1.7 Limites infinies

1.7.1 Définition

1. **Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite numérique réelle**
   On dit que cette suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, et on écrit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ si et seulement si
   Pour tout $A > 0$, $u_n > A$ à partir d'un certain rang
   Autrement dit
   Pour tout $A > 0$, il existe $N_A \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \geqslant N_A$ alors $u_n > A$
2. **Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite numérique réelle**
   On dit que cette suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$, et on écrit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ si et seulement si
   Pour tout $A > 0$, $u_n < -A$ à partir d'un certain rang
   Autrement dit
   Pour tout $A > 0$, il existe $N_A \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \geqslant N_A$ alors $u_n < -A$
3. **Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite numérique ($\mathbb{K}$ étant mis pour $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)**
   On dit que cette suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers ∞, et on écrit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \infty$ si et seulement si
   Pour tout $A > 0$, $|u_n| > A$ à partir d'un certain rang
   Autrement dit
   Pour tout $A > 0$, il existe $N_A \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \geqslant N_A$ alors $|u_n| > A$

Remarque 23 :

1. Réécrivons la définition de suite qui tend vers ∞, en écriture formalisée :
$$\boxed{(\forall A > 0)\,(\exists N_A \in \mathbb{N})\,(\forall n \in \mathbb{N})\,(n > N_A \Rightarrow |u_n| > A)}$$
2. On dit alors que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est infiniment grand lorsque n est infiniment grand
3. Une suite qui tend vers l'infini est dite **divergente**
4. Le troisième item de la définition généralise les deux précédents et s'applique aussi aux suites complexes. Ainsi, on peut dire qu'une suite tend vers ∞ si la valeur absolue ou le module de la suite tend vers $+\infty$
   — Si nous nous intéressons à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = (-1)^n\, n$, que pouvons nous dire de cette suite ?
   - ▷ La suite des termes de rang pair tend vers $+\infty$, alors que la suite des termes de rang impair tend vers $-\infty$
   - ▷ En regardant la valeur absolue, nous avons $|u_n| = n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = +\infty$, et donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers ∞ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente

   — Intéressons nous maintenant à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = (1+i)^n$, que pouvons nous dire de cette suite ?
   - ▷ Considérons le module de u_n : $|u_n| = |1+i|^n = \left(\sqrt{2}\right)^n$
   - ▷ Nous avons : $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{2}\right)^n = +\infty$, et donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers ∞ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente
   - ▷ Petite remarque : $u_n = (1+i)^n = \left(\sqrt{2}\right)^n e^{\frac{in\pi}{4}}$
5. On peut aussi écrire qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$ si et seulement si la suite $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$. Il est ainsi facile d'adapter les théorèmes écrit lorsqu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ten devers $+\infty$

1.7.2 Proposition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite numérique qui tend vers ∞
Alors, toute suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge aussi vers ∞

Démonstration

Soit $A > 0$. Alors, il existe $N_A \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant N_A \Longrightarrow |u_n| > A$
$\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est une fonction telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \geqslant n$
Donc, si $n \geqslant N_A$ alors $\varphi(n) \geqslant n \geqslant N_A$ et donc $|u_{\varphi(n)}| > A$.
Nous avons donc $\lim\limits_{n \to +\infty} |u_{\varphi(n)}| = +\infty$ et donc la suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge aussi vers ∞

Remarque 24 :

Il est donc clair que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est une suite numérique qui tend vers ∞, alors, toute suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge aussi vers ∞

1.7.3 Propriétés des suites réelles qui tendent vers $+\infty$

1. **Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ sont 2 suites réelles qui tendent vers $+\infty$, alors**
   (a) **Addition :** $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **tend vers** $+\infty$
   (b) **Multiplication :** $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **tend vers** $+\infty$
   (c) **Multiplication par un scalaire :**
      i. $(\forall\lambda > 0)\ (\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **tend vers** $+\infty$
      ii. $(\forall\lambda < 0)\ (\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **tend vers** $-\infty$
2. **Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 2 suites ; si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, et si il existe $a > 0$ tel que $v_n \geqslant a$ à partir d'un certain rang, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = +\infty$**
3. **Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 2 suites réelles telles que :**
   — **La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$**
   — **La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par un nombre μ**
   alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n = +\infty$
4. **Théorème "pousse au c.." : Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 2 suites telles que $u_n \geqslant v_n$ à partir d'un certain rang.**
   Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, alors, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Démonstration

1. **Démonstration du premier point**
   (a) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 2 suites réelles qui tendent vers $+\infty$
   On va écrire que les deux suites tendent vers $+\infty$
   Soit $A > 0$
   — On écrit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$: Il existe $N_A^u \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant N_A^u \Rightarrow u_n \geqslant \dfrac{A}{2}$
   — On écrit que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$: Il existe $N_A^v \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant N_A^v \Rightarrow v_n \geqslant \dfrac{A}{2}$
   Soit $N = \max\{N_A^u, N_A^v\}$
   Si $n \geqslant N$, alors $n \geqslant N_A^u$ et $n \geqslant N_A^v$, donc, $u_n \geqslant \dfrac{A}{2}$ et $v_n \geqslant \dfrac{A}{2}$; donc, si $n \geqslant N$, alors $u_n + v_n \geqslant A$; donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = +\infty$
   (b) Ecrivons, comme d'habitude, que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont 2 suites réelles qui tendent vers $+\infty$
   Soit $A > 0$
   — Il existe donc $N_A^u \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant N_A \Rightarrow u_n \geqslant \sqrt{A}$
   — De même, il existe donc $N_A^v \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant N_A^v \Rightarrow v_n \geqslant \sqrt{A}$

Pour $N = \max\{N_A^u, N_A^v\}$
Si $n \geqslant N$, alors $n \geqslant N_A^u$ et $n \geqslant N_A^v$, donc, $u_n \geqslant \sqrt{A}$ et $v_n \geqslant \sqrt{A}$; donc, si $n \geqslant N$, alors $u_n v_n \geqslant \sqrt{A} \times \sqrt{A} = A$; donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n v_n) = +\infty$

(c) i. Soit $\lambda > 0$; écrivons, une nouvelle fois, que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite qui tend vers $+\infty$

Soit $A > 0$ il existe donc $N_A \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant N_A \Rightarrow u_n \geqslant \dfrac{A}{\lambda}$. Donc, si $n \geqslant N_A$, $\lambda u_n \geqslant A$, ce qui montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$

ii. De même, soit $\lambda < 0$; comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite qui tend vers $+\infty$, pour $A > 0$ il existe donc $N_A \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant N_A \Rightarrow u_n \geqslant \dfrac{A}{-\lambda}$. Donc, si $n \geqslant N_A$, $\lambda u_n \leqslant \lambda \dfrac{A}{-\lambda} = -A$; ce qui montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$

2. **Démonstration du second point**

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui tend vers $+\infty$, et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $v_n > a > 0$ à partir d'un certain rang N_v.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, pour $A > 0$ il existe donc $N_A \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant N_A \Rightarrow u_n \geqslant \dfrac{A}{a}$.

Soit $Q = \max\{N_A, N_v\}$; si $n \geqslant Q$, alors $n \geqslant N_A$ et $n \geqslant N_v$, et donc $u_n v_n \geqslant a\dfrac{A}{a} = A$.

Ce qui termine de montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = +\infty$

3. **Démonstration du troisième point**

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 2 suites réelles telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $v_n \geqslant \mu$.

Soit $A > 0$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, il existe $N_A \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N_A$, alors $u_n \geqslant A - \mu$

Ainsi, si $n \geqslant N_A$, alors $u_n + v_n \geqslant A - \mu + \mu = A$ et donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = +\infty$

4. **Démonstration du théorème « Pousse au... »**

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 2 suites réelles telles que $u_n \geqslant v_n$ à partir d'un certain rang.

Ceci veut donc dire qu'il existe un entier $P \in \mathbb{N}$, tel que si $n \geqslant P$, alors $u_n \geqslant v_n$

Ecrivons que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$; alors, pour $A > 0$ il existe donc $N_A \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant N_A \Rightarrow v_n \geqslant A$.

Comme précédemment, nous posons $Q = \max\{N_A, P\}$; si $n \geqslant Q$, alors $n \geqslant N_A$ et $n \geqslant P$, et donc $u_n \geqslant v_n \geqslant A$; en particulier, $u_n \geqslant A$, ce qui termine de montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Remarque 25 :

Il y a une application directe du théorème :
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 2 suites réelles telles que :

— La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$

— La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, c'est à dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $|v_n| \leqslant \mu$

alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = +\infty$, puisque la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est, en particulier minorée.

Exercice 17 :

Démontrer que si $k > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} k^n = +\infty$

Correction

Si $k > 1$, il existe $a > 0$ tel que $k = 1 + a$. Donc, $k^n = (1+a)^n \geqslant 1 + na$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + na = +\infty$, il en est de même de $\lim\limits_{n\to+\infty} k^n = +\infty$

Remarque 26 :

Sur les formes indéterminées
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, on ne peut rien affirmer de $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n)$; nous sommes devant une indétermination.

Exemples :

1. Si $u_n = n$ et $v_n = -n + \dfrac{1}{n}$, alors $u_n + v_n = \dfrac{1}{n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = 0$
2. Si $u_n = n^2$ et $v_n = -n$, alors $u_n + v_n = n^2 - n = n(n-1)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = +\infty$
3. A contrario, si $u_n = n$ et $v_n = -n^2$, alors $u_n + v_n = n - n^2 = -n(n-1)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = -\infty$

1.7.4 Proposition

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 2 suites réelles telles que :
- **La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$**
- **La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $l > 0$**

alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = +\infty$

Démonstration

Pour le nombre $l > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N$, alors $|u_n - l| < \dfrac{l}{2}$; et donc, si $n \geqslant N$, alors $\dfrac{-l}{2} \leqslant u_n - l \leqslant \dfrac{l}{2}$, c'est à dire $u_n \geqslant \dfrac{l}{2}$ à partir du rang N.
Et il suffit d'appliquer le théorème 1.7.3

Remarque 27 :

En changeant v_n en $-v_n$, on voit que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont 2 suites réelles telles que :
- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$
- La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $l < 0$ ou $-\infty$

alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = -\infty$

Remarque 28 :

Retour sur les formes indéterminées
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$, on ne peut rien affirmer de $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n \times v_n)$; nous sommes devant une indétermination.

Exemples :

1. Si $u_n = n$ et $v_n = \dfrac{1}{n}$, alors $u_n v_n = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n v_n) = 1$
2. Si $u_n = n^2$ et $v_n = \dfrac{1}{n}$, alors $u_n v_n = n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n v_n) = +\infty$
3. A contrario, si $u_n = n$ et $v_n = \dfrac{1}{n^2}$, alors $u_n v_n = \dfrac{1}{n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n v_n) = 0$

1.7.5 Proposition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite numérique réelle telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = 0$

Démonstration

Soit $\varepsilon > 0$

- ▷ Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, alors, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N_\varepsilon$, alors $u_n \geqslant \dfrac{1}{\varepsilon}$ c'est à dire $0 < \dfrac{1}{u_n} \leqslant \varepsilon$

  Et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{u_n} = 0$
- ▷ De même, si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$, alors, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N_\varepsilon$, alors $u_n \leqslant -\dfrac{1}{\varepsilon}$ c'est à dire $-\varepsilon < \dfrac{1}{u_n} < 0$

  Et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{u_n} = 0$

Exercice 18 :

Démontrer que :

1. Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ et que $u_n > 0$ à partir d'un certain rang, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{u_n} = +\infty$
2. Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ et que $u_n < 0$ à partir d'un certain rang, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{u_n} = -\infty$

1.7.6 Théorème

1. **Une suite croissante et non majorée diverge vers $+\infty$**
2. **Une suite décroissante et non minorée diverge vers $-\infty$**

Démonstration

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite numérique croissante et non majorée.
   Alors, soit $A > 0$
   $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'étant pas une suite majorée, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N > A$
   $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant croissante, nous avons l'implication : $n > N \Rightarrow u_n > u_N > A$
   Donc, pour tout $A > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n > N \Rightarrow u_n > A$.
   Donc, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$
2. La démonstration du second point est exactement la même