1.8 Quelques exercices de synthèse sur les suites

1.8.1 Sur le théorème de Césaro 1.1.6

Exercice 19 :

Déterminer la limite de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $w_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{2}{k}\right)^{\frac{k}{n}}$

Exercice 20 :

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}-u_n = l$ avec $l \in \mathbb{K}$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{n} = l$
2. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique telle que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $x_n \in \mathbb{R}^{*+}$ *(i.e.* $x_n > 0$*)*. Montrez que si :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l \text{ avec } l \in \mathbb{R}^+ \text{ c'est à dire } l \geqslant 0$$
Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n} = l$
   (a) Appliquer ce résultat à l'étude de :
      i. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\mathrm{C}_{2n}^{n}}$
      ii. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n!}$
      iii. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$
   (b) Montrer, par des contre-exemples, que la réciproque est fausse

Exercice 21 :

Soient $a \in \mathbb{K}$ et $b \in \mathbb{K}$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :
$$\lim_{n\to+\infty} u_{2n} = a \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = b$$
On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{u_0+u_1+u_2+\cdots+u_n}{n+1}$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$

1.8.2 Calculs de limites

Exercice 22 :

Pour $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$, on suppose $a^2-4b<0$, c'est à dire $b>0$ et $|a|<2\sqrt{b}$.
Donner $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n^2+an+b}-\sqrt{n}$

Exercice 23 :

Etudier les limites lorsque n tend vers $+\infty$ des suites suivantes :

1. $w_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{2n} e^{-\sqrt{k}}$
2. $u_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}\left(2-\frac{k}{n}\right)$
3. $u_n = \dfrac{2n+\cos n}{ni+\sqrt{(n+1)(n+2)}}$
4. $u_n = \dfrac{a^n-b^n}{a^n+b^n}$ avec $a>0$ et $b>0$

Exercice 24 :

Le but de cet exercice est d'étudier la suite $(\cos n\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ où $\alpha\in\mathbb{R}$

1. Que pouvons nous dire si $\sin\alpha = 0$?

2. On suppose maintenant que $\sin\alpha \neq 0$.
   Nous voulons montrer que la suite $(\cos n\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de limite. On suppose le contraire et nous appelons l le nombre tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos n\alpha = l$.
   (a) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin n\alpha = l \times \dfrac{\cos\alpha - 1}{\sin\alpha}$
   (b) En considérant $\sin 2n\alpha$, montrer que $l = 0$ ou $l = \dfrac{1}{2}$
   (c) En considérant $\cos 2n\alpha$, montrer que $l = 2l^2 - 1$
   (d) Conclure

Exercice 25 :

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite numérique réelle telle que :
— Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons : $x_n \geqslant 0$
— Il existe $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$ avec $0 \leqslant \alpha + \beta < 1$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+3} \leqslant \alpha x_{n+2} + \beta x_n$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on construite la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ par : $u_n = \max\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}\}$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante
2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+3} \leqslant (\alpha + \beta)\, u_n$
3. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant (\alpha + \beta)^{\left[\frac{n}{3}\right]} u_0$ où le symbole $[\bullet]$ désigne la partie entière.
4. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$

1.8.3 Variation des suites

Exercice 26 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite numérique réelle.
Montrer qu'il existe 2 suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, l'une croissante et l'autre décroissante, telles que

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} + (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

Exercice 27 :

1. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite croissante qui admet une limite l. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $x_n \leqslant l$
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite croissante. Montrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ admet une suite extraite convergente, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est convergente

Exercice 28 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite bornée telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2u_n \leqslant u_{n+1} + u_{n-1}$.
On appelle $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_{n+1} - u_n$. Etudier la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

Exercice 29 :

Etudier les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définies par :

1. $\diamond$ $u_0 = a$ $\quad\diamond$ $v_0 = b$ $\quad\diamond$ $u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$ $\quad\diamond$ $v_{n+1} = \dfrac{2u_n v_n}{u_n + v_n}$
2. $\diamond$ $u_0 = a > 0$ $\quad\diamond$ $v_0 = b > 0$ $\quad\diamond$ $u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$ $\quad\diamond$ $v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$

Exercice 30 :

Suites sous additives
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs ou nuls vérifiant :

$$(\forall m \in \mathbb{N})\,(\forall n \in \mathbb{N})\,(u_{m+n} \leqslant u_m + u_n)$$

Montrer que la suite $\left(\dfrac{u_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{n} = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \left(\dfrac{u_n}{n}\right)$

Exercice 31 :

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 2 suites de nombres réels telles que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on ait :

$$a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n$$

1. Démontrez que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes
2. On appelle $a = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ et $b = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$. Démontrer que $a \leqslant b$
3. Démontrer que $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} [a_n; b_n] = [a; b]$
4. On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} (a_n - b_n) = 0$. Démontrer que $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} [a_n; b_n]$ est réduit à un seul élément.

Exercice 32 :

Nous considérons les deux suites numériques réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définies par :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n!}$$

1. Démontrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ sont adjacentes
2. Démontrer que leur limite commune l ne peut être rationnelle, c'est à dire que $l \notin \mathbb{Q}$

1.8.4 Valeurs d'adhérence

Exercice 33 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite de réels bornée telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_{n+1} - u_n) = 0$. Démontrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un intervalle.

Exercice 34 :

Une preuve par dichotomie du théorème de Bolzano-Weierstrass
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $[a; b]$ (c'est donc une suite bornée). On désire construire une sous-suite convergente $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
Posons $\varphi(0) = 0$, $a_0 = a$ et $b_0 = b$

1. Montrer que :
   - ▷ Ou bien il existe une infinité d'indices n tels que $u_n \in \left[\dfrac{a+b}{2}; b\right]$
   - ▷ Ou bien il existe une infinité d'indices n tels que $u_n \in \left[a; \dfrac{a+b}{2}\right]$

   Dans le premier cas, posons $a_1 = \dfrac{a_0 + b_0}{2}$ et $b_1 = b_0$. Dans le deuxième cas, posons $a_1 = a_0$ et $b_1 = \dfrac{a_0 + b_0}{2}$. De plus, on pose $\varphi(1)$ comme étant le plus petit indice $n \geqslant \varphi(0)$ tel que $u_n \in [a_1; b_1]$
2. Montrer que

- ▷ Ou bien il existe une infinité d'indices $n \geqslant \varphi(1)$ tels que $u_n \in \left[\dfrac{a_1+b_1}{2}; b_1\right]$
- ▷ Ou bien il existe une infinité d'indices n tels que $u_n \in \left[a_1; \dfrac{a_1+b_1}{2}\right]$

  Dans le premier cas, posons $a_2 = \dfrac{a_1+b_1}{2}$ et $b_2 = b_1$. Dans le deuxième cas, posons $a_2 = a_1$ et $b_2 = \dfrac{a_1+b_1}{2}$. De plus, on pose $\varphi(2)$ comme étant le plus petit indice $n \geqslant \varphi(1)$ tel que $u_n \in [a_2; b_2]$

3. Poursuivre cette construction afin d'obtenir trois suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ avec des propriétés bien choisies.
4. Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, et que $\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = 0$. En déduire que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendent vers une même limite l.
5. En déduire que la suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend également vers l

1.8.5 Suites de Cauchy

Exercice 35 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite numérique réelle définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2^n u_n}$$

Il faut montrer que cette suite est convergente