Chapitre 3

Limites et continuité d'une fonction numérique

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à des fonctions ou applications de $\mathbb{R}$ ou d'une partie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$, $\mathbb{K}$ étant mis pour $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Une telle application est dite **fonction numérique d'une variable réelle**

3.1 Introduction

3.1.1 Rappels

Soient E et F, deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$, une ≪ correspondance ≫ entre ces deux ensembles

1. **f est une fonction si tous les éléments de E ont au plus une image**
2. **f est une application si tous les éléments de E ont exactement une image**
3. **Le graphe de f est l'ensemble $G \subset E \times F$ défini par :**

$$G = \{(x, f(x)) \ \textbf{où} \ x \in E\}$$

Remarque 1 :

1. Commençons par un exemple ; on considère la fonction suivante :

$$\begin{cases} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \quad x & \longmapsto & f(x) = \dfrac{1}{x+1} + \sqrt{-x} \end{cases}$$

   f est bien une fonction puisque les nombres strictement positifs n'ont pas d'image, ni même le nombre -1

2. Pour que f soit une application, nous recherchons le domaine de définition de f, c'est à dire l'ensemble des nombres qui ont tous exactement un image. Si nous appelons $\mathcal{D}_f$ le domaine de définition de f, ici, $\mathcal{D}_f =]-\infty; -1[\cup]-1; 0]$

3. En fait, qu'est qu'une fonction ?

   Une fonction f est la donnée d'un triplet (E, F, G) où E est l'ensemble de départ, F, l'ensemble d'arrivée, et G, le graphe de f.

   Ainsi, 2 fonctions *(ou applications)* f et g sont égales, si et seulement si :
   — Elles ont même ensemble de départ E
   — Elles ont même ensemble d'arrivée F
   — Pour tout $x \in E$, $f(x) = g(x)$

3.1.2 Définition de restriction

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application et $A \subset E$
Soit $\varphi : A \longrightarrow F$ une application telle que, pour tout $x \in A$, $\varphi(x) = f(x)$
φ est appellée restriction de f à A est est notée $\varphi = f_{/A}$

Remarque 2 :

Deux fonctions peuvent avoir la même restriction sur un ensemble, sans pour cela être égales :

Soient, par exemple :

$$\left\{\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & f[(x,y)] = x^2 + y \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & g[(x,y)] = x + y^2 \end{array}\right.$$

Sur la diagonale principale $\Delta = \{(x,y) \text{ tels que } y = x\}$ nous avons $f_{/\Delta} = g_{/\Delta}$ alors que $f \neq g$

3.2 Fonction numérique d'une variable réelle

3.2.1 Exemples de telles fonctions

1. Un premier exemple sont les suites numériques ; ce sont des fonctions numériques définies sur $\mathbb{N}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$

   On peut aussi voir certaines suites comme des restrictions à $\mathbb{N}$ de fonctions numériques, définies sur $\mathbb{R}$

   Exemple : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{n^2}{n^2+1}$ est la restriction à $\mathbb{N}$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$. Nous avons donc : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = f_{/\mathbb{N}}$

   L'intérêt d'une telle vision est d'étudier des propriétés sur $\mathbb{R}$ et de les transposer à $\mathbb{N}$

2. La fonction :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mathrm{Id} : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{Id}(x) = x \end{array}\right.$$

   est appelée l'application identique de $\mathbb{R}$

3. Pour $k \in \mathbb{K}$, la fonction

$$\left\{\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & f(x) = k \end{array}\right.$$

   est appelée fonction constante

4. Pour $b \in \mathbb{K}$, la fonction translation est définie par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & f(x) = x + b \end{array}\right.$$

5. Pour $a \in \mathbb{K}$, la fonction homothétie est définie par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & f(x) = ax \end{array}\right.$$

6. La fonction symétrie est définie par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = -x \end{array}\right.$$

7. Pour $a \in \mathbb{K}$ et $b \in \mathbb{K}$, nous appelons application affine, une fonction numérique du type :

$$\left\{\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & f(x) = ax + b \end{array}\right.$$

- ▷ On peut remarquer que si $a = 1$ et $b = 0$, nous obtenons l'application identique
- ▷ On peut remarquer que si $a = 0$, nous obtenons une application translation
- ▷ On peut remarquer que si $b = 0$, nous obtenons une application homothétie
- ▷ On peut remarquer que si $a = -1$ et $b = 0$, nous obtenons l'application symétrie

D'autre part, l'application $f(x) = ax + b$ est un polynôme du premier degré

8. Plus généralement, les polynômes $P \in \mathbb{R}_n[X]$ à une indéterminée et à coefficients dans $\mathbb{R}$, permettent de définir une fonction numérique à valeurs dans $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} P_n : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \quad x & \longmapsto & P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \end{cases}$$

9. Soient $A \in \mathbb{R}[X]$ et $B \in \mathbb{R}[X]$ 2 polynômes, et on suppose $f = \dfrac{A}{B}$ irréductible, f est alors appelée fonction rationnelle. Le domaine de définition de la fonction associée est donné par :

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \text{ tels que } B(x) \neq 0\}$$

Exemple : Soit $f(x) = \dfrac{x^4 - 1}{x^3 - 2x^2 - x + 2}$

Nous avons :

— $x^4 - 1 = \left(x^2 + 1\right)\left(x^2 - 1\right)$

— $x^3 - 2x^2 - x + 2 = \left(x^2 - 1\right)(x - 2)$

De telle sorte que $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x - 2}$ et est définie pour tout $x \neq 2$; nous avons, en particulier $f(1) = -2$

Remarque 3 :

Pour pouvoir être utilisées dans des exemples ou exercices, nous supposons connues les fonctions circulaires cos, sin et tan, l'exponentielle et les logarithmes.

Exercice 1 :

Donner les domaines de définition des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \sqrt{\sin 2x}$
2. $g(x) = \ln\left(\dfrac{2 + x}{2 - x}\right)$

Exercice 2 :

Construire les graphes des fonctions suivantes :

1. $f(x) = |x - 3| + |x + 1|$
2. $g(x) = \sqrt{x - [x]}$
3. $h(x) = [x] + \sqrt{x - [x]}$

où $[x]$ est mis pour la partie entière.

3.2.2 Fonctions bornées dans $\mathbb{R}$

1. **Une fonction f définie sur un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est dite majorée sur E si l'ensemble $f(E)$ est un ensemble majoré dans $\mathbb{R}$, c'est à dire, s'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in E$, $f(x) \leqslant A$**
2. **Une fonction f définie sur un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est dite minorée sur E si l'ensemble $f(E)$ est un ensemble minoré dans $\mathbb{R}$, c'est à dire, s'il existe $B \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in E$, $f(x) \geqslant B$**
3. **Une fonction f définie sur un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est dite bornée sur E si l'ensemble $f(E)$ est un ensemble à la fois majoré et minoré dans $\mathbb{R}$, c'est à dire, s'il existe $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $x \in E$, $B \leqslant f(x) \leqslant A$**

Remarque 4 :

1. Soit f une fonction définie sur un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est <u>non majorée</u> sur E si et seulement si, pour tout $A \in \mathbb{R}$, il existe $x \in E$ tel que $f(x) > A$.
   C'est très simplement la négation de la définition de fonction majorée sur E
2. De même, f une fonction définie sur un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est <u>non minorée</u> sur E si et seulement si, pour tout $B \in \mathbb{R}$, il existe $x \in E$ tel que $f(x) < B$.
   C'est toujours la négation de la définition de fonction minorée sur E
3. Si f est une fonction définie sur un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ bornée sur E, l'ensemble $f(E)$ admet une borne supérieure M et une borne inférieure m que nous notons :
   - ▷ $M = \sup\limits_{x \in E} f(x)$
   - ▷ $m = \inf\limits_{x \in E} f(x)$
4. La borne supérieure M est caractérisée par les 2 propriétés suivantes :
   ▷ Pour tout $x \in E$, $f(x) \leqslant M$
   ▷ Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x_0 \in E$ tel que $M - \varepsilon < f(x) \leqslant M$
5. De même, la borne inférieure m est caractérisée par les 2 propriétés suivantes :
   ▷ Pour tout $x \in E$, $f(x) \geqslant m$
   ▷ Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x_0 \in E$ tel que $m \leqslant f(x) < m + \varepsilon$

Exercice 3 :

Démontrez que la fonction définie sur $]0; +1]$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ n'est pas bornée sur $]0; +1]$

Exercice 4 :

Toutes les questions de cet exercice sont indépendantes l'une de l'autre

1. Soit f une fonction définie sur un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ bornée sur E. Montrer que $\inf\limits_{x \in E} f(x) = -\sup\limits_{x \in E}(-f(x))$
2. Soient f et g deux fonctions définies sur un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ bornées sur E telle que pour tout $x \in E$, $f(x) \leqslant g(x)$. Montrer que :
$$\sup_{x \in E} f(x) \leqslant \sup_{x \in E} g(x) \qquad \text{et} \qquad \inf_{x \in E} f(x) \leqslant \inf_{x \in E} g(x)$$
3. Soit f une fonction définie sur un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ bornée sur E et soit $A \subset E$. Montrer que :
$$\sup_{x \in A} f(x) \leqslant \sup_{x \in E} f(x) \qquad \text{et} \qquad \inf_{x \in A} f(x) \geqslant \inf_{x \in E} f(x)$$
4. Soient f et g deux fonctions définies sur un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ bornées sur E . Montrer que :
$$\sup_{x \in E}(f(x) + g(x)) \leqslant \sup_{x \in E} f(x) + \sup_{x \in E} g(x) \qquad \text{et} \qquad \sup_{x \in E} f(x) + \inf_{x \in E} g(x) \leqslant \sup_{x \in E}(f(x) + g(x))$$
5. Soient f et g deux fonctions définies sur un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ bornées sur E telle que pour tout $x \in E$, $f(x) \geqslant 0$ et $g(x) \geqslant 0$. Montrer que :
$$\sup_{x \in E}(f(x)\, g(x)) \leqslant \sup_{x \in E} f(x) \sup_{x \in E} g(x) \qquad \text{et} \qquad \sup_{x \in E} f(x) \inf_{x \in E} g(x) \leqslant \sup_{x \in E}(f(x)\, g(x))$$
6. Soit f une fonction définie sur un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ bornée sur E telle que pour tout $x \in E$, $f(x) > 0$. Montrer que :
$$\sup_{x \in E}\left(\frac{1}{f(x)}\right) = \frac{1}{\inf\limits_{x \in E} f(x)}$$

3.2.3 Proposition

Une fonction f définie sur un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est bornée sur E si et seulement si il existe $M > 0$ tel que, pour tout $x \in E$, $|f(x)| \leqslant M$

Démonstration

1. Supposons f bornée sur E
   Alors, il existe $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $x \in E$, $B \leqslant f(x) \leqslant A$. De cette inégalité, nous tirons $|f(x)| \leqslant \max\{|A|, |B|\}$
   En posant $M = \max\{|A|, |B|\}$, nous avons $M > 0$ et donc $|f(x)| \leqslant M$ pour tout $x \in E$
2. Réciproquement, supposons qu'il existe $M > 0$ tel que, pour tout $x \in E$, $|f(x)| \leqslant M$
   Alors, pour tout $x \in E$, $-M \leqslant f(x) \leqslant +M$, ce qui montre que f est bornée sur E

3.2.4 Définition de fonction bornée dans $\mathbb{C}$

Dans $\mathbb{C}$, ensemble des nombres complexes, il n'y a pas de relation d'ordre total compatible avec l'addition ou la multiplication ; nous ne pouvons donc pas parler de fonction majorée ou minorée. Nous avons, par contre la définition suivante :
Une fonction f définie sur un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ est dite bornée sur E si l'ensemble $f(E)$ est un ensemble borné dans $\mathbb{C}$, c'est à dire, s'il existe $M > 0$ tels que, pour tout $x \in E$, $|f(x)| \leqslant M$

Remarque 5 :

Bien entendu, une fonction f définie sur un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ n'est pas bornée sur E si pour tout $M > 0$, il existe $x \in E$ tel que $|f(x)| > M$

Exemple 1 :

Voici quelques exemples de fonctions bornées :

1. De manière très classique, nous avons, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leqslant \cos x \leqslant +1$
2. De même, nous avons, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 < e^{-x^2} \leqslant +1$
3. Et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\left|e^{ix}\right| = 1$ et apparaît donc comme une fonction bornée.

3.2.5 Extremum local

Soit f une fonction numérique définie sur $E \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$

1. **S'il existe $x_0 \in E$ et un voisinage V de x_0 tel que pour tout $x_0 \in V$ alors $f(x) \leqslant f(x_0)$, on dit que la fonction f admet en x_0 un maximum local**
2. **De même, s'il existe $x_0 \in E$ et un voisinage V de x_0 tel que pour tout $x_0 \in V$ alors $f(x) \geqslant f(x_0)$, on dit que la fonction f admet en x_0 un minimum local**

3.2.6 Variations d'une fonction

Soit f une fonction numérique définie sur $E \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$

1. **La fonction f est dite croissante sur E si, pour tout $x \in E$ et tout $y \in E$, l'implication suivante est vraie :**
$$x < y \Longrightarrow f(x) \leqslant f(y)$$
2. **La fonction f est dite décroissante sur E si, pour tout $x \in E$ et tout $y \in E$, l'implication suivante est vraie :**
$$x < y \Longrightarrow f(x) \geqslant f(y)$$

3. **La fonction f est dite strictement croissante sur E si, pour tout $x \in E$ et tout $y \in E$, l'implication suivante est vraie :**
$$x < y \Longrightarrow f(x) < f(y)$$
4. **La fonction f est dite strictement décroissante sur E si, pour tout $x \in E$ et tout $y \in E$, l'implication suivante est vraie :**
$$x < y \Longrightarrow f(x) > f(y)$$
5. **La fonction f est dite monotone sur E si elle est croissante ou décroissante sur E**
6. **La fonction f est dite strictement monotone sur E si elle est strictement croissante ou strictement décroissante sur E**

Remarque 6 :

1. Il est possible aussi d'utiliser le taux de variation $\dfrac{f(x) - f(y)}{x - y}$. Ainsi :
   - ▷ La fonction f est dite croissante sur E si, pour tout $x \in E$ et tout $y \in E$, alors, $x < y \Longrightarrow \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} \geqslant 0$
   - ▷ La fonction f est dite décroissante sur E si, pour tout $x \in E$ et tout $y \in E$, alors, $x < y \Longrightarrow \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} \leqslant 0$
2. Nous avons, bien ententendu *(et c'est facile à démontrer)*[1] :
   - Si f et g sont 2 fonctions croissantes alors $f + g$ est une fonction croissante
   - Si f et g sont 2 fonctions décroissantes alors $f + g$ est une fonction décroissante
   - Si f est une fonction croissante et si $\alpha \geqslant 0$ alors $\alpha \times f$ est une fonction croissante
   - La fonction f est croissante si et seulement si la fonction $-f$ est décroissante
   - Si f et g sont 2 fonctions croissantes **et positives** alors $f \times g$ est une fonction croissante

     Attention !!

     Il est important de prendre en compte la positivité de f et g

     Exemple :

     Soient $f(x) = g(x) = x$; toutes deux sont croissantes sur l'intervalle $[-1; +1]$, mais $h(x) = f(x) \times g(x) = x^2$ n'est pas du tout monotone sur $[-1; +1]$
   - Si f est une fonction croissante qui ne s'annule pas, alors $\dfrac{1}{f}$ est une fonction décroissante
3. Si f et g sont 2 fonctions monotones, sans autre précision, on ne peut rien conclure pour $f + g$

3.2.7 Composition des applications

Soient $E \subset \mathbb{R}$ et $F \subset \mathbb{K}$. Soient aussi $f : E \longrightarrow \mathbb{K}$ et $g : F \longrightarrow \mathbb{K}$ tels que $f(E) \cap F \neq \emptyset$
Nous pouvons alors construire $h : E \longrightarrow \mathbb{K}$ telle que $h(x) = g[h(x)] = g \circ f(x)$
Nous écrivons $h = g \circ f$

Remarque 7 :

1. Lorsque nous avons $f(E) \subset F$, la question est beaucoup plus simple.
2. Dans l'ensemble des fonctions de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$, nous créons une loi de composition $(f, g) \longrightarrow f \circ g$
3. La composition des applications **est associative**
4. Pour $A \subset \mathbb{R}$, et $h = g \circ f$, nous avons $h^{-1}(A) = f^{-1}\left[g^{-1}(A)\right]$

   En effet :
$$\begin{aligned} f^{-1}\left[g^{-1}(A)\right] &= \left\{x \in \mathbb{R} \text{ tels que } f(x) \in g^{-1}(A)\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} \text{ tels que } g[f(x)] \in A\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} \text{ tels que } h(x) \in A\right\} \\ &= h^{-1}(A) \end{aligned}$$

1. Le faire !!

Exemple 2 :

Soient $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) = \dfrac{1}{x}$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $g(x) = x + 1$. Alors :

- ▷ $g \circ f(x) = g[f(x)] = f(x) + 1 = \dfrac{1}{x} + 1 = \dfrac{x+1}{x}$
- ▷ $f \circ g(x) = f[g(x)] = \dfrac{1}{g(x)} = \dfrac{1}{x+1}$

Nous remarquons que nous avons $g \circ f \neq f \circ g$. La composition des applications n'est pas commutative.

Exercice 5 :

On donne les fonctions f et g définies par :

- ▷ $f(x) = \sin x$
- ▷ $g(x) = \dfrac{1}{x+1}$

Déterminer les fonctions $g \circ f$ et $f \circ g$

Exercice 6 :

Montrer que l'ensemble des 6 fonctions :

1. $f_1(x) = x$
2. $f_2(x) = \dfrac{1}{x}$
3. $f_3(x) = 1 - x$
4. $f_4(x) = \dfrac{1}{1-x}$
5. $f_5(x) = \dfrac{x-1}{x}$
6. $f_6(x) = \dfrac{x}{x-1}$

Est un groupe pour la loi de composition des applications. Etablir la table du groupe
Existe-t-il des sous groupes ?

Exercice 7 :

1. Pour tout $x \neq \dfrac{1}{2}$ on définit $g(x) = \dfrac{x-1}{2x-1}$. Démontrer que $g \circ g(x) = x$
2. Démontrer qu'il n'existe aucune application $f : \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{1}{2}\right\} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\left(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}\right) \left(f(x) \times f \circ g(x) = x^2 + x + 1\right)$$

Exercice 8 :

1. On définit $\varphi : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ par , pour $x \neq -1$, $\varphi(x) = \dfrac{-1}{x+1}$. Nous appelons $\varphi^2 = \varphi \circ \varphi$ et $\varphi^3 = \varphi^2 \circ \varphi = \varphi \circ \varphi^2 = \varphi \circ \varphi \circ \varphi$.
   Démontrer que, pour tout $x \neq -1$, $\varphi^3(x) = x$
2. Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}) \left(f(x) + f \circ \varphi(x) = 3x + 2\right)$$

3.2.8 Fonctions paires

1. **Soit** $\alpha > 0$ **et** $f :]-\alpha\,; +\alpha[\longrightarrow \mathbb{R}$. f **est dite paire si :** $(\forall x \in]-\alpha\,; +\alpha[) \left(f(x) = f(-x)\right)$
2. **Soit** $x_0 \in \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}$ **et** $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$. f **est dite symétrique par rapport à la droite** $x = x_0$ **si :** $(\forall h \in \mathbb{R}) \left(f(x_0 + h) = f(x_0 - h)\right)$

Remarque 8 :

Une fonction paire est une fonction qui admet donc l'axe des ordonnées comme axe de symétrie

Exemple 3 :

1. La fonction $\cos x$ est une fonction paire ; voir la figure 3.1

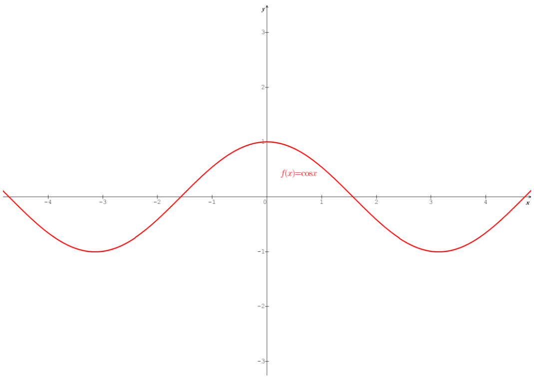

FIGURE 3.1 – Le graphe de $f(x) = \cos x$, symétrique par rapport à l'axe des ordonnées

2. Autres exemples de fonctions paires : les fonctions $f(x) = x^2$ (courbe 3.2) et $f(x) = x^4 - 2$ (courbe 3.3)

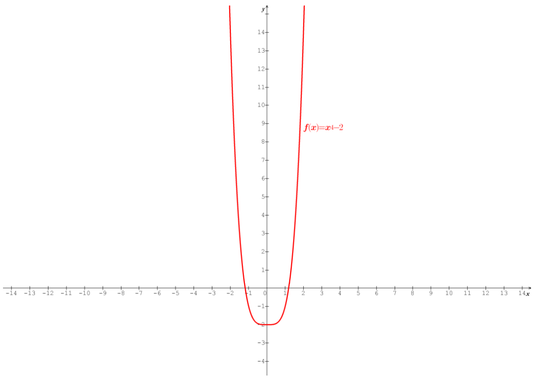

FIGURE 3.2 – Le graphe de $f(x) = x^2$

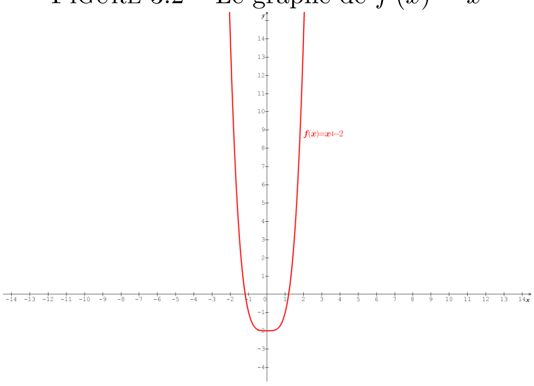

FIGURE 3.3 – Le graphe de $f(x) = x^4 - 2$

3. Les paraboles $f(x) = ax^2 + bx + c$ sont toutes symétriques par raport à la droite d'équation $x = -\dfrac{b}{2a}$ (cf figure 3.3).

En effet, en utilisant la forme canonique des lycées, nous avons : $f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x - \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$; il suffit ensuite, pour le démontrer, d'utiliser la définition

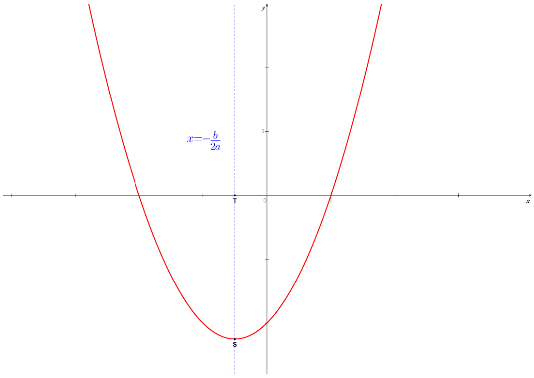

FIGURE 3.4 – Le graphe de $f(x) = ax^2 + bx + c$, symétrique par rapport à la droite $x = -\dfrac{b}{2a}$

3.2.9 Fonctions impaires

1. **Soit** $\alpha > 0$ **et** $f :]-\alpha\,; +\alpha[\longrightarrow \mathbb{R}$. f **est dite impaire si :** $(\forall x \in]-\alpha\,; +\alpha[)\,(-f(x) = f(-x))$
2. **Soit** $\Omega(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, $E \subset \mathbb{R}$ **et** $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$. f **est dite symétrique par rapport au point** Ω **si :** $(\forall h \in \mathbb{R})\,(y_0 - f(x_0 - h) = f(x_0 + h) - y_0)$

Remarque 9 :

Une fonction impaire est une fonction qui admet donc l'origine $O(0,0)$ comme centre de symétrie

Exemple 4 :

1. La fonction $\sin x$ est une fonction impaire ; voir la figure 3.5

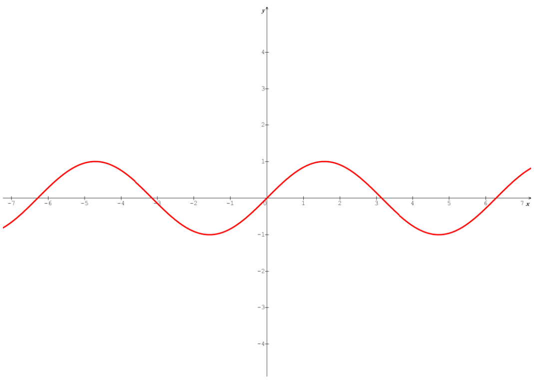

FIGURE 3.5 – Le graphe de $f(x) = \sin x$, symétrique par rapport à l'origine

2. Autres exemples de fonctions impaires : les fonctions $f(x) = x^3$ (courbe 3.6)
3. La fonction $f(x) = x^3 - 9x^2 + 27x - 28$ est symétrique par rapport au point $S(3; -1)$ (cf figure 3.7)

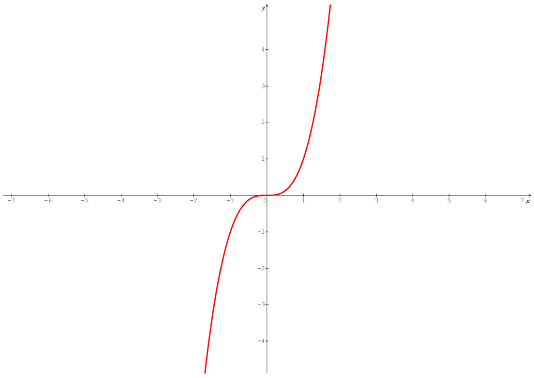

FIGURE 3.6 – Le graphe de $f(x) = x^3$

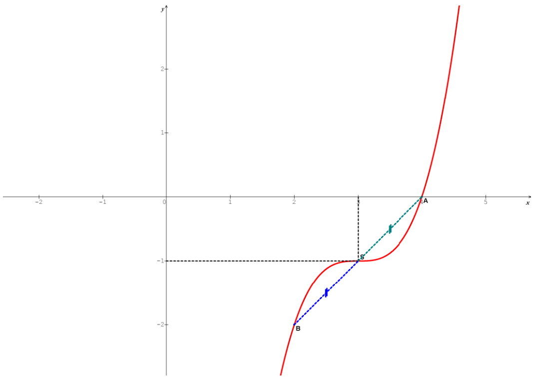

FIGURE 3.7 – Le graphe de $f(x) = x^3 - 9x^2 + 27x - 28$, symétrique par rapport au point $S(3; -1)$

Exercice 9 :

Démontrez que le graphe de la fonction $f(x) = x^3 - 9x^2 + 27x - 28$ est symétrique par rapport au point $S(3; -1)$

3.2.10 Fonctions périodiques

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}$, une fonction numérique d'une variable réelle. f est dite périodique s'il existe $T \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x+T) = f(x)$

Remarque 10 :

1. Si la fonction f admet une période T, alors, elle en admet une infinité.

   En effet, nous avons $f(x+2T) = f(x+T+T) = f(x+T) = f(x)$, et donc $2T$ est une période. Plus généralement, et en utilisant le raisonnement par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $f(x+nT) = f(x)$

   f admet donc une infinité dénombrale de périodes.
2. Si la fonction f admet comme période T, alors, elle en admet aussi $-T$ comme période.

   En effet, $f(x-T) = f(x-T+T) = f(x)$

   Et donc, plus généralement, et toujours par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x-nT) = f(x)$
3. On peut donc conclure que si T est une période de f, alors, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $f(x+nT) = f(x)$
4. Si T' est une autre période de f, alors $T+T'$ et $T-T'$ sont des périodes de f

   En effet :
   - ▷ $f(x+T+T') = f(x+T) = f(x)$

▷ $f(x+T-T') = f(x+T) = f(x)$

De telle sorte que l'ensemble des périodes d'une fonction f forme un groupe additif

5. **On appelle période le plus petit nombre positif T tel que $f(x+T) = f(x)$**

Exemple 5 :

1. De manière très classique, les fonctions $f(x) = \sin x$ et $g(x) = \cos x$ sont périodique et de période 2π
2. Un autre exemple de fonction périodique est :

$$\begin{cases} \exp : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \exp(x) = e^{ix} \end{cases}$$

exp est périodique et de période 2π

3. La fonction $f(x) = x - [x]$ est périodique et de période 1 (cf figure 3.8)

En effet

Si $x \in [n\,;\, n+1[$, alors $f(x) = x - n$; $x+1 \in [n+1\,;\, n+2[$ et $f(x+1) = x+1-(n+1) = x - n = f(x)$

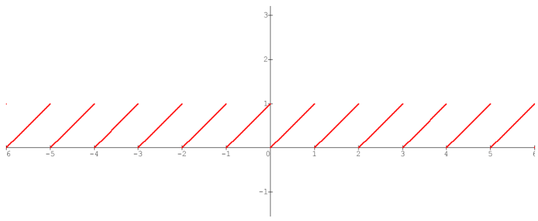

FIGURE 3.8 – Le graphe de $f(x) = x - [x]$, périodique et de période 1

Exercice 10 :

Quelle est la période de la fonction, définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $\text{EXP}(x) = \rho e^{2i\pi x}$ où $\rho > 0$ *(facile)*

3.2.11 Somme de 2 fonctions

Soit $E \subset \mathbb{R}$. On appelle $\mathcal{F}(E,\mathbb{K})$ ou $\mathbb{K}^E$, l'ensemble des fonctions numériques définies sur E et à valeurs dans $\mathbb{K}$. On définit, dans $\mathbb{K}^E$ une addition par :

$$\begin{cases} \mathbb{K}^E \times \mathbb{K}^E & \longrightarrow & \mathbb{K}^E \\ (f,g) & \longmapsto & f+g \end{cases}$$

Où $f+g$ est définie, pour tout $x \in E$ par $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

Exemple 6 :

Voici un exemple très simple :

▷ Soit $f : \mathbb{R}^{*+} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}^{*+}$ par $f(x) = \ln x$

▷ Soit $g : \mathbb{R}^{*+} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}^{*+}$ par $g(x) = x^2$

Alors, $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \ln x + x^2$

Remarque 11 :

L'ensemble $\mathcal{F}(E,\mathbb{K}) = \mathbb{K}^E$ muni de l'opération d'addition des fonctions est un groupe abélien

▷ Le neutre est la fonction nulle $\mathcal{O}$ qui, à tout $x \in E$ fait correspondre $\mathcal{O}(x) = 0$

▷ Le symétrique de la fonction $f \in \mathbb{K}^E$ est la fonction notée $-f$ qui, à tout $x \in E$ fait correspondre $(-f)(x) = -f(x)$

La structure de groupe de $\mathcal{F}(E,\mathbb{K}) = \mathbb{K}^E$ est intrinsèquement liée à celle de $\mathbb{K}$

3.2.12 Multiplication d'une fonction par un scalaire

Soit $E \subset \mathbb{R}$. On définit, dans $\mathbb{K}^E$ une multiplication par un scalaire par :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times \mathbb{K}^E & \longrightarrow & \mathbb{K}^E \\ (\lambda, f) & \longmapsto & \lambda f \end{array} \right.$$

Où λf est définie, pour tout $x \in E$ par $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$

Exemple 7 :

Si nous considérons la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(x) = e^{2i\pi x}$, alors, la fonction $(1+i) f$ est définie par :

$$((1+i) f)(x) = (1+i) f(x) = (1+i) e^{2i\pi x}$$

Remarque 12 :

1. **Voici une remarque importante :**
   $\mathcal{F}(E, \mathbb{K}) = \mathbb{K}^E$ muni de l'addition des fonctions définies en 3.2.11 et de la multiplication par un scalaire définie en 3.2.12 est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel
2. Toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ *(ou sur un sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0)*, à valeurs dans $\mathbb{K}$ peut être décomposée en la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
   En effet ; posons $g(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$ et $h(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$. On montre facilement que g est paire et que h est impaire et que $f = g + h$
3. La composition des applications est distributive à droite par rapport à l'addition, c'est à dire :
   $$\left(\forall f \in \mathbb{K}^{\mathbb{R}}\right) \left(\forall g \in \mathbb{K}^{\mathbb{R}}\right) \left(\forall h \in \mathbb{K}^{\mathbb{R}}\right) ((f+g) \circ h = f \circ h + g \circ h)$$
   En effet :
   Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :
   $$\begin{array}{rl} (f+g) \circ h(x) = & (f+g)[h(x)] \\ = & f[h(x)] + g[h(x)] \ \text{(par définition)} \\ = & f \circ h(x) + g \circ h(x) \end{array}$$
4. Nous n'avons, par contre, pas la distributivité à gauche.
   En effet, soient $f(x) = 2x$, $g(x) = x$ et $h(x) = x^2$
   ▷ $h \circ (f+g)(x) = h[(f+g)(x)] = h[f(x) + g(x)] = h[3x] = 9x^2$
   ▷ $[h \circ f](x) + [h \circ g](x) = h[f(x)] + h[g(x)] = 4x^2 + x^2 = 5x^2$
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $[h \circ f](x) + [h \circ g](x) \neq h \circ (f+g)(x)$, c'est à dire $h \circ (f+g) \neq h \circ f + h \circ g$
   La loi $\circ$ n'est donc pas distributive à gauche par rapport à l'addition

Exercice 11 :

Soit $E \subset \mathbb{R}$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0
On appelle $\mathrm{P}(E, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions paires définies sur E et à valeurs dans $\mathbb{K}$. De même, nous définissons $\mathrm{I}(E, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions impaires définies sur E et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

1. Démontrez que $\mathrm{P}(E, \mathbb{K})$ et $\mathrm{I}(E, \mathbb{K})$ sont des sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E, \mathbb{K}) = \mathbb{K}^E$
2. Démontrez que $\mathrm{P}(E, \mathbb{K})$ et $\mathrm{I}(E, \mathbb{K})$ sont des sous-espace vectoriel supplémentaires de $\mathcal{F}(E, \mathbb{K}) = \mathbb{K}^E$

3.2.13 Multiplication de 2 fonctions

Soit $E \subset \mathbb{R}$. On appelle toujours $\mathcal{F}(E, \mathbb{K})$ ou $\mathbb{K}^E$, l'ensemble des fonctions numériques définies sur E et à valeurs dans K. On définit, dans $\mathbb{K}^E$ une multiplication par :

$$\begin{cases} \mathbb{K}^E \times \mathbb{K}^E & \longrightarrow & \mathbb{K}^E \\ (f, g) & \longmapsto & f \times g \end{cases}$$

Où $f \times g$ est définie, pour tout $x \in E$ par $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$

Remarque 13 :

1. Il existe un élément neutre pour la multiplication ; c'est la fonction constante qui à tout $x \in E$ fait correspondre le nombre 1 :

$$\begin{cases} \mathrm{Un} : E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \mathrm{Un}(x) = 1 \end{cases}$$

2. Muni de la multiplication définie en 3.2.13 et de l'addition définie en 3.2.11, $\mathbb{K}^E$ est un anneau commutatif et unitaire

3.2.14 Inverse d'une fonction

Soit $E \subset \mathbb{R}$. Pour $f : E \longrightarrow \mathbb{K}$, on appelle $E^* = \{x \in E$ tels que $f(x) \neq 0\}$
On définit, dans $\mathbb{K}^{E^*}$ l'inverse de f par :

$$\begin{cases} \mathbb{K}^{E^*} & \longrightarrow & \mathbb{K}^{E^*} \\ f & \longmapsto & \dfrac{1}{f} \end{cases}$$

Où $\dfrac{1}{f}$ est définie, pour tout $x \in E^*$ par $\left(\dfrac{1}{f}\right)(x) = \dfrac{1}{f(x)}$

Remarque 14 :

Il est clair que nous pouvons définir, sur E^* le quotient de 2 fonctions : $\left(\dfrac{g}{f}\right)(x) = g(x) \times \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{g(x)}{f(x)}$

Exercice 12 :

On considère 2 fonctions f et g toutes deux définies sur $\mathbb{R}^*$:

- ▷ $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$
- ▷ $g(x) = x + 1$

Calculer $f \circ g(x)$ et $(f \times g)(x)$

3.2.15 Valeur absolue d'une fonction

Soit $E \subset \mathbb{R}$. Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{K}$. On définit, dans $\mathbb{K}^E$ la valeur de f par :

$$\begin{cases} \mathbb{K}^E & \longrightarrow & \mathbb{K}^E \\ f & \longmapsto & |f| \end{cases}$$

Où $|f|$ est définie, pour tout $x \in E$ par $(|f|)(x) = |f(x)|$

Remarque 15 :

1. La notation $|f|$ désigne la valeur absolue dans $\mathbb{R}$ et le module complexe si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$
2. De cette définition, nous tirons :
   - ▷ $|f| = \mathcal{O} \Longleftrightarrow f = \mathcal{O}$
   - ▷ Pour tout $f \in \mathbb{K}^E$ et tout $g \in \mathbb{K}^E$, $|fg| = |f|\,|g|$
   - ▷ **Inégalité triangulaire :** pour tout $f \in \mathbb{K}^E$ et tout $g \in \mathbb{K}^E$:

$$|f + g| \leqslant |f| + |g| \quad \text{et} \quad ||f| - |g|| \leqslant |f - g|$$

3.2.16 Relation d'ordre

Soit $E \subset \mathbb{R}$. On définit, dans $\mathbb{R}^E$ <u>une relation d'ordre</u> par :

$$(f \leqslant g) \Longleftrightarrow ((\forall x \in E)\,(f(x) \leqslant g(x)))$$

Remarque 16 :

1. Il faut remarquer que, dans cette définition, nous nous restreignons à $\mathbb{K} = \mathbb{R}$
2. Il n'est pas difficile de démontrer que c'est une relation d'ordre dans $\mathbb{R}^E$
3. Ce n'est pas une relation d'ordre total : il y a des fonctions qui ne sont pas comparables ; prenons les fonctions $f(x) = -x^2 + 1$ et $g(x) = x^2 - 1$, alors nous avons $f(-2) = -3$ et $g(-2) = 3$ et donc $f(-2) \leqslant g(-2)$ et nous avons $f(0) = +1$ et $g(0) = -1$ et $f(0) \geqslant g(0)$. *(Pour cette relation d'ordre, notez l'importance du quantificateur)*

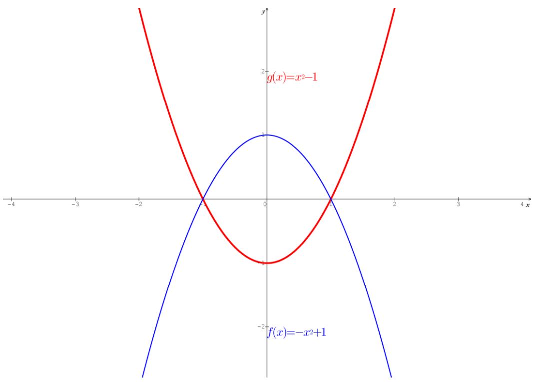

FIGURE 3.9 – Les graphes de $f(x) = -x^2 + 1$ et $g(x) = x^2 - 1$ montre que ces deux fonctions ne sont pas comparables sur $\mathbb{R}$

3.2.17 Définition

Dans cette définition, nous ne considérons que les fonctions numériques <u>à valeurs réelles</u>

1. **Soit $E \subset \mathbb{R}$. Dans $\mathcal{F}(E, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^E$, on définit, <u>l'enveloppe supérieure de 2 fonctions f et g</u> par :**

$$\begin{cases} \mathbb{R}^E \times \mathbb{R}^E & \longrightarrow & \mathbb{R}^E \\ (f, g) & \longmapsto & h = \sup(f, g) \end{cases}$$

   Où h est définie, pour tout $x \in E$ par $h(x) = \sup(f(x), g(x))$

2. **Soit $E \subset \mathbb{R}$. Dans $\mathcal{F}(E,\mathbb{R}) = \mathbb{R}^E$, on définit, l'enveloppe inférieure de 2 fonctions f et g par : :**

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^E \times \mathbb{R}^E & \longrightarrow & \mathbb{R}^E \\ (f,g) & \longmapsto & i = \inf(f,g) \end{array} \right.$$

Où i est définie, pour tout $x \in E$ par $i(x) = \inf(f(x), g(x))$

Exemple 8 :

Prenons les fonctions $f(x) = -x^2 + 1$ et $g(x) = x^2 - 1$

1. L'enveloppe supérieure de f et g est donnée par :

$$\sup(f(x), g(x)) = \left\{ \begin{array}{l} x^2 - 1 \text{ si } x \leqslant -1 \\ -x^2 + 1 \text{ si } -1 \leqslant x \leqslant +1 \\ x^2 - 1 \text{ si } x \geqslant +1 \end{array} \right.$$

2. L'enveloppe inférieure de f et g est donnée par :

$$\inf(f(x), g(x)) = \left\{ \begin{array}{l} -x^2 + 1 \text{ si } x \leqslant -1 \\ x^2 - 1 \text{ si } -1 \leqslant x \leqslant +1 \\ -x^2 + 1 \text{ si } x \geqslant +1 \end{array} \right.$$

Remarque 17 :

1. Si nous considérons une famille finie de n fonctions numériques réelles à valeur dans $\mathbb{R}$ $\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$, l'enveloppe supérieure des $\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$ est donnée par $h = \sup(f_1, f_2, \cdots, f_n)$, c'est à dire telle que, pour tout $x \in E$, $h(x) = \sup(f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x))$
2. De même, l'enveloppe inférieure des $\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$ est donnée par $i = \inf(f_1, f_2, \cdots, f_n)$, c'est à dire telle que, pour tout $x \in E$, $i(x) = \inf(f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x))$
3. Dans la suite, nous poserons souvent, pour $f \in \mathbb{R}^E$, $f^+ = \sup(f, \mathcal{O})$ et $f^- = \sup(-f, \mathcal{O})$

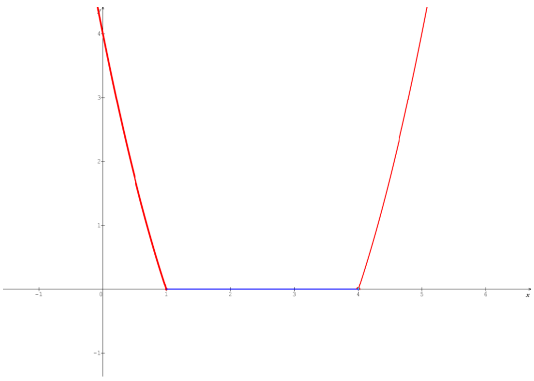

FIGURE 3.10 – En considérant $f(x) = x^2 - 5x + 4$ vous avez, ici le graphe de f^+

4. Nous avons donc, pour tout $f \in \mathbb{R}^E$, $f = f^+ - f^-$

Exercice 13 :

Soient $f \in \mathbb{R}^E$ et $g \in \mathbb{R}^E$

1. Montrez que $\sup(f,g) = f + (g-f)^+ = g + (f-g)^+ = \dfrac{(f+g) + |f-g|}{2}$
2. Montrez que $\inf(f,g) = \dfrac{(f+g) - |f-g|}{2}$

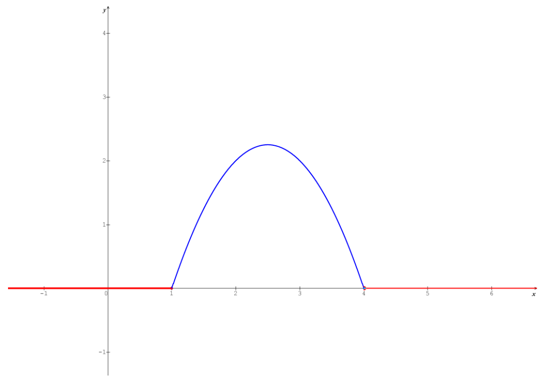

FIGURE 3.11 – En considérant $f(x) = x^2 - 5x + 4$ vous avez, ici le graphe de f^-

3.2.18 Fonctions en escalier

1. **Soit $[a;b] \subset \mathbb{R}$ un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$. On appelle subdivision de $[a;b]$ toute suite finie $(x_i)_{i=0,\cdots,n}$ croissante telle que :**

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-2} < x_{n-1} < x_n = b$$

2. **Soit $[a;b] \subset \mathbb{R}$ un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$. on dit qu'une fonction $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{K}$ est en escalier sur $[a;b]$ s'il existe une subdivision $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-2} < x_{n-1} < x_n = b$ telle que f soit constante sur chacun des intervalles ouverts de la subdivision de $[a;b]$, c'est à dire :**

$$(\forall i = 0, \cdots, n)\, (\forall x \in]x_i; x_{i+1}[)\, (f(x) = \lambda_i) \text{ avec } \lambda_i \in \mathbb{K}$$

Exemple 9 :

Un exemple simple de fonction en escalier est la fonction « **Partie entière** » $f(x) = [x]$

Remarque 18 :

1. Plutôt que de parler de fonctions en escalier, la littérature utilise aussi la notion de **fonction étagée**
2. Une fonction en escalier ne prend donc qu'un nombre fini de valeurs, mais la réciproque est fausse, c'est à dire qu'une fonction qui ne prend qu'un nombre fini de valeurs ne peut pas être une fonction en escalier.

   Par exemple, la fonction $f = 1_{\mathbb{Q}}$ [2] qui est la fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$ qui est telle que $f(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $f(x) = 0$ sinon, n'est pas une fonction en escalier sur $[0; +1]$; l'ensemble des rationnels étant dense dans $[0; +1]$, il n'existe pas d'intervalle inclus dans $[0; +1]$ sur lequel la fonction f est constante.
3. Si $\mathcal{E}([a;b])$ est l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a;b]$, si on munit cet ensemble de l'addition des fonctions et de la multiplication des fonctions par un scalaire, alors $\mathcal{E}([a;b])$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel
4. On démontre aussi très facilement que si $f \in \mathcal{E}([a;b])$ et $g \in \mathcal{E}([a;b])$ alors $f \times g \in \mathcal{E}([a;b])$ et que $|f| \in \mathcal{E}([a;b])$.
   En fait, $\mathcal{E}([a;b])$ est un anneau

2. Cette fonction est aussi appelée **Fonction de Dirichlet**

3.2.19 Exercices complémentaires

Exercice 14 :

Soient f et g deux fonctions numériques d'une variable réelle définies sur $[0\,;\,+1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$
Démontrez la proposition suivante :

$$(\exists\,(x,y) \in [0\,;\,+1] \times [0\,;\,+1]) \left(|xy - f(x) - g(y)| \geqslant \frac{1}{4}\right)$$

Exercice 15 :

Equations fonctionnelles
Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les équations suivantes :

1. $(\forall x \in \mathbb{R})\,(\forall y \in \mathbb{R})\,(|f(x) - f(y)| = |x - y|)$
2. $(\forall x \in \mathbb{R})\,(\forall y \in \mathbb{R})\,(|f(x) + f(y)| = |x + y|)$
3. $(\forall x \in \mathbb{R})\,(\forall y \in \mathbb{R})\,(f(x)\,f(y) - f(xy) = x + y)$
4. $(\forall x \in \mathbb{R})\,(\forall y \in \mathbb{R})\,(f(x + y) - f(x - y) = 4xy)$

Exercice 16 :

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour tout $\lambda \in [0\,;\,+1]$ et tout $x \in I$ et tout $y \in I$,

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)\,y) = \lambda f(x) + (1 - \lambda)\,f(y)$$

Démontrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $x \in I$, $f(x) = \alpha x + \beta$