} \leqslant 3$, et donc $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$

     Nous venons de montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 3$
   - On montre tout d'abord que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante
     Nous faisons donc la différence $u_{n+1} - u_n$.
     $$u_{n+1} - u_n = \sqrt{6+u_n} - u_n = \frac{6 + u_n - u_n^2}{\sqrt{6+u_n}+u_n} = \frac{(2+u_n)(3-u_n)}{\sqrt{6+u_n}+u_n}$$
     Comme $\dfrac{(2+u_n)}{\sqrt{6+u_n}+u_n} > 0$, le signe de $u_{n+1} - u_n$ ne dépend que de celui de $3 - u_n$. Donc,$u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ et la suite est donc croissante
   - $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant une suite coissante et majorée, elle est donc convergente.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3 - u_{n+1} \leqslant \dfrac{3 - u_n}{3}$

   Il suffit de faire les calculs !!
   $3 - u_{n+1} = 3 - \sqrt{6+u_n} = \dfrac{9 - 6 - u_n}{3 + \sqrt{6+u_n}} = \dfrac{3 - u_n}{3 + \sqrt{6+u_n}}$
   Or, $3 \leqslant 3 + \sqrt{6+u_n}$ et donc $\dfrac{3 - u_n}{3 + \sqrt{6+u_n}} \leqslant \dfrac{3 - u_n}{3}$.
   Nous avons donc $3 - u_{n+1} \leqslant \dfrac{3 - u_n}{3}$
3. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

   Il est aisé de démontrer parr écurrence que $0 \leqslant 3 - u_n \leqslant \dfrac{3 - u_0}{3^n}$, et donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} 3 - u_n = 0$

   On en déduit donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$

Exercice 11 :

On considère la suite définie par $U_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$. Démontrer que c'est une suite convergente

1.4.5 Suites adjacentes

1. **Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 2 suites numériques réelles. On dit qu'elles sont adjacentes si :**
   (a) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ **est croissante**
   (b) $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ **est décroissante**
   (c) **Et** $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$
2. **Deux suites adjacentes sont convergentes et admettent la même limite**

Démonstration

1. La suite $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est décroissante

   En effet :
   $$(v_{n+1} - u_{n+1}) - (v_n - u_n) = (v_{n+1} - v_n) - (u_{n+1} - u_n)$$
   — Comme la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est décroissante, alors $v_{n+1} - v_n \leqslant 0$
   — Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est croissante, alors $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$

   Donc $(v_{n+1} - v_n) - (u_{n+1} - u_n) \leqslant 0$ et $(v_{n+1} - u_{n+1}) - (v_n - u_n) \leqslant 0$ et la suite $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est décroissante
2. Comme la suite $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est décroissante et que $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n - u_n \geqslant 0$, et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant 0$
3. Pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $q_i n\mathbb{N}$, nous avons $u_p \leqslant v_q$

   Soient $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}$
   (a) Supposons que $p \leqslant q$. Alors :
   $$u_p \leqslant u_q \leqslant v_q \Longrightarrow u_p \leqslant v_q$$
   (b) Supposons maintenant que $p > q$. Alors :
   $$u_p \leqslant v_p \leqslant v_q \Longrightarrow u_p \leqslant v_q$$
4. Nous avons, en particulier et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_0$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est croissante et majorée ; elle admet donc une limite notée l_u

   De même, nous avons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \geqslant u_0$. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée ; elle admet donc une limite notée l_v
5. Ces deux suites admettent même limite

   Autrement dit, $l_u = l_v$.
   En effet, $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = l_u - l_v$, et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$, nous avons $l_u - l_v = 0$, c'est à dire $l_u = l_v$

Exemple 10 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$. On construit 2 autres suites, extraites de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

— La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $v_n = u_{2n}$ *(la suite des termes de rang pair)*
— La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $v_n = u_{2n+1}$ *(la suite des termes de rang impair)*

Nous allons montrer que ces 2 suites sont adjacentes

1. **Tout d'abord :**
   $$v_{n+1} - v_n = u_{2n+2} - u_{2n} = \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^k}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} = \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+1}$$
   Comme $\dfrac{1}{2n+2} - \dfrac{1}{2n+1} < 0$, nous avons $v_{n+1} - v_n < 0$, c'est à dire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante
2. **De même, la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante**

   En effet :
   $$w_{n+1} - w_n = u_{2(n+1)+1} - u_{2n+1} = u_{2n+3} - u_{2n+1} = \sum_{k=1}^{2n+3} \frac{(-1)^k}{k} - \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k} = \frac{-1}{2n+3} + \frac{1}{2n+2}$$
   Comme $\dfrac{-1}{2n+3} + \dfrac{1}{2n+2} > 0$, nous avons $w_{n+1} - w_n > 0$, c'est à dire que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante

3. **Ensuite** $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - w_n) = 0$
   En effet :
   $$v_n - w_n = u_{2n} - u_{2n+1} = -\frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2n+1}$$
   Et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - w_n) = 0$
4. **Les deux suites** $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ **et** $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ **sont donc adjacentes**
   Leur limite commune est donc l telle que $w_n \leqslant l \leqslant v_n$, c'est à dire :
   $$u_{2n+1} \leqslant l \leqslant u_{2n} \iff u_{2n} - \frac{1}{2n+1} \leqslant l \leqslant u_{2n} \iff -\frac{1}{2n+1} \leqslant l - u_{2n} \leqslant 0$$
   l est aussi la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et une approximation de l à 10^{-2} près est donnée pour $n = 50$ par u_{100}

Remarque 15 :

Il est tout à fait possible d'étudier, en généralisant l'exemple précédent, les suites du type $A_n = \sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k u_k$ où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_k > 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

Exercice 12 :

On considère les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par :

— $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n$

— $v_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n+1)$

Démontrez que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes et leur limite commune γ est telle que $0 \leqslant \gamma - v_n \leqslant \frac{1}{n}$

1.4.6 Limite supérieure, limite inférieure d'une suite bornée

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ **une suite bornée. A partir de cette suite, nous définissons 2 autres suites :**

1. $V_n = \sup\{u_p$ **avec** $p \geqslant n\}$
2. $W_n = \inf\{u_p$ **avec** $p \geqslant n\}$

Alors :

1. **La suite** $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge vers un nombre appelé** $\limsup u_n$ [1]
2. **La suite** $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge vers un nombre appelé** $\liminf u_n$ [2]
3. **Nous avons** $\liminf u_n \leqslant \limsup u_n$
4. **La suite** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **est convergente si et seulement si :** $\liminf u_n = \limsup u_n$**. Et dans ce cas, la limite** l **de la suite est telle que :**
   $$l = \liminf u_n = \limsup u_n$$

1. Ce nombre est appelé **limite supérieure de la suite** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
2. Ce nombre est appelé **limite inférieure de la suite** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Démonstration

Pour $n \in \mathbb{N}$, nous appelons $A_n = \{u_p \text{ tels que } p \geqslant n\}$. Alors :

— La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant bornée, les ensembles A_n sont aussi bornés, et ce, pour tout $n \in \mathbb{N}$; ce qui justifie l'existence de $\sup A_n$ et de $\inf A_n$

— D'autre part, nous avons clairement $A_{n+1} \subset A_n$

1. **La suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante et minorée, donc convergente**
   En effet, comme $A_{n+1} \subset A_n$, pour tout $x \in A_{n+1}$, nous avons $x \in A_n$; en particulier, pour tout $x \in A_{n+1}$, nous avons $x \leqslant \sup A_n$; en particulier $\sup A_{n+1} \leqslant \sup A_n$, c'est à dire $V_{n+1} \leqslant V_n$; la suite est donc décroissante et minorée, donc convergente.
2. **La suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante et majorée, donc convergente**
   En effet, comme $A_{n+1} \subset A_n$, pour tout $x \in A_{n+1}$, nous avons $x \in A_n$; en particulier, pour tout $x \in A_{n+1}$, nous avons $x \geqslant \inf A_n$; en particulier $\inf A_{n+1} \geqslant \inf A_n$, c'est à dire $W_{n+1} \geqslant W_n$; la suite est donc croissante et majorée, donc convergente.
3. **Nous avons** $\liminf u_n \leqslant \limsup u_n$
   En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout $x \in A_n$, nous avons $\inf A_n \leqslant x \leqslant \sup A_n$, c'est à dire $W_n \leqslant x \leqslant V_n$; et donc, en passant à la limite, $\liminf u_n \leqslant \limsup u_n$
4. **Montrons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si et seulement si :** $\liminf u_n = \limsup u_n$
   Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée. Pour $n \in \mathbb{N}$, nous appelons toujours $A_n = \{u_p \text{ tels que } p \geqslant n\}$
   (a) <u>Supposons $\liminf u_n = \limsup u_n$</u>
   On appelle toujours $V_n = \sup A_n$ et $W_n = \inf A_n$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n \leqslant u_n \leqslant V_n$
   Comme les suites $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes et ont même limite, d'après le théorème 1.3.2 dit des gendarmes, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \lim\limits_{n\to+\infty} W_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$
   (b) <u>Réciproquement, supposons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge</u>
   On appelle $l = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. Soit $\varepsilon >$
   Il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, tel que si $n \geqslant N_\varepsilon$, alors $|u_n - l| < \varepsilon$, c'est à dire tel que $l - \varepsilon < u_n < l + \varepsilon$
   Pour $n \geqslant N_\varepsilon$, nous avons $A_n \subset A_{N_\varepsilon}$, et, pour tout $p \geqslant n$, $u_p \in A_n$ et $l - \varepsilon < u_p < l + \varepsilon$.
   Nous avons, en particulier, pour $n \geqslant N_\varepsilon$, $l - \varepsilon < \inf A_n < l + \varepsilon$ et $l - \varepsilon < \sup A_n < l + \varepsilon$, ou encore, écrit autrement, $l - \varepsilon < V_n < l + \varepsilon$ et $l - \varepsilon < W_n < l + \varepsilon$, ce qui traduit bien que les suites $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes et ont même limite l.
   Ainsi, si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que $l = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$, alors $\liminf u_n = \limsup u_n = l$

Remarque 16 :

1. En fait,en référence à 1.4.4 nous avons :
   ▷ $\limsup u_n = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} (\sup \{u_p \text{ avec } p \geqslant n\})$
   ▷ $\liminf u_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} (\inf \{u_p \text{ avec } p \geqslant n\})$
2. D'autre part, et bien évidemment, $\liminf u_n \leqslant \limsup u_n$

Exemple 11 :

1. L'exemple classique est celui de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $u_n = (-1)^n$. Bien sûr, $\limsup u_n = +1$ et $\liminf u_n = -1$
2. Moins classique est celui de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ où $u_n = (-1)^n \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$
   ▷ C'est une suite bornée : $\left|(-1)^n \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)\right| = 1 + \dfrac{1}{n} \leqslant 2$
   ▷ C'est une suite qui n'admet pas de limite :
   — La suite des termes de rang pair donnée par $u_{2n} = 1 + \dfrac{1}{2n}$ admet pour limite 1

— La suite des termes de rang impair donnée par $u_{2n} = -1 - \dfrac{1}{2n+1}$ admet pour limite -1

▷ En posant $A_n = \{u_p \text{ tels que } p \geqslant n\} = \left\{(-1)^p \left(1 + \dfrac{1}{p}\right) \text{ tels que } p \geqslant n\right\}$

— En posant $V_n = \sup A_n$, nous avons $V_{2n} = 1 + \dfrac{1}{2n}$ et $V_{2n+1} = 1 + \dfrac{1}{2n+2}$ [3]. Nous avons, bien entendu, $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = 1$, c'est à dire $\limsup u_n = +1$

— En posant $W_n = \inf A_n$, nous avons $W_{2n} = -1 - \dfrac{1}{2n+1}$ et $V_{2n+1} = -1 - \dfrac{1}{2n+1}$ [4]. Nous avons, bien entendu, $\lim\limits_{n \to +\infty} W_n = -1$, c'est à dire $\liminf u_n = -1$

Exercice 13 :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles bornées

1. Montrer que $\limsup (u_n + v_n) \leqslant \limsup u_n + \limsup v_n$
2. De même, montrer que $\liminf u_n + \liminf v_n \leqslant \liminf (u_n + v_n)$
3. Montrer que, si la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, $\limsup (u_n + v_n) = \limsup u_n + \limsup v_n$

Exercice 14 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique réelle bornée. Montrer que :

$$\liminf u_n = -(\limsup -u_n)$$

Exercice 15 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique réelle bornée. Démontrer les assertions suivantes :

1. $\limsup u_n < \alpha \Longrightarrow (\exists n \in \mathbb{N})\,(\forall k \in \mathbb{N})\,((k \geqslant n) \Longrightarrow (u_k < \alpha))$
2. $(\exists n \in \mathbb{N})\,(\forall k \in \mathbb{N})\,((k \geqslant n) \Longrightarrow (u_k < \alpha)) \Longrightarrow \limsup u_n \leqslant \alpha$
3. $\limsup u_n > \alpha \Longrightarrow (\forall n \in \mathbb{N})\,(\exists k \in \mathbb{N})\,((k \geqslant n) \text{ et } (u_k > \alpha))$
4. $(\forall n \in \mathbb{N})\,(\exists k \in \mathbb{N})\,((k \geqslant n) \text{ et } (u_k > \alpha)) \Longrightarrow \limsup u_n \geqslant \alpha$

3. Qui peut s'écrire $V_n = 1 + \dfrac{1}{n}$ si n est pair et $V_n = 1 + \dfrac{1}{n+1}$ si n est impair

4. Qui peut s'écrire $W_n = -1 - \dfrac{1}{n+1}$ si n est pair et $W_n = -1 - \dfrac{1}{n}$ si n est impair