1.6 Suites de Cauchy

1.6.1 Définition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $m \in \mathbb{N}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, nous ayons l'implication :

$$((m \geqslant N_\varepsilon) \text{ et } (n \geqslant N_\varepsilon)) \Longrightarrow |u_m - u_n| < \varepsilon$$

Remarque 18 :

Cette relation peut aussi s'écrire :
Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $m \in \mathbb{N}$ nous ayons l'implication :

$$((m \geqslant N_\varepsilon) \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N})) \Longrightarrow |u_m - u_{m+n}| < \varepsilon$$

1.6.2 Caractérisation

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy si et seulement si
La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $v_n = \sup\limits_{n\geqslant p} |u_n - u_p| = \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} |u_n - u_{n+k}|$ tend vers zéro

Démonstration

1. On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy
   Soit $\varepsilon > 0$.
   $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant une suite de Cauchy, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N_\varepsilon$ et $p \geqslant N_\varepsilon$, alors $|u_n - u_p| \leqslant \varepsilon$
   Donc, en particulier, si $n \geqslant N_\varepsilon$, $v_n = \sup\limits_{n\geqslant p} |u_n - u_p|$ est telle que $|v_n| \leqslant \varepsilon$, et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$
2. Réciproquement, supposons $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$
   Soit $\varepsilon > 0$
   Il existe alors $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N_\varepsilon$ alors $|v_n| \leqslant \varepsilon$. Ainsi donc, pour tout $n \geqslant N_\varepsilon$ et tout $p \geqslant n$, nous avons $|u_n - u_p| \leqslant \varepsilon$
   Donc, pour retomber sur nos pieds, si nous posons, pour $n \geqslant N_\varepsilon$ et $p \geqslant N_\varepsilon$ $n' = \min\{n, p\}$ et $p' = \max\{n, p\}$, nous avons :
   - $|u_n - u_p| = |u'_n - u'_p| \leqslant \varepsilon$ car $n' \geqslant N_\varepsilon$ et $p' \geqslant n'$
   - Ainsi, si $n \geqslant N_\varepsilon$ et $p \geqslant N_\varepsilon$, nous avons $|u_n - u_p| \leqslant \varepsilon$, ce qui montre que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy

Remarque 19 :

Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - u_{n+k}) = 0$

1.6.3 Proposition

Toute suite convergente est de Cauchy

Démonstration

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite convergente ; on appelle l cette limite.
Soit $\varepsilon > 0$. Alors, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N_\varepsilon$ alors $|u_n - l| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$
Donc, pour $n \geqslant N_\varepsilon$ et $m \geqslant N_\varepsilon$:

$$|u_n - u_m| = |u_n - l + l - u_m| \leqslant |u_n - l| + |u_m - l| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite de Cauchy

Remarque 20 :

1. La contraposée est très importante :
   Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ n'est pas de Cauchy, alors, elle n'est pas convergente.

   Prenons comme exemple la suite $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ définie pour $n \in \mathbb{N}^*$. Nous allons montrer qu'elle n'est pas de Cauchy en étudiant $S_{2n} - S_n$

   $$S_{2n} - S_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

   Or, pour $k = 0, \ldots, n$, nous avons $\dfrac{1}{2n} \leqslant \dfrac{1}{n+k} \leqslant \dfrac{1}{n}$, et donc $n \times \dfrac{1}{2n} \leqslant \displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} \leqslant 1$, c'est à dire $\dfrac{1}{2} \leqslant S_{2n} - S_n \leqslant 1$
   Ainsi, $S_{2n} - S_n$ ne peut être rendu aussi petit qu'on le souhaite. La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est donc pas de Cauchy et ne peut être convergente.
2. Autre chose, ce n'est pas parcequ'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (u_n - u_{n+k}) = 0$ que la suite est de Cauchy

   Par exemple, en reprenant la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$; on sait qu'elle n'est pas de Cauchy, et pourtant, $S_{n+1} - S_n = \dfrac{1}{n+1}$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_{n+1} - S_n = 0$

   Nous devons avoir, **pour tout** $k \in \mathbb{N}$**,** $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (u_n - u_{n+k}) = 0$
3. Une suite convergente étant de Cauchy, nous avons $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (u_n - u_{n+1}) = 0$; bien entendu, **la réciproque est fausse :** il suffit de penser à $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

1.6.4 Proposition

Toute suite de Cauchy est bornée

Démonstration

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy.
Pour $\varepsilon = 1$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N$, alors nous avons $|u_n - u_N| \leqslant 1$
En utilisant l'inégalité triangulaire, nous avons $||u_n| - |u_N|| \leqslant |u_n - u_N| \leqslant 1$, et donc, si $n \geqslant N$, $|u_n| \leqslant |u_N| + 1$
En posant $M = \max\{|u_0|, |u_1|, \cdots, |u_N|, |u_N| + 1\}$, et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $|u_n| \leqslant M$, ce qui montre que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

1.6.5 Théorème

Dans $\mathbb{R}$, toute suite de Cauchy est convergente. On dit de $\mathbb{R}$ que c'est un espace complet

Démonstration

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. Alors, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée et d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass 1.5.5, on peut donc en extraire une sous-suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente vers un nombre l qui est en fait, une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Soit $\varepsilon > 0$

— $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant de Cauchy, il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que, pour tout $m \in \mathbb{N}$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(m \geqslant n \geqslant N) \Longrightarrow \left(|u_n - u_m| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

— l étant valeur d'adhérence pour $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, pour $n \geqslant N$, il existe $p \in \mathbb{N}$, $p \geqslant n$ tel que $|u_p - l| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$

— Donc, pour ce $n \geqslant N$,

$$|u_n - l| = |u_n - u_p + u_p - l| \leqslant |u_n - u_p| + |u_p - l| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

C'est à dire $|u_n - l| \leqslant \varepsilon$ dès que $n \geqslant N$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$

Remarque 21 :

1. Dans $\mathbb{R}$, nous avons l'équivalence entre suite de Cauchy et suite convergente
2. **Attention !** La notion d'espace complet dépend profondément de l'ensemble dans lequel nous nous situons
   — Par exemple, la suite définie par :
   $$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{2}{u_n}\right) \end{cases}$$
   Est une suite dont tous les éléments sont rationnels (des éléments de $\mathbb{Q}$), qui est de Cauchy dans $\mathbb{Q}$, mais qui ne converge pas dans $\mathbb{Q}$, puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{2}$ et que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$
   — Il en est de même de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$; pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $S_n \in \mathbb{Q}$, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}$, mais qui converge dans $\mathbb{R}$ vers e, la base du logarithme népérien, et $e \notin \mathbb{Q}$

Exercice 16 :

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite telle qu'il existe $M > 0$ et $k \in \mathbb{R}$ tel que $0 < k < 1$ vérifiant :
   $$|u_{n+1} - u_n| \leqslant M k^n$$
   Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
2. Soit $k \in \mathbb{R}$ tel que $0 < k < 1$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous ayions :
   $$|u_{n+2} - u_{n+1}| \leqslant k\,|u_{n+1} - u_n|$$
   Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

1.6.6 Corollaire

Dans $\mathbb{C}$, toute suite de Cauchy est convergente. $\mathbb{C}$ est donc un espace complet

Démonstration

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy.
Nous pouvons donc écrire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = a_n + ib_n$ avec $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
Soit $\varepsilon > 0$
Il existe donc $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que si $p \geqslant q \geqslant N_\varepsilon$ alors $|u_p - u_q| \leqslant \varepsilon$
Nous avons $|u_p - u_q| = |(a_p - a_q) + i\,(b_p - b_q)|$ et donc $|a_p - a_q| \leqslant |u_p - u_q|$ et $|b_p - b_q| \leqslant |u_p - u_q|$
Ainsi, si $p \geqslant q \geqslant N_\varepsilon$ alors $|a_p - a_q| \leqslant \varepsilon$ et $|b_p - b_q| \leqslant \varepsilon$, ce qui montre que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ sont de Cauchy dans $\mathbb{R}$ et sont, d'après 1.6.5, convergente dans $\mathbb{R}$.
Appelons $l_a = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ et $l_b = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$, alors, d'après le théorème 1.2.8, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l_a + il_b$

Remarque 22 :

Dans $\mathbb{C}$, nous avons aussi l'équivalence entre suite de Cauchy et suite convergente