1.9 Correction de quelques exercices

1.9.1 Limite des suites

Exercice 1 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$; démontrer que toute suite extraite de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$; il existe donc une application $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, croissante, telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{g(n)}$
Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite extraite de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$; il existe donc une application $h : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, croissante, telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = v_{h(n)}$.
Or, $v_{h(n)} = u_{g(h(n))}$. C'est à dire que $w_n = u_{g(h(n))}$. g et h étant 2 fonctions croissantes de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, $g \circ h$ est aussi une fonction croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ et la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ apparaît donc comme une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
Ce que nous voulions démontrer.

Exercice 3 :

1. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique telle que les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ soient convergentes.*
   Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente

   Nous allons appeler $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = l_1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = l_2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{3n} = l_3$

   (a) **Démontrons que $l_1 = l_2 = l_3$**
   Tout d'abord, d'après 1.1.5 si une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite numérique ayant une limite v, toute suite numérique extraite de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet aussi pour limite v
   - ▷ Démontrons que $l_1 = l_3$
     La suite $(u_{6n})_{n\in\mathbb{N}}$ est extraite de la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et donc converge vers l_1
     De même, la suite $(u_{6n})_{n\in\mathbb{N}}$ est extraite de la suite $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ et donc converge vers l_3
     La limite d'une suite étant unique, nous avons $l_1 = l_3$
   - ▷ Démontrons que $l_2 = l_3$
     La démonstration est semblable
     La suite $(u_{6n+3})_{n\in\mathbb{N}}$ est extraite de la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et donc converge vers l_2
     De même, la suite $(u_{6n+3})_{n\in\mathbb{N}}$ est extraite de la suite $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ et donc converge vers l_3
     La limite d'une suite étant unique, nous avons $l_2 = l_3$
   - ▷ Nous avons donc $l_1 = l_2 = l_3$, en particulier, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1}$

   (b) **Démontrons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente**
   Nous allons démontrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = l$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$
   Soit $\varepsilon > 0$
   Alors, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N_1$, alors $|u_{2n} - l| < \varepsilon$
   De même, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N_2$, alors $|u_{2n+1} - l| < \varepsilon$
   Posons $N = \max\{2N_1, 2N_2 + 1\}$; alors, si $n \geqslant N$, nous avons $|u_n - l| < \varepsilon$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$

   Remarque : On vient de montrer que pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = l$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$, ce qui est un résultat remarquable.

2. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique telle que les suites extraites $(u_{3n+2})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{4n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{5n+3})_{n\in\mathbb{N}}$ soient convergentes.La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?*

   Eh bien non, justement ! ! ! Pour le voir, il suffit de prendre un contre exemple.
   Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par : $u_n = 1$ si $n \equiv 4\,[60]$ et $u_n = 0$ sinon. Cette suite n'admet pas de limite.

Par contre, si $n \equiv 2\,[60]$, alors $n \equiv 2\,[3]$ et $u_{3n+2} = 0$; de même, $n \equiv 1\,[60]$, alors $n \equiv 1\,[4]$ et $u_{4n+1} = 0$ et ;, pour terminer, $n \equiv 3\,[60]$, alors $n \equiv 3\,[5]$ et $u_{5n+3} = 0$.
Ces suites extraites sont convergentes, alors que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne l'est pas

Le choix de 60 n'est pas anodin : c'est le ppcm de 3, 4 et 5

3. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique, $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}$, 2 entiers premiers entre eux. On suppose que :*
   - *La suite $(u_{bn})_{n\in\mathbb{N}}$ extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge*
   - *Pour tout entier $r \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant r < a$, la suite $(u_{an+r})_{n\in\mathbb{N}}$ extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite notée l_r*

   Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge

   Comme le pgcd $(a,b) = 1$, il existe $u \in \mathbb{N}$ et $v \in \mathbb{N}$ tels que $au + bv = 1$. Pour $r \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant r < a$, considérons $abn + bvr$
   - ▹ Nous avons $abn + bvr = b\,(an + vr)$ et donc la suite $(u_{abn+bvr})_{n\in\mathbb{N}}$ apparaît comme une suite extraite de la suite $(u_{bn})_{n\in\mathbb{N}}$; la suite $(u_{abn+bvr})_{n\in\mathbb{N}}$ est donc convergent et a donc la même limite que la suite $(u_{abn})_{n\in\mathbb{N}}$; appelons L cette limite.
   - ▹ De l'identité $au + bv = 1$, nous tirons $aur + bvr = r$, et donc $bvr = r - aur$, de telle sorte que

     $$abn + bvr = abn + r - aur = a\,(bn - ur) + r$$

     La suite $(u_{abn+bvr})_{n\in\mathbb{N}}$ apparaît comme une suite extraite de la suite $(u_{an+r})_{n\in\mathbb{N}}$; donc, pour tout entier $r \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant r < a$, les nombres l_r sont les mêmes et égaux à L

   Soit $n \in \mathbb{N}$, alors, en effectuant la division euclidienne de n par a, nous avons $n = an' + r$ et $(u_{an+r})_{n\in\mathbb{N}} = (u_{an'+r})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge donc vers L La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien convergente.

Exercice 4 :

La suite numérique réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \dfrac{1}{n} + (-1)^n$ est-elle convergente ?

La réponse est <u>**NON**</u>
Il suffit de prendre 2 suites extraites, de démontrer qu'elles convergent vers 2 limites différentes.

- ▹ On prend la suite d'ordre pair $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$. Nous avons donc $u_{2n} = \dfrac{1}{2n} + 1$ qui admet pour limite en $+\infty$ $+1$
- ▹ On prend la suite d'ordre impair $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$. Nous avons donc $u_{2n+1} = \dfrac{1}{2n+1} - 1$ qui admet pour limite en $+\infty$ -1

Et voilà le travail : 2 suites extraites qui admettent 2 limites différentes qui sont donc divergentes

Exercice 6 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{K}$. On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en moyenne si $v_n = \dfrac{u_1 + \cdots + u_n}{n}$ admet une limite l. Démontrer qu'une suite périodique converge en moyenne.

Ceci n'est pas une démonstration facile.
Soit $t \in \mathbb{N}$ la période de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit $m \in \mathbb{N}^*$

- ▹ **Nous avons $v_{mt} = v_t$**

  Voilà un résultat surprenant que nous allons nous employer à démontrer.

  $$v_{mt} = \frac{1}{mt}\sum_{k=1}^{mt} u_k = \frac{1}{mt}\left(\sum_{k=1}^{mt} u_k + \sum_{k=1}^{t} u_k + \sum_{k=1+t}^{2t} u_k \cdots + \sum_{k=(m-1)t+1}^{mt} u_k\right) = \frac{1}{mt}\left(\sum_{j=0}^{m-1}\left(\sum_{k=1+jt}^{(j+1)t} u_k\right)\right)$$

  En faisant le changement $k' = k - jt$, nous avons :

  $$v_{mt} = \frac{1}{mt}\left(\sum_{j=0}^{m-1}\left(\sum_{k=1+jt}^{(j+1)t} u_k\right)\right) = \frac{1}{mt}\left(\sum_{j=0}^{m-1}\left(\sum_{k'=1}^{t} u_{k'+jt}\right)\right)$$

  De la périodicité de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, nous tirons $u_{k'+jt} = u_{k'}$, et donc

  $$v_{mt} = \frac{1}{mt} \times m \times \sum_{k'=1}^{t} u_{k'} = \frac{1}{mt} \times m \times t \times v_t = v_t$$

▷ **Pour** $r \in \mathbb{N}$ **tel que** $0 \leqslant r \leqslant t-1$**, nous avons** $(mt+r)\, v_{mt+r} = mtv_t + rv_r$
Nous avons :

$$\begin{aligned}(mt+r)\, v_{mt+r} &= \sum_{k=1}^{mt+r} u_k = \sum_{k=1}^{mt} u_k + \sum_{k=mt+1}^{mt+r} u_k \\ &= mtv_{mt} + \sum_{k'=1}^{r} u_{k'+mt} \\ &= mtv_{mt} + \sum_{k'=1}^{r} u_{k'} \\ &= mtv_{mt} + rv_r\end{aligned}$$

▷ **Démontrons que** $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = v_t$
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et r_n tel que $n \equiv r_n\,[t]$; alors $n = kt + r_n$ avec $0 \leqslant r_n \leqslant t-1$. Alors,

$$nv_n = ktv_t + r_n v_{r_n} = (n - r_n)\, v_t + r_n v_{r_n} = nv_t + r_n\left(v_{r_n} - v_t\right)$$

De telle sorte que :

$$v_n = v_t + \frac{r_n}{n}\left(v_{r_n} - v_t\right)$$

<u>Montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{r_n}{n}\left(v_{r_n} - v_t\right) = 0$</u>

Là, c'est plus facile !! En passant à la valeur absolue, nous avons $\left|v_{r_n} - v_t\right| \leqslant 2\sum\limits_{k=1}^{t} |u_k|$, et donc :

$$\left|\frac{r_n}{n}\left(v_{r_n} - v_t\right)\right| \leqslant \frac{t-1}{n} 2\sum_{k=1}^{t} |u_k|$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{t-1}{n} 2\sum\limits_{k=1}^{t} |u_k| = 0$, nous en déduisons que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{r_n}{n}\left(v_{r_n} - v_t\right) = 0$
Et donc, tout simplement, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = v_t$

Exercice 7 :

Donner les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{3n+4} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$

   Voilà une méthode des plus classiques :
   Pour tout $k = 1, \cdots, 3n+4$, nous avons :

$$\frac{1}{n^2+3n+4} \leqslant \frac{1}{n^2+k} \leqslant \frac{1}{n^2+1}$$

   Ensuite, en passant à la racine :

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+3n+4}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$

   Et donc, en passant à la sommation :

$$\sum_{k=1}^{3n+4} \frac{1}{\sqrt{n^2+3n+4}} \leqslant \sum_{k=1}^{3n+4} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leqslant \sum_{k=1}^{3n+4} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2+1}} \Longleftrightarrow \frac{3n+4}{\sqrt{n^2+3n+4}} \leqslant \sum_{k=1}^{3n+4} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leqslant \frac{3n+4}{\sqrt{n^2+1}}$$

   Maintenant, il y a 2 limites à étudier :

▷ $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{3n+4} \frac{3n+4}{\sqrt{n^2+3n+4}}$

Nous avons :

$$\frac{3n+4}{\sqrt{n^2+3n+4}} = \frac{n\left(3+\frac{4}{n}\right)}{\sqrt{n^2\left(1+\frac{3}{n}+\frac{4}{n^2}\right)}} = \frac{3+\frac{4}{n}}{\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{4}{n^2}}}$$

Et nous avons $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{3n+4}{\sqrt{n^2+3n+4}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3+\frac{4}{n}}{\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{4}{n^2}}} = 3$

▷ $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{3n+4}{\sqrt{n^2+1}}$

Nous avons :

$$\frac{3n+4}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{n\left(3+\frac{4}{n}\right)}{\sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}} = \frac{3+\frac{4}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}$$

Et nous avons $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{3n+4}{\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3+\frac{4}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = 3$

Et donc, en conclusion, d'après le théorème 1.3.2 dit théorème des gendarmes, nous avons : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{3n+4} k = 1^{3n+4} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} = 3$

2. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\mathrm{C}_n^k}$

Tout d'abord, remarquons que :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\mathrm{C}_n^k} = \frac{1}{\mathrm{C}_n^0} + \frac{1}{\mathrm{C}_n^n} + \frac{1}{\mathrm{C}_n^1} + \frac{1}{\mathrm{C}_n^{n-1}} + \sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\mathrm{C}_n^k}$$

C'est à dire, comme $\mathrm{C}_n^k = \mathrm{C}_n^{n-k}$:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\mathrm{C}_n^k} = 2 + \frac{2}{n} + \sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\mathrm{C}_n^k}$$

Or, pour tout $k = 2, \cdots, n-2$, $\mathrm{C}_n^2 \leqslant \mathrm{C}_n^k$, et donc, pour tout $k = 2, \cdots, n-2$, $\dfrac{1}{\mathrm{C}_n^k} \leqslant \dfrac{1}{\mathrm{C}_n^2}$, c'est à dire $\dfrac{1}{\mathrm{C}_n^k} \leqslant \dfrac{2}{n(n-1)}$. Donc, $0 \leqslant \displaystyle\sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\mathrm{C}_n^k} \leqslant \frac{2(n-3)}{n(n-1)}$.

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{2(n-3)}{n(n-1)} = 0$, nous avons $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\mathrm{C}_n^k} = 0$ et comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n} = 0$, nous en déduisons que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\mathrm{C}_n^k} = 2$

Exercice 8 :

1. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *une suite croissante. On pose pour tout* $n \in \mathbb{N}$

$$v_n = \frac{u_0 + u_1 + \cdots + u_n}{n+1}$$

Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est croissante.*

Nous allons donc évaluer $v_{n+1} - v_n$:

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - v_n &= \frac{u_0 + u_1 + \cdots + u_n + u_{n+1}}{n+2} - \frac{u_0 + u_1 + \cdots + u_n}{n+1} \\
&= \frac{(n+1)(u_0 + u_1 + \cdots + u_n + u_{n+1}) - (n+2)(u_0 + u_1 + \cdots + u_n)}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{(n+1)(u_0 + u_1 + \cdots + u_n) + (n+1)u_{n+1} - (n+1)(u_0 + u_1 + \cdots + u_n) - (u_0 + u_1 + \cdots + u_n)}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{(n+1)u_{n+1} - (u_0 + u_1 + \cdots + u_n)}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{(u_{n+1} - u_0) + (u_{n+1} - u_1) + \cdots + (u_{n+1} - u_n)}{(n+1)(n+2)}
\end{aligned}$$

Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est une suite croissante, nous avons, pour tout $k = 0, \cdots, n$, $u_{n+1} \geqslant u_k$, et donc $\dfrac{(u_{n+1} - u_0) + (u_{n+1} - u_1) + \cdots + (u_{n+1} - u_n)}{(n+1)(n+2)} \geqslant 0$, c'est à dire $v_{n+1} - v_n \geqslant 0$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

On démontrerait de la même manière que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite décroissante, alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

2. *Etudier les variations de la la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie, pour $n \in \mathbb{N}^*$ par : $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{kn}$*

La suite $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante, et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est du type :

$$u_n = \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}}{n}$$

D'après la question précédente, cette suite est décroissante

Exercice 9 :

Etudier les variations des suites suivantes :

1. $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k}$

Regardons, cette fois ci, le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$. Si ce quotient est supérieur à 1, alors la suite est croissante ; si ce quotient est inférieur à 1, alors la suite est décroissante.

$$\begin{aligned}
\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\displaystyle\prod_{k=1}^{n+1} \frac{2k-1}{2k}}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k}} \\
&= \frac{2n+1}{2n+2}
\end{aligned}$$

Comme $\dfrac{2n+1}{2n+2} < 1$, alors $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

2. $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$

Pas très difficile !

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - v_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1+k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \\
&= \sum_{k=2}^{n+2} \frac{1}{n+k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \\
&= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} \\
&= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \\
&= \frac{2n+2-2n+1}{(2n+1)(2n+2)} \\
&= \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}
\end{aligned}$$

Donc $v_{n+1} - v_n > 0$ et la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

D'autre part, comme, pour $k = 1, \cdots, n$, nous avons $\dfrac{1}{n+n} \leqslant \dfrac{1}{n+k} \leqslant \dfrac{1}{n+1}$, en passant à la sommation, nous obtenons :

$$\frac{1}{2} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \leqslant \frac{1}{n+1} < 1$$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc majorée. Croissante et majorée, on en déduit qu'elle est convergente.

3. $w_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2n+2k-1}$

Comme précédemment, nous allons évaluer $w_{n+1} - w_n$

$$\begin{aligned}
w_{n+1} - w_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{2(n+1)+2k-1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2n+2k-1} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{2n+2k+1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2n+2k-1} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{2n+2(k+1)-1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2n+2k-1} \\
&= \sum_{k=2}^{n+2} \frac{1}{2n+2k-1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2n+2k-1} \\
&= \frac{1}{2n+2(n+1)-1} + \frac{1}{2n+2(n+2)-1} - \frac{1}{2n+1} \\
&= \frac{(2n+1)(4n+3) + (4n+1)(2n+1) - (4n+1)(4n+3)}{(4n+1)(4n+3)(2n+1)} \\
&= \frac{1}{(4n+1)(4n+3)(2n+1)}
\end{aligned}$$

Donc $w_{n+1} - w_n > 0$ et la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Cherchons à savoir si elle est majorée

Pour tout $k = 1, \cdots, n$, nous avons $\dfrac{1}{4n-1} \leqslant \dfrac{1}{2n+2k-1} \leqslant \dfrac{1}{2n+1}$, et donc, en passant à la sommation :

$$0 < \frac{n}{4n-1} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2n+2k-1} \leqslant \frac{n}{2n+1} < \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc majorée par $\dfrac{1}{2}$. Croissante et majorée, elle est donc convergente.

Exercice 10 :

On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$. Démontrer que c'est une suite convergente

- Nous allons montrer que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

$$U_{n+1} - U_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2}$$

Comme $\frac{1}{(n+1)^2} > 0$, nous avons $U_{n+1} - U_n > 0$ et donc la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante

- Montrons que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

Pour $k \geqslant 2$, nous avons $k^2 > k^2 - k$, et donc pour $k \geqslant 2$, nous avons $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k^2-k}$. En passant à la sommation :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} < 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-k}$$

Or, $\frac{1}{k^2-k} = \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$, et donc

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-k} = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{n}$$

De telle sorte que $U_n < 2 - \frac{1}{n} < 2$

La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc majorée par 2.

Nous avons démontré que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée ; elle est donc convergente.

1.9.2 Quelques exercices de synthèse sur les suites

Exercice 11 :

Déterminer la limite de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $w_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{2}{k}\right)^{\frac{k}{n}}$

Nous commençons par prendre le logarithme de w_n. Appelons donc $X_n = \ln w_n$. Alors :

$$\begin{aligned} X_n &= \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\left(1 + \frac{2}{k}\right)^{\frac{k}{n}}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \ln\left(1 + \frac{2}{k}\right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k \ln\left(1 + \frac{2}{k}\right) \end{aligned}$$

La suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ apparaît alors comme une somme de Césaro. Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = n \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right)$, il suffit de connaître $\lim_{n\to+\infty} u_n$ pour connaître $\lim_{n\to+\infty} X_n$

$$n \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right) = \frac{\ln\left(1 + \frac{2}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \frac{2\ln\left(1 + \frac{2}{n}\right)}{\frac{2}{n}}$$

Or, $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{2}{n}\right)}{\frac{2}{n}} = 1$ et donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = 2$

Ainsi $\lim_{n\to+\infty} X_n = 2$, c'est à dire $\lim_{n\to+\infty} \ln w_n = 2$, et nous en déduisons que $\lim_{n\to+\infty} w_n = e^2$

Exercice 12 :

1. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite numérique telle que* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} - u_n = l$ *avec* $l \in \mathbb{K}$.
   Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{n} = l$

   Nous appelons $x_n = u_{n+1} - u_n$ et $v_n = \dfrac{x_0 + x_1 + \cdots + x_n}{n+1}$. Par le théorème de Cesaro 1.1.6, nous pouvons dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$.
   Regardons maintenant à quoi est égal v_n :

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{x_0 + x_1 + \cdots + x_n}{n+1} \\ &= \frac{(u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + \cdots + (u_{n+1} - u_n)}{n+1} \\ &= \frac{u_{n+1} - u_0}{n+1} \end{aligned}$$

   C'est à dire $\dfrac{u_{n+1}}{n+1} = v_n + \dfrac{u_0}{n+1}$.
   Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_0}{n+1} = 0$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$, nous déduisons que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{n+1} = l$.
   Ce que nous voulions

2. *Soit* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite numérique telle que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in \mathbb{R}^{*+}$ (i.e. $x_n > 0$). *Montrez que si* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = l$ *avec* $l \in \mathbb{R}^+$, *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n} = l$

   (a) Appliquer ce résultat à l'étude de :

      i. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\mathrm{C}_{2n}^{n}}$ ii. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n!}$ iii. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$

   (b) Montrer, par des contre-exemples, que la réciproque est fausse

1.9.3 Calculs de limites

Exercice 13 :

Pour $a \in \mathbb{R}$ *et* $b \in \mathbb{R}$, *on suppose* $a^2 - 4b < 0$, *c'est à dire* $b > 0$ *et* $|a| < 2\sqrt{b}$.
Donner $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n^2 + an + b} - \sqrt{n}$

Nous avons :

$$\begin{aligned} \sqrt{n^2 + an + b} - \sqrt{n} &= \frac{n^2 + an + b - n}{\sqrt{n^2 + an + b} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{n^2 + (a-1)\,n + b}{\sqrt{n^2 + an + b} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{n^2 + (a-1)\,n + b}{\sqrt{n^2 + an + b} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{n^2\left(1 + \frac{(a-1)}{n} + \frac{b}{n^2}\right)}{n\sqrt{1 + \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2}} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{n^2\left(1 + \frac{(a-1)}{n} + \frac{b}{n^2}\right)}{n\left(\sqrt{1 + \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2}} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)} \\ &= \frac{n\left(1 + \frac{(a-1)}{n} + \frac{b}{n^2}\right)}{\sqrt{1 + \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2}} + \frac{1}{\sqrt{n}}} \\ &= n \times \frac{1 + \frac{(a-1)}{n} + \frac{b}{n^2}}{\sqrt{1 + \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2}} + \frac{1}{\sqrt{n}}} \end{aligned}$$

Nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{1+\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}}+\frac{1}{\sqrt{n}} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\frac{(a-1)}{n}+\frac{b}{n^2} = 1$

Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} n \times \dfrac{1+\frac{(a-1)}{n}+\frac{b}{n^2}}{\sqrt{1+\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}}+\frac{1}{\sqrt{n}}} = +\infty$

En conclusion, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n^2+an+b}-\sqrt{n} = +\infty$

Exercice 14 :

Etudier les limites lorsque n tend vers $+\infty$ des suites suivantes :

1. $w_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{2n} e^{-\sqrt{k}}$

   De la décroissance de la fonction e^{-x}, nous avons pour tout $k = n, \cdots, 2n$,

   $$e^{-\sqrt{2n}} \leqslant e^{-\sqrt{k}} \leqslant e^{-\sqrt{n}}$$

   Et donc, en passant à la sommation :

   $$(n+1)\,e^{-\sqrt{2n}} \leqslant \sum_{k=n}^{2n} e^{-\sqrt{k}} \leqslant (n+1)\,e^{-\sqrt{n}}$$

   Des résultats sur les croissances comparées, nous avons :

   $$\lim_{n\to+\infty} (n+1)\,e^{-\sqrt{2n}} = \lim_{n\to+\infty} (n+1)\,e^{-\sqrt{n}} = 0$$

   Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\sum_{k=n}^{2n} e^{-\sqrt{k}} = 0$

2. $u_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}\left(2-\frac{k}{n}\right)$

   Tout d'abord nous pouvons écrire $\left(2-\dfrac{k}{n}\right) = 2\left(1-\dfrac{k}{2n}\right)$ et donc :

   $$u_n = \prod_{k=0}^{n-1}\left(2-\frac{k}{n}\right) = 2^n \prod_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{k}{2n}\right)$$

   A TERMINER

Exercice 15 :

Nous allons démontrer que la suite $(\cos n\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ n'admet pas de limite

1. *Que pouvons nous dire si $\sin\alpha = 0$?*

   Il est clair que $\sin\alpha = 0 \iff \alpha = k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et que $\cos n\alpha$ devient $\cos n\alpha = \cos nk\pi = (-1)^n$, suite qui n'admet pas de limite.

2. *On suppose maintenant que $\alpha \neq k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$*
   Nous voulons montrer que la suite $(\cos n\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de limite. On suppose le contraire et nous appelons l le nombre tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos n\alpha = l$.

   (a) *Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin n\alpha = l \times \dfrac{\cos\alpha - 1}{\sin\alpha}$*

   Nous allons étudier $\cos(n+1)\alpha$.
   ▷ Tout d'abord, $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos(n+1)\alpha = l$

▷ D'autre part, en utilisant les formules d'addition :

$$\cos(n+1)\alpha = \cos n\alpha \cos\alpha - \sin n\alpha \sin\alpha \Longleftrightarrow \sin n\alpha = \frac{\cos n\alpha\cos\alpha - \cos(n+1)\alpha}{\sin\alpha}$$

En passant à la limite, nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin n\alpha = \dfrac{l\cos\alpha - l}{\sin\alpha} = l \times \dfrac{\cos\alpha - 1}{\sin\alpha}$
D'où le résultat

(b) *En considérant $\sin 2n\alpha$, montrer que $l = 0$ ou $l = \dfrac{1}{2}$*

Suivons donc ce qui est proposé :

$$\sin 2n\alpha = 2\sin n\alpha \cos n\alpha$$

Et donc, par passage à la limite, nous avons : $l = 2l^2$ d'où on tire $l = 0$ ou $l = \dfrac{1}{2}$

(c) *En considérant $\cos 2n\alpha$, montrer que $l = 2l^2 - 1$*

Toujours par les formules trigonométriques, $\cos 2n\alpha = 2\cos^2 n\alpha - 1$, et en passant à la limite, nous avons $l = 2l^2 - 1$

(d) *Conclure*

La limite l doit vérifier simultanément 2 équations du second degré ; pour l'une $l = 0$ ou $l = \dfrac{1}{2}$; ces valeurs ne vérifient pas le seconde équation

Donc, l'hypothèse de convergence de la suite $(\cos n\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ est contradictoire. La suite $(\cos n\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet donc pas de limite.

Exercice 16 :

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite numérique réelle telle que :

— *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons : $x_n \geqslant 0$*
— *Il existe $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$ avec $0 \leqslant \alpha + \beta < 1$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+3} \leqslant \alpha x_{n+2} + \beta x_n$*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on construite la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ par : $u_n = \max\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}\}$

Tout d'abord, par construction, on peut remarquer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant x_n \leqslant u_n$.

1. *Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante*

   ▷ Tout d'abord, remarquons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+3} \leqslant u_n$; en effet :

   $$x_{n+3} \leqslant \alpha x_{n+2} + \beta x_n \leqslant \alpha u_n + \beta u_n \leqslant (\alpha+\beta)\, u_n \leqslant u_n$$

   ▷ Si $u_n = x_n$, alors :
   $x_n \geqslant x_{n+1}$ et $x_n \geqslant x_{n+2}$; comme $x_{n+3} \leqslant u_n$, $x_n \geqslant x_{n+3}$ et donc $x_n \geqslant \max\{x_{n+1}; x_{n+2}; x_{n+3}\}$, c'est à dire $u_n \geqslant u_{n+1}$

   ▷ Si $u_n = x_{n+1}$ ou $u_n = x_{n+2}$, alors, de l'inégalité $x_{n+3} \leqslant u_n$, nous déduisons $x_{n+3} \leqslant x_{n+1}$ ou $x_{n+3} \leqslant x_{n+2}$.
   Comme $u_{n+1} = \max\{x_{n+1}; x_{n+2}; x_{n+3}\}$, nous avons $u_{n+1} = x_{n+1}$ ou $u_{n+1} = x_{n+2}$, c'est à dire, en fait, $u_{n+1} = u_n$

   Donc, de manière générale, nous avons $u_{n+1} \leqslant u_n$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante

2. *Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+3} \leqslant (\alpha+\beta)\, u_n$*

   ▷ Nous avons $u_{n+3} = \max\{x_{n+3}; x_{n+4}; x_{n+5}\}$, et nous avons déjà montré, dans la question 1 que $x_{n+3} \leqslant (\alpha+\beta)\, u_n$

   ▷ Donc, $x_{n+4} \leqslant (\alpha+\beta)\, u_{n+1} \leqslant (\alpha+\beta)\, u_n$

   ▷ Et, $x_{n+5} \leqslant (\alpha+\beta)\, u_{n+2} \leqslant (\alpha+\beta)\, u_{n+1} \leqslant (\alpha+\beta)\, u_n$

   Donc, $u_{n+3} \leqslant (\alpha+\beta)\, u_n$

3. *Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant (\alpha+\beta)^{\left[\frac{n}{3}\right]} u_0$ où le symbole $[\bullet]$ désigne la partie entière.*

   Nous utilisons l'inégalité $u_{n+3} \leqslant (\alpha+\beta)\, u_n$ et allons envisager 3 cas. En fait, nous allons regarder les congruences modulo 3

▷ Si $n = 3k$ avec $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{array}{rl} u_3 \leqslant & (\alpha+\beta)\, u_0 \\ u_6 \leqslant & (\alpha+\beta)\, u_3 \\ u_9 \leqslant & (\alpha+\beta)\, u_6 \\ \vdots & \quad \vdots \\ u_{3k} \leqslant & (\alpha+\beta)\, u_{3(k-1)} \end{array}$$

En multipliant termes à termes, nous obtenons, après simplification : $u_{3k} \leqslant (\alpha+\beta)^k\, u_0$

▷ Si $n = 3k+1$ avec $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{array}{rl} u_4 \leqslant & (\alpha+\beta)\, u_1 \\ u_7 \leqslant & (\alpha+\beta)\, u_4 \\ u_{10} \leqslant & (\alpha+\beta)\, u_7 \\ \vdots & \quad \vdots \\ u_{3k+1} \leqslant & (\alpha+\beta)\, u_{3(k-1)+1} \end{array}$$

En multipliant termes à termes, nous obtenons, après simplification : $u_{3k+1} \leqslant (\alpha+\beta)^k\, u_1$. Comme $u_1 \leqslant u_0$, nous avons $u_{3k+1} \leqslant (\alpha+\beta)^k\, u_0$

▷ Si $n = 3k+2$ avec $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{array}{rl} u_5 \leqslant & (\alpha+\beta)\, u_2 \\ u_8 \leqslant & (\alpha+\beta)\, u_5 \\ u_{11} \leqslant & (\alpha+\beta)\, u_8 \\ \vdots & \quad \vdots \\ u_{3k+2} \leqslant & (\alpha+\beta)\, u_{3(k-1)+2} \end{array}$$

En multipliant termes à termes, nous obtenons, après simplification : $u_{3k+2} \leqslant (\alpha+\beta)^k\, u_2$. Comme $u_2 \leqslant u_0$, nous avons $u_{3k+2} \leqslant (\alpha+\beta)^k\, u_0$

Si $n = 3k+p$, avec $p = 0, 1, 2$ $k = \left[\dfrac{n}{3}\right]$, nous avons donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant (\alpha+\beta)^{\left[\frac{n}{3}\right]} u_0$

4. *En déduire* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$

Comme $0 \leqslant \alpha+\beta < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} (\alpha+\beta)^{\left[\frac{n}{3}\right]} = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Comme $x_n \leqslant u_n$, et d'après le théorème 1.3.1 de majoration, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$

1.9.4 Variation des suites

Exercice 17 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite numérique réelle. Montrer qu'il existe 2 suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, l'une croissante et l'autre décroissante, telles que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} + (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$

La résolution de cet exercice est basée sur 2 faits très classiques :

— Le premier, c'est que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k - u_{k-1}$

— Le second, que $u_k - u_{k-1} = \max\{u_k - u_{k-1}; 0\} + \min\{u_k - u_{k-1}; 0\}$

De telle sorte que

$$u_n = u_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(\max\{u_k - u_{k-1}; 0\} + \min\{u_k - u_{k-1}; 0\}\right) = u_0 + \sum_{k=1}^{n} \max\{u_k - u_{k-1}; 0\} + \sum_{k=1}^{n} \min\{u_k - u_{k-1}; 0\}$$

— Nous appelons $v_n = u_0 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \max\{u_k - u_{k-1}; 0\}$ et $w_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \min\{u_k - u_{k-1}; 0\}$

— La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

En effet, $v_{n+1} - v_n = \left(u_0 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \max\{u_k - u_{k-1}; 0\}\right) - \left(u_0 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \max\{u_k - u_{k-1}; 0\}\right) = \max\{u_{n+1} - u_n; 0\}$.

Or, $\max\{u_{n+1} - u_n; 0\} \geqslant 0$ et donc $v_{n+1} - v_n \geqslant 0$ et la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

— Nous démontrerions de même que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
Nous avons ainsi prouvé l'existence de 2 suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, l'une croissante et l'autre décroissante, telles que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} + (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Exercice 18 :

1. *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite croissante qui admet une limite l. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $x_n \leqslant l$*

   Supposons le contraire, c'est à dire qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x_{n_0} > l$, c'est à dire $(x_{n_0} - l) > 0$
   Soit $\varepsilon = \dfrac{(x_{n_0} - l)}{2}$. Alors, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, si $n \geqslant N$, alors $|x_n - l| \leqslant \dfrac{(x_{n_0} - l)}{2}$, c'est à dire que pour $n \geqslant N$:

   $$|x_n - l| \leqslant \frac{(x_{n_0} - l)}{2} \Longleftrightarrow -\frac{(x_{n_0} - l)}{2} \leqslant x_n - l \leqslant \frac{(x_{n_0} - l)}{2} \Longrightarrow x_n \leqslant \frac{(x_{n_0} + l)}{2} < x_{n_0}$$

   Ce qui contredit le fait que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ soit une suite croissante.
   Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $x_n \leqslant l$
2. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite croissante. Montrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ admet une suite extraite convergente, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est convergente*

   Soit $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une fonction croissante telle que $v_n = u_{\sigma(n)}$; on appelle $l = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$
   Soit $\varepsilon > 0$
   Il existe donc $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N_\varepsilon$, alors $|v_n - l| < \varepsilon$, c'est à dire, en fait, d'après la question 1, si $n \geqslant N_\varepsilon$, alors $l - \varepsilon \leqslant v_n \leqslant l$
   Donc, si $n \geqslant \sigma(N_\varepsilon)$, nous avons $\sigma(n) \geqslant n \geqslant \sigma(N_\varepsilon) \geqslant N_\varepsilon$ et donc, $l - \varepsilon \leqslant u_{\sigma(N_\varepsilon)} \leqslant u_n \leqslant u_{\sigma(n)} \leqslant l$, c'est à dire $|u_n - l| < \varepsilon$.
   Et donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$

Exercice 19 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite bornée telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2u_n \leqslant u_{n+1} + u_{n-1}$.
On appelle $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_{n+1} - u_n$. Etudier la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

- ▷ <u>La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est croissante</u>
  En effet, $v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1}$; or, d'après les hypothèses, $2u_{n+1} \leqslant u_{n+2} + u_n \Longleftrightarrow u_{n+2} \geqslant 2u_{n+1} - u_n$, et donc :

  $$v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} \geqslant 2u_{n+1} - u_n - u_{n+1} \Longleftrightarrow v_{n+1} \geqslant u_{n+1} - u_n = v_n$$

  La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est donc croissante
- ▷ <u>La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est bornée</u>
  Il suffit de considérer l'hypothèse qui nous dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est une suite bornée et d'utiliser la valeur absolue pour montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est une suite bornée :

  $$|v_n| = |u_{n+1} - u_n| \leqslant |u_{n+1}| + |u_n| \leqslant 2M$$

- ▷ <u>La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ admet pour limite $l = 0$</u>
  Comme la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est croissante et majorée, elle est convergente, et soit l cette limite.
  Supposons $l > 0$; alors, il existe un rang $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N_0$, alors $v_n > 0$, c'est à dire qu'à partir d'un certain rang $N_0 \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n > 0$, c'est à dire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est croissante à partir d'un certain rang. Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est bornée, elle admet donc une limite λ.
  Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} (u_{n+1} - u_n) = \lambda - \lambda = 0$
  La résolution aurait été semblable si nous avions supposé $l < 0$.
  Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$

Exercice 20 :

Etudier les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définies par :

◇ $u_0 = a$ ◇ $v_0 = b$ ◇ $u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$ ◇ $v_{n+1} = \dfrac{2u_n v_n}{u_n + v_n}$

Nous allons procéder en plusieurs étapes :

1. **Supposons** $a = b$ Alors, en procédant par une rérécurrence simple, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $u_n = v_n = a$
2. **Supposons** $a = -b$ Dès $n = 1$, v_1 n'est pas défini ! ! Donc si $a = -b$, les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne sont pas définies.
3. **Supposons** $a = 0$ **et** $b = 0$
   Alors, par une récurrence simple, on montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $u_n = 0$ et $v_n = 0$, ce qui veut dire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ sont la suite nulle
4. **Supposons** $a = 0$ **et** $b \neq 0$
   Nous allons montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est géométrique et que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est la suite nulle, c'est à dire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{b}{2^n}$ et $v_n = 0$
   ▷ C'est vrai pour $n = 1$: $u_1 = \dfrac{0+b}{2} = \dfrac{b}{2}$ et $v_1 = \dfrac{2\times 0\times b}{0+b} = 0$
   ▷ Supposons que pour $n \geqslant 1$, $u_n = \dfrac{b}{2^n}$ et $v_n = 0$
   ▷ Alors :
   $$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} = \frac{\frac{b}{2^n} + 0}{2} = \frac{b}{2^{n+1}} \text{ et } v_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} = \frac{2u_n \times 0}{u_n + v_n} = 0$$
   Ce que nous voulions.
5. **Supposons** $a \neq 0$ **et** $b = 0$
   Alors, $u_1 = \dfrac{a+0}{2} = \dfrac{a}{2}$ et $v_1 = \dfrac{2\times 0\times a}{0+a} = 0$ Nous pouvons montrer, en effectuant la même récurrence que précédement, que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est géométrique et que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est la suite nulle, c'est à dire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{a}{2^n}$ et $v_n = 0$
6. **Supposons** $a > 0$ **et** $b > 0$
   Nous allons montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
   (a) Une récurrence simple montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et $v_n > 0$
   (b) Montrons que pour $n \geqslant 1$, nous avons $u_n \geqslant v_n$
   $$\begin{aligned} u_{n+1} - v_{n+1} &= \frac{u_n + v_n}{2} - \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} \\ &= \frac{(u_n + v_n)^2 - 4u_n v_n}{2(u_n + v_n)} \\ &= \frac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)} \end{aligned}$$
   Comme $\dfrac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)} \geqslant 0$, nous avons aussi $u_{n+1} - v_{n+1} \geqslant 0$; ce que nous voulions
   (c) Etudions les variations de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$
   $$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} - v_n \\ &= \frac{2u_n v_n - u_n v_n - v_n^2}{u_n + v_n} \\ &= \frac{u_n v_n - v_n^2}{u_n + v_n} \\ &= \frac{v_n (u_n - v_n)}{u_n + v_n} \end{aligned}$$

Comme $u_n \geqslant v_n$, $u_n > 0$ et $v_n > 0$, nous avons $v_{n+1} - v_n \geqslant 0$ et la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante

(d) <u>Etudions maintenant les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$</u>

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{u_n + v_n}{2} - u_n \\ &= \frac{u_n + v_n - 2u_n}{2} \\ &= \frac{v_n - u_n}{2} \end{aligned}$$

Comme $u_n \geqslant v_n$, nous avons $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante

(e) <u>Démontrons maintenant que $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$</u>

Nous avons déjà calculé $u_{n+1} - v_{n+1}$; nous avons : $u_{n+1} - v_{n+1} = \dfrac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)}$.

Or :

$$u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)} = \frac{1}{2}\left(\frac{u_n - v_n}{u_n + v_n}\right)(u_n - v_n)$$

Comme $-v_n \leqslant v_n$, nous avons $0 < u_n - v_n \leqslant u_n + v_n$, c'est à dire $0 < \dfrac{u_n - v_n}{u_n + v_n} < 1$, et donc

$$u_{n+1} - v_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(u_n - v_n)$$

De là, nous pouvons déduire par une récurrence simple que $0 < u_n - v_n \leqslant \dfrac{1}{2^n}(u_0 - v_0)$. Nous en déduisons donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$

(f) Les 2 suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ sont donc adjacentes. Soit l leur limite commune. D'après les études précédentes, nous avons $l \geqslant 0$.

Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $w_n = u_n v_n$.

— Tout d'abord, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, et nous avons :

$$\lim_{n\to+\infty} w_n = \lim_{n\to+\infty} u_n v_n = \lim_{n\to+\infty} u_n \times \lim_{n\to+\infty} v_n = l^2$$

— Ensuite la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante. En effet :

$$w_{n+1} = u_{n+1}v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \times \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} = u_n v_n$$

Ainsi, nous avons $w_n = w_0 = u_0 v_0 = ab$, de telle sorte que $l^2 = ab$, et comme $l > 0$, nous avons $l = \sqrt{ab}$

7. **Supposons** $a < 0$ **et** $b < 0$

(a) Tout d'abord, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $u_n < 0$ et $v_n < 0$. La démonstration se fait par récurrence.

▷ C'est trivialement vrai pour $n = 0$

▷ Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n < 0$ et $v_n < 0$

▷ Alors, $u_n + v_n < 0$ et $u_n v_n > 0$ et donc $u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \leqslant 0$ et $v_{n+1} = \dfrac{2u_n v_n}{u_n + v_n} \leqslant 0$

(b) <u>Montrons que pour $n \geqslant 1$, nous avons $u_n \leqslant v_n$</u>

$$\begin{aligned} u_{n+1} - v_{n+1} &= \frac{u_n + v_n}{2} - \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} \\ &= \frac{(u_n + v_n)^2 - 4u_n v_n}{2(u_n + v_n)} \\ &= \frac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)} \end{aligned}$$

Comme $\dfrac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)} \leqslant 0$, nous avons aussi $u_{n+1} - v_{n+1} \leqslant 0$; ce que nous voulions

(c) Etudions les variations de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{2u_nv_n}{u_n+v_n} - v_n \\ &= \frac{2u_nv_n - u_nv_n - v_n^2}{u_n+v_n} \\ &= \frac{u_nv_n - v_n^2}{u_n+v_n} \\ &= \frac{v_n(u_n-v_n)}{u_n+v_n} \end{aligned}$$

Comme $u_n \leqslant v_n$ à partir de $n = 1$, $u_n < 0$ et $v_n < 0$, nous avons $v_{n+1} - v_n \leqslant 0$ et la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à partir de $n = 1$

(d) Etudions maintenant les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{u_n+v_n}{2} - u_n \\ &= \frac{u_n+v_n-2u_n}{2} \\ &= \frac{v_n-u_n}{2} \end{aligned}$$

Comme $u_n \leqslant v_n$ à partir de $n = 1$, nous avons $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante à partir de $n = 1$

(e) Démontrons maintenant que $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0$

Nous avons déjà calculé $v_{n+1} - u_{n+1}$; nous avons : $v_{n+1} - u_{n+1} = -\dfrac{(v_n-u_n)^2}{2(u_n+v_n)}$.

Or :

$$v_{n+1} - u_{n+1} = -\frac{(v_n-u_n)^2}{2(u_n+v_n)} = \frac{-1}{2}\left(\frac{v_n-u_n}{u_n+v_n}\right)(v_n-u_n)$$

Comme $u_n \leqslant v_n \leqslant 0 \leqslant -v_n$, nous avons

$$u_n + v_n \leqslant u_n - v_n \leqslant 0 \Longleftrightarrow 0 \leqslant v_n - u_n \leqslant -(u_n+v_n)$$

C'est à dire $0 < \dfrac{v_n-u_n}{u_n+v_n} \leqslant 1$, et donc

$$0 \leqslant v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(v_n-u_n)$$

De là, nous pouvons déduire par une récurrence simple que $0 < v_n - u_n \leqslant \dfrac{1}{2^n}(v_0-u_0)$. Nous en déduisons donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} (y_n - u_n) = 0$

(f) Les 2 suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ sont donc adjacentes. Soit l leur limite commune. D'après les études précédentes, nous avons $l \leqslant 0$.
Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $w_n = u_nv_n$.
— Tout d'abord, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, et nous avons :

$$\lim_{n\to+\infty} w_n = \lim_{n\to+\infty} u_nv_n = \lim_{n\to+\infty} u_n \times \lim_{n\to+\infty} v_n = l^2$$

— Ensuite la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante. En effet :

$$w_{n+1} = u_{n+1}v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2} \times \frac{2u_nv_n}{u_n+v_n} = u_nv_n$$

Ainsi, nous avons $w_n = w_0 = u_0v_0 = ab$, de telle sorte que $l^2 = ab$, et comme $l < 0$, nous avons $l = -\sqrt{ab}$

8. **Reste le cas où** $ab < 0$ C'est à dire que cas où a et b ont des signes contraires.En utilisant un petit programme, on s'aperçoit que les suites ont un comportement erratique. J'ai renoncé à les étudier.

Exercice 21 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *une suite de réels positifs ou nuls vérifiant :* $(\forall m \in \mathbb{N})\,(\forall n \in \mathbb{N})\,(u_{m+n} \leqslant u_m + u_n)$
Montrer que la suite $\left(\dfrac{u_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est convergente et que* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{n} = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\left(\dfrac{u_n}{n}\right)$

1. Soient $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}$ et $r \in \mathbb{N}$; alors $u_{pq+r} \leqslant qu_p + u_r$
   Cette démonstration se fait par récurrence sur q
   C'est évidemment vrai pour $q = 0$ **:** Nous avons $u_{0\times p+r} = u_r \leqslant 0 \times u_p + u_r$
   Supposons que $u_{pq+r} \leqslant qu_p + u_r$
   Démontrons la relation à l'ordre $q+1$ Nous avons
   $$u_{p(q+1)+r} = u_{pq+p+r} \leqslant u_p + u_{pq+r} \leqslant u_p + qu_p + u_r = (q+1)\,u_p + u_r$$
   C'est à dire $u_{p(q+1)+r} \leqslant (q+1)\,u_p + u_r$; ce que nous voulions.
2. Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $u_n \geqslant 0$, alors, pour $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons $\dfrac{u_n}{n} \geqslant 0$. La suite $\left(\dfrac{u_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc minorée et, la borne inférieure $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\left(\dfrac{u_n}{n}\right)$ existe.
   Soit $\lambda = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\left(\dfrac{u_n}{n}\right)$
3. Soit $\varepsilon > 0$
   De la définition de la borne inférieure, il existe $p_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $\lambda \leqslant \dfrac{u_{p_\varepsilon}}{p_\varepsilon} \leqslant \lambda + \varepsilon$
4. Pour $m \in \mathbb{N}$, on effectue la division euclidienne de m par p_ε :
   $$m = qp_\varepsilon + r \text{ avec } 0 \leqslant r < p_\varepsilon$$
   Et donc : $u_m \leqslant qu_{p_\varepsilon} + u_r$. Donc, pour $m \in \mathbb{N}^*$,
   $$\begin{aligned}\frac{u_m}{m} &\leqslant \frac{q}{m}u_{p_\varepsilon} + \frac{u_r}{m}\\ &\leqslant \frac{qp_\varepsilon}{m}\frac{u_{p_\varepsilon}}{p_\varepsilon} + \frac{u_r}{m}\end{aligned}$$
   On peut déjà écrire que $\dfrac{qp_\varepsilon}{m} \leqslant 1$ et que, donc :
   $$\frac{u_m}{m} \leqslant \frac{u_{p_\varepsilon}}{p_\varepsilon} + \frac{u_r}{m}$$
5. Soit $M = \sup\{u_r \text{ avec } 0 \leqslant r < p_\varepsilon\}$. Ce M existe puisque l'ensemble $\{u_r \text{ avec } 0 \leqslant r < p_\varepsilon\}$ est fini.
   Nous avons donc $\dfrac{u_m}{m} \leqslant \dfrac{u_{p_\varepsilon}}{p_\varepsilon} + \dfrac{M}{m}$
   Soit $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que si $m \geqslant N_\varepsilon$ alors $\dfrac{M}{m} \leqslant \varepsilon$
   Alors, pour $m \geqslant N_\varepsilon$, $\lambda \leqslant \dfrac{u_m}{m} \leqslant \dfrac{u_{p_\varepsilon}}{p_\varepsilon} + \varepsilon \leqslant \lambda + 2\varepsilon$, c'est à dire : $\lambda \leqslant \dfrac{u_m}{m} \leqslant \lambda + 2\varepsilon$
   Ce qui termine de montrer que $\lim\limits_{m\to+\infty} \dfrac{u_m}{m} = \lambda$

Nous avons donc bien $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{n} = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\left(\dfrac{u_n}{n}\right)$

Exercice 22 :

Nous considérons les deux suites numériques réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *définies par :*

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n!}$$

1. *Démontrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ sont adjacentes*

 ▷ — Nous avons : $u_n - v_n = \dfrac{1}{n!} > 0$ et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < v_n$

 — Ensuite, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est croissante ; en effet :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$$

 Et donc, $u_{n+1} > u_n$

 — De plus, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est décroissante :

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{2}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{2-(n+1)}{(n+1)!} = \frac{1-n}{(n+1)!}$$

 Donc $v_{n+1} - v_n \leqslant 0$ dès que $n \geqslant 1$, c'est à dire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est décroissante à partir du rang $n = 1$

 ▷ De plus $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n!}\right) = 0$

 ▷ Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ sont donc adjacentes

2. *Démontrer que leur limite commune l ne peut être rationnelle, c'est à dire que $l \notin \mathbb{Q}$*

 Soit donc l la limite commune à $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et supposons $l \in \mathbb{Q}$. Pour plus de simplification, supposons $l = \dfrac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{N}$ et $q \geqslant 2$.

 Nous avons donc :

$$u_q \leqslant l \leqslant v_q \Longleftrightarrow u_q \leqslant \frac{p}{q} \leqslant v_q \Longleftrightarrow u_q \leqslant \frac{p}{q} \leqslant u_q + \frac{1}{q!}$$

 Multiplions la dernière égalité par $q!$. Nous avons alors :

$$u_q \leqslant \frac{p}{q} \leqslant u_q + \frac{1}{q!} \Longleftrightarrow q!u_q \leqslant q!\frac{p}{q} \leqslant q!u_q + 1$$

 Nous avons :

 — $q!u_q \in \mathbb{N}$

 — $q!\dfrac{p}{q}u_q \in \mathbb{N}$

 Ce qui sous entend que $q!\dfrac{p}{q} \in \{q!u_q ; q!u_q + 1\} \Longleftrightarrow l \in \{u_q ; v_q\}$

 Si $l = u_q$, alors, $u_q < u_{q+1} < u_{q+2} < \cdots < l = u_q$, ce qui est absurde.

 De même, si $l = v_q$, alors $l = v_q > v_{q+1} > v_{q+2} > \cdots > l = v_q$, ce qui est tout aussi absurde.

 Donc , $l \notin \mathbb{Q}$

1.9.5 Suites de Cauchy

Exercice 23 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite numérique réelle définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2^n u_n}$$

Il faut montrer que cette suite est convergente

Nous allons montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est de Cauchy

1. Tout d'abord, on montre facilement, par récurrence, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$, puis, que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est croissante et que, donc, $u_n \geqslant 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

2. En suite, nous utilisons le fait général que $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) + u_0$

3. Alors, soient $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}$ tels que $p \geqslant q$. Alors :

$$0 \leqslant u_p - u_q = \sum_{k=q}^{p-1} (u_{k+1} - u_k) = \sum_{k=q}^{p-1} \frac{1}{2^k u_k} \leqslant \sum_{k=q}^{p-1} \frac{1}{2^k} = \frac{\frac{1}{2^q}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{p-q}\right)}{1 - \frac{1}{2}} \leqslant \frac{1}{2^q} \times 2 = \frac{1}{2^{q-1}}$$

   En effet, nous avons $\dfrac{1}{2^k u_k} \leqslant \dfrac{1}{2^k}$ car $u_k \geqslant 1$. Comme la suite $\left(\dfrac{1}{2^{n-1}}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est convergente et de limite 0, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $q > N$, alors $0 < \dfrac{1}{2^{q-1}} \leqslant \varepsilon$

   Et donc pour ce même $\varepsilon > 0$ il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p \in \mathbb{N}$, tout $q \in \mathbb{N}$, $p > q > N \Longrightarrow 0 \leqslant u_p - u_q \leqslant \varepsilon$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est de Cauchy, donc convergente.