1.5 Valeurs d'adhérence d'une suite

1.5.1 Définition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
$x \in \mathbb{K}$ est appelé valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si, pour tout $\varepsilon > 0$, et tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $n > N$ tel que $|u_n - x| < \varepsilon$

Remarque 17 :

1. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, cette définition signifie que, pour tout $\varepsilon > 0$, l'intervalle $]x-\varepsilon\ ,\ x+\varepsilon[$ contient une infinité de termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ou encore que l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} \text{ tel que } u_n \in]x-\varepsilon\ ,\ x+\varepsilon[\}$ est infini.
2. Si maintenant $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, cette définition signifie que, pour tout $\varepsilon > 0$, le disque ouvert $B(x, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z - x| < \varepsilon\}$ contient une infinité de termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ou encore que l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} \text{ tel que } u_n \in B(x, \varepsilon)\}$ est infini.

1.5.2 Proposition

Si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite l, alors, cette suite n'a qu'une seule valeur d'adhérence qui est l

Démonstration

Soit donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui admet une limite l.
Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admette une valeur d'adhérence $x \neq l$; alors $|x - l| > 0$.
Reprenant la définition de valeur d'adhérence, pour $\varepsilon = \dfrac{|x-l|}{3}$, pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $n > N$ tel que $|u_n - x| < \varepsilon = \dfrac{|x-l|}{3}$
Or, pour ce $n > N$, $|x - l| \leqslant |u_n - x| + |u_n - l|$, et donc : $|u_n - l| \geqslant |x - l| - |u_n - x|$.
Toujours pour ce $n > N$, $-|u_n - x| \geqslant -\dfrac{|x-l|}{3}$.
Et donc, pour $n > N$, $|u_n - l| \geqslant |x - l| - |u_n - x| \geqslant |x - l| - \dfrac{|x-l|}{3} = \dfrac{2|x-l|}{3}$
Ainsi, il existe $\varepsilon_1 = \dfrac{2|x-l|}{3}$ tel que, pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > N$ et $|u_n - l| \geqslant \varepsilon_1$, ce qui est la négation de suite qui admet pour limite l.
Contradiction.
Donc, si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite l, alors, cette suite n'a qu'une seule valeur d'adhérence qui est l

Exemple 12 :

Premier exemples simples :

1. La suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ a deux valeurs d'adhérence qui sont -1 et $+1$
2. La suite $\left(\dfrac{(-1)^n n + 1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ a aussi deux valeurs d'adhérence qui sont -1 et $+1$

Exemple 13 :

Voici un exemple moins évident :
Nous allons rechercher les valeurs d'adhérence de la suite $(\cos n\theta)_{n\in\mathbb{N}}$ où $\theta \in \mathbb{R}$

1. Nous avons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leqslant \cos n\theta \leqslant +1$et les valeurs d'adhérence sont forcément dans l'intervalle $[-1; +1]$

Cela ne peut en être autrement :
En effet, supposons que x soit une valeur d'adhérence de la suite $(\cos n\theta)_{n\in\mathbb{N}}$ et que $x \notin [-1;+1]$; alors, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x-\varepsilon; x+\varepsilon[\cap [-1;+1] = \emptyset$. Il ne peut donc y avoir une infinité de nombres $\cos n\theta$ dans $]x-\varepsilon; x+\varepsilon[$ *(il n'y en amême aucun !!)*
x ne peut donc pas être valeur d'adhérence de la suite $(\cos n\theta)_{n\in\mathbb{N}}$

2. On a vu, en L_0, dans l'étude des nombres réels que les ensembles

$$G(a,b) = \{ap + bq \text{ avec } p \in \mathbb{Z} \text{ et } q \in \mathbb{Z}\}$$

étaient des sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$. De plus :
▷ $G(a,b) = c\mathbb{Z}$ avec $c \in \mathbb{R}$ si et seulement si $\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$
▷ Sinon $G(a,b)$ est dense dans $\mathbb{R}$

3. Donc, l'ensemble $G(\theta, 2\pi) = \{n\theta + p \times 2\pi \text{ avec } p \in \mathbb{Z} \text{ et } n \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$.
Nous avons donc 2 possibilités :
(a) $\dfrac{\theta}{2\pi} \in \mathbb{Q}$, c'est à dire $\dfrac{\theta}{2\pi} = \dfrac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$ et $p \wedge q = 1$. Alors $\theta = \dfrac{p}{q} \times 2\pi$ et $n\theta = \dfrac{n \times p}{q} \times 2\pi$ et $\cos n\theta$ prend une infinité de fois les mêmes q valeurs qui sont donc les valeurs d'adhérence de la suite $(\cos n\theta)_{n\in\mathbb{N}}$
En effet, si $n \equiv k\,[q]$, alors $n = k + uq$ avec $u \in \mathbb{Z}$ et $k = 0, \cdots, q-1$ et

$$n\theta = \frac{(k+uq) \times p}{q} \times 2\pi = \frac{k \times p}{q} \times 2\pi + up \times 2\pi$$

De telle sorte que $\cos n\theta = \cos \dfrac{k \times p}{q} \times 2\pi$
(b) $\dfrac{\theta}{2\pi} \notin \mathbb{Q}$ et le groupe $G(\theta, 2\pi)$ est dense dans $\mathbb{R}$.
Soit $x \in [-1;+1]$ et $\varepsilon > 0$
Il existe $\alpha \in [0;\pi]$ et $\beta \in [0;\pi]$, $\alpha < \beta$ tels que $\cos\alpha \in]x-\varepsilon; x+\varepsilon[$, c'est à dire, en fait, de la décroissance de la fonction $\cos x$ sur $[0;\pi]$, tels que $]\cos\beta\,;\,\cos\alpha[\subset]x-\varepsilon; x+\varepsilon[$
$G(\theta, 2\pi)$ étant dense dans $\mathbb{R}$, il existe $n \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{Z}$ tels que $\alpha < n\theta + 2p\pi < \beta$; il y en a même une infinité.
Toujours de la décroissance de $\cos x$ sur $[0;\pi]$, nous avons $\cos\beta < \cos n\theta < \cos\alpha$, et l'ensemble $\{n \in \mathbb{Z} \text{ tels que } \cos\beta < \cos n\theta < \cos\alpha\}$ est infini.
De la parité de $\cos x$, c'est à dire comme $\cos(-n\theta) = \cos n\theta$, il y a donc une infinité de $n \in \mathbb{N}$ tels que $x - \varepsilon < \cos\beta < \cos n\theta < \cos\alpha < x + \varepsilon$.
x est donc une valeur d'adhérence de la suite $(\cos n\theta)_{n\in\mathbb{N}}$
L'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(\cos n\theta)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc, dans ce cas, l'intervalle $[-1;+1]$

1.5.3 Théorème : caractérisation des valeurs d'adhérence d'une suite

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
$x \in \mathbb{K}$ est une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
si et seulement si
Il existe une suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui admet pour limite x

Démonstration

1. Supposons qu'il existe une suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ qui admette pour limite x
Soit $\varepsilon > 0$.
Alors, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N_\varepsilon$, alors $\left|u_{\varphi(n)} - x\right| < \varepsilon$, c'est à dire $u_{\varphi(n)} \in]x-\varepsilon; x+\varepsilon[$.
Il existe donc une infinité d'éléments u_n dans l'intervalle $]x-\varepsilon; x+\varepsilon[$; ce qui montre que x est valeur d'adhérence.

2. Réciproquement, supposons que $x \in \mathbb{K}$ soit une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
   Nous souhaitons donc construire une application $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, strictement croissante telle que la suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x.
   Cette construction va se faire par récurrence.
   - ▷ **On pose** $\varphi(0) = 0$
   - ▷ **Supposons que, pour** $n \in \mathbb{N}$, nous ayions construit une fonction $\varphi : \{0, \cdots, n\} \longrightarrow \mathbb{N}$, strictement croissante telle que :
   $$(\forall p \in \{0, \cdots, n\}) \left(\left|u_{\varphi(p)} - x\right| \leqslant \frac{1}{p}\right)$$
   - ▷ **Construisons, maintenant pour** $n + 1$
     $x \in \mathbb{K}$ étant valeur d'adhérence de $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, pour $\varepsilon = \dfrac{1}{n+1}$, pour l'entier $\varphi(n)+1$, il existe un entier $N > \varphi(n) + 1$ tel que $|u_N - x| \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
     On pose $\varphi(n+1) = N$
     Alors, $\varphi(n+1) > \varphi(n) + 1 \geqslant n + 1$ car φ est strictement croissante.
     φ est donc définie sur $\{0, \cdots, n+1\}$ de telle façon que $(\forall p \in \{0, \cdots, n+1\}) \left(\left|u_{\varphi(p)} - x\right| \leqslant \dfrac{1}{p}\right)$

   Par récurrence, nous venons donc de définir une une fonction $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, strictement croissante telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left|u_{\varphi(n)} - x\right| \leqslant \dfrac{1}{n}$.
   Nous avons donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)} = x$, et donc, la suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x.

1.5.4 Proposition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite numérique réelle bornée

1. **On appelle $l_{sup} = \limsup u_n$ la limite supérieure de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Alors, l_{sup} est la plus grande valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$**
2. **De même, si $l_{inf} = \liminf u_n$ la limite inférieure de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Alors, l_{inf} est la plus petite valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$**

Démonstration

Nous ne démontrerons que lepremier point, la démonstration du second point en est identique.

- ▷ **On démontre que l_{sup} est plus grand que toutes les valeurs d'adhérence**
  Nous appelons toujours $A_n = \{u_p \text{ tels que } p \geqslant n\}$ et $V_n = \sup A_n$. La suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est une suite décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = l_{sup}$ et $l_{sup} = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} V_n$. Remarquons aussi que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant V_n$
  Soit x une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
  Il existe alors une fonction $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ croissante telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)} = x$.
  Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{\varphi(n)} \leqslant V_{\varphi(n)}$; la suite $\left(V_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} V_{\varphi(n)} = l_{sup}$
  Par passage à la limite, nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)} \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} V_{\varphi(n)}$, c'est à dire $x \leqslant l_{sup}$
  Ce que nous voulions
- ▷ **Montrons maintenant que l_{sup} est une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$**
  Soit $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$
  Il faut donc que nous montrions qu'il existe une infinité de termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tels que $|u_n - l_{sup}| < \varepsilon$
  Pour cet $\varepsilon > 0$, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant N_\varepsilon \Longrightarrow |V_n - l_{sup}| < \varepsilon$
  Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $n \geqslant \max\{N, N_\varepsilon\} \Longrightarrow |V_n - l_{sup}| < \varepsilon$. C'est à dire en tenant compte du fait que la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et que $l_{sup} = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} V_n$, nous avons :
  $$n \geqslant \max\{N, N_\varepsilon\} \Longrightarrow l_{sup} \leqslant V_n \leqslant l_{sup} + \varepsilon$$

Comme $V_n = \sup A_n$, toujours pour $n \geqslant \max\{N, N_\varepsilon\}$, il existe $p \geqslant n$ tel que $V_n - \varepsilon \leqslant u_p \leqslant V_n$, c'est à dire, en « ré-injectant »l'inégalité vraie pour $n \geqslant \max\{N, N_\varepsilon\}$, $l_{sup} \leqslant V_n \leqslant l_{sup} + \varepsilon$, il existe $p \geqslant n \geqslant \max\{N, N_\varepsilon\}$ tel que :

$$l_{sup} - \varepsilon \leqslant u_p \leqslant l_{sup} + \varepsilon \Longleftrightarrow |l_{sup} - u_p| \leqslant \varepsilon$$

Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $p \geqslant N$ tel que $|l_{sup} - u_p| \leqslant \varepsilon$. l_{sup} est bien une valeur d'adhérence

l_{sup} est donc la plus grande des valeurs d'adhérence.

1.5.5 Théorème de Bolzano-Weierstrass

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite bornée de nombres réels. Alors, nous pouvons extraire de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite convergente.

Démonstration

On appelle $l_{sup} = \limsup u_n$. l_{sup} existe, c'est une valeur d'adhérence particulière, la plus grande, de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. D'après 1.5.3, il existe une sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers l_{sup}.
Le théorème est donc démontré ; ce que nous voulions.