3.3 Limite d'une fonction

3.3.1 Fonction définie au voisinage d'un point

Soient $x_0 \in \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}$ et $f : E \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction numérique à valeurs dans $\mathbb{K}$
On dit que f est définie au voisinage de x_0 s'il existe un intervalle ouvert I, contenant x_0 tel que $I \subset E$

Remarque 19 :

1. E est le domaine de définition de f
2. On peut remplacer l'expression « s'il existe un intervalle ouvert I, contenant x_0 » par **s'il existe un intervalle ouvert I de centre x_0**. Ou encore par :**s'il existe $\lambda > 0$ tel que** $]x_0 - \lambda\,;\, x_0 + \lambda[\subset E$. Ces définitions sont équivalentes

Exemple 10 :

La fonction $f(x) = \sqrt{x-1}$ est définie au voisinage de tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $x > +1$. Si elle est définie en $x = +1$, et nous avons même $f(+1) = 0$, elle n'est, par contre, par définie au voisinage de $x = 1$: il n'esxiste pas de $\lambda > 0$ tel que l'intervalle $]1 - \lambda\,;\, 1 + \lambda[$ soit inclus dans le domaine de définition, lequel est $[+1\,;\, +\infty[$

Remarque 20 :

Nous aurons à considérer, dans la suite, des fonctions dont l'ensemble de définition contient, **un intervalle I de centre x_0, mais pas x_0**, et nous serons donc amenés à étudier la fonction sur un tel intervalle privé de x_0

Exemple : la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$

3.3.2 Définition

Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{K}$ définie au voisinage de x_0, sauf, peut-être en x_0
On dit que la fonction f est bornée au voisinage de x_0 s'il existe un intervalle I, de centre x_0 et un nombre $A > 0$ tel que :

$$(\forall x \in I)\,(|f(x)| \leqslant A)$$

Exemple 11 :

Soit $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$; pour $x \in]-\pi\,;\, +\pi[$, nous avons :$|\sin x| \leqslant |x|$ et donc $\left|\dfrac{\sin x}{x}\right| \leqslant 1$. La fonction f est donc bornée sur $]-\pi\,;\, +\pi[$.

Remarque 21 :

f n'est pas bornée en x_0 si :

$$(\forall A > 0)\,(\forall \alpha > 0)\,(\exists x \in]x_0 - \alpha\,;\, x_0 + \alpha[)\,(|f(x)| > A)$$

Exemple 12 :

Par exemple, la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ n'est pas bornée au voisinage de 0.

En effet,
Pour $n \in \mathbb{N}$, nous remarquons que

$$f\left(\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}\right) = \left(\frac{1}{\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}}\right)\sin\left(\frac{1}{\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}}\right) = \left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right) = \frac{\pi}{2}+2n\pi$$

Soit $A > 0$ et $\alpha > 0$

▷ Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi} = 0$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N_1$;, alors $0 < \dfrac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi} < \alpha$

▷ Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\pi}{2}+2n\pi = +\infty$, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N_1$;, alors $\dfrac{\pi}{2}+2n\pi > A$

En posant $N = \max\{N_1, N_2\}$, si $n > N$, alors $0 < \dfrac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi} < \alpha$ et $\dfrac{\pi}{2}+2n\pi > A$.

On peut donc écrire qu'il existe $x_0 \in \left]-\alpha\,;+\alpha\right[$ tel que $|f(x)| > A$, et donc la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x}\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ n'est pas bornée au voisinage de 0

3.3.3 Définition de la limite d'une fonction

Soit f une fonction numérique d'une variable réelle définie sur $E \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que f est définie en x_0, sauf peut-être en x_0.
On dit que f admet une limite $l \in \mathbb{K}$ finie quand x tend vers x_0 si, pour tout intervalle ouvert J de centre l, il existe un intervalle pointé I de centre x_0 tel que $f(I) \subset J$
Autrement dit,

$$\boxed{(\forall\varepsilon > 0)\,(\exists\eta_\varepsilon > 0)\,/\,(0 < |x - x_0| < \eta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)}$$

On écrit alors

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0}} f(x) = l}$$

Exemple 13 :

Lorsqu'on écrit $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = +1$, cela signifie que la fonction f, définie sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ par $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ admet au point 0, le nombre $+1$ comme limite.

Remarque 22 :

1. La négation de la définition 3.3.3 est donnée par :

$$(\forall l \in \mathbb{K})\,(\exists\varepsilon > 0)\,(\forall\eta > 0)\,(0 < |x - x_0| < \eta \text{ et } |f(x) - l| > \varepsilon)$$

2. Dans la définition 3.3.3, nous n'avons pas supposé que $x_0 \in E$, mais, si $x_0 \in E$, alors $f(x_0)$ est bien défini, mais nous pouvons avoir $f(x_0) \neq l$
3. Nous avons, bien entendu, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0}} f(x) = l \iff \lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} f(x_0 + h) = l$; la démonstration en est très simple.

3.3.4 Limite d'une fonction numérique à valeurs complexes

Soit f une fonction numérique d'une variable réelle définie sur $E \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$. Nous écrivons $f = \mathrm{Reel}(f) + i\mathrm{Im}(f)$, où $\mathrm{Reel}(f)$ est la partie réelle de f et $\mathrm{Im}(f)$ est la partie imaginaire de f.
On suppose que f est définie en x_0, sauf peut-être en x_0
f admet, en x_0, une limite $l = l_{reel} + il_{imaginaire}$ si et seulement si
$\lim\limits_{x\to x_0} \mathrm{Reel}(f)(x) = l_{reel}$ et $\lim\limits_{x\to x_0} \mathrm{Im}(f)(x) = l_{imaginaire}$

Démonstration

La démonstration est simple, classique et basée sur l'inégalité triangulaire

Exercice 17 :

Soit f une fonction numérique d'une variable réelle définie sur $E \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que f est définie en x_0, sauf peut-être en x_0 et que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$. Démontrer que $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = |l|$

Il suffit d'utiliser l'inégalité triangulaire, et en particulier celle vraie pour tout $x \in \mathbb{K}$ et tout $y \in \mathbb{K}$:

$$||x| - |y|| \leqslant |x - y|$$

3.3.5 Proposition

Soit f une fonction numérique d'une variable réelle définie sur $E \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que f est définie en x_0, sauf peut-être en x_0 et que f admette, en x_0, une limite l finie
Alors, f est bornée au voisinage de x_0

Démonstration

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) = l$, il existe $\eta > 0$ tel que si $0 < |x - x_0| < \eta$ alors $|f(x) - l| < \varepsilon$, et donc si $x \in \left]x_0 - \eta\,;\, x_0 + \eta\right[$, alors $l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$.
Ce qui montre que f est bornée au voisinage de x_0

3.3.6 Proposition

1. **Soit f une fonction numérique d'une variable réelle définie sur $E \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que f est définie en x_0, sauf peut-être en x_0 et que f admette, en x_0, une limite l finie**
   Alors, cette limite est unique
2. **Soit f et g 2 fonctions numériques d'une variable réelle définie sur $E \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que f et g sont définie en x_0, sauf peut-être en x_0 et que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l_f$ et que $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l_g$**
   Alors
   (a) **La limite de la somme est la somme des limites, c'est à dire :** $\lim\limits_{x \to x_0} (f + g)(x) = l_f + l_g$
   (b) **La limite du produit est le produit des limites, c'est à dire :** $\lim\limits_{x \to x_0} (f \times g)(x) = l_f \times l_g$
   (c) **Si $l_g \neq 0$, alors** $\lim\limits_{x \to x_0} \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{l_f}{l_g}$

Démonstration

Les démonstrations sont toutes faites dans le travail L_0

3.3.7 Limites et relation d'ordre

1. **Soient $E \subset \mathbb{R}$ et $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique à valeurs réelles telle que** $(\forall x \in E)\,(f(x) \geqslant 0)$
   On suppose que, pour $x_0 \in I$, $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) = l$
   Alors, $l \geqslant 0$

2. **Soient $E \subset \mathbb{R}$, $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions numériques à valeurs réelles et telles que** $(\forall x \in E)\,(f(x) \leqslant g(x))$
   On suppose que, pour $x_0 \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) = l_1$ **et** $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} g(x) = l_2$

   Alors, $l_1 \leqslant l_2$

Démonstration

Remarquez que, pour pouvoir parler d'ordre, les fonctions sont à valeurs réelles.
Les démonstrations sont toutes faites dans le travail L_0

3.3.8 Théorème des limites par encadrements

Soient f, g et h trois fonctions numériques définies sur un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ et à valeurs réelles telles que

$$(\forall x \in E)\,(f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x))$$

On suppose que, pour $x_0 \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} h(x) = l$

Alors, $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} g(x) = l$

Démonstration

Remarquez que, pour pouvoir parler d'ordre, les fonctions sont à valeurs réelles.
Les démonstrations sont toutes faites dans le travail L_0

3.3.9 Limite infinie en $x_0 \in \mathbb{R}$

Dans ce paragraphe, nous distinguons 2 situations : les fonctions numériques à valeurs réelles $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ et les fonctions numériques à valeurs complexes, c'est à dire les fonctions $f : E \longrightarrow \mathbb{C}$. En effet, $\mathbb{R}$ est muni d'une relation d'ordre total alors que ce n'est pas le cas de $\mathbb{C}$

1. **Soit $E \subset \mathbb{R}$ et $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique à valeurs réelles.**
   Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que f n'est pas forcément définie en x_0
   (a) **On dit que f tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers x_0, et on écrit $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ si et seulement si :**

   $$(\forall A > 0)\,(\exists \eta_A > 0)\,((0 < |x - x_0| < \eta_A) \Longrightarrow (f(x) > A))$$

   (b) **On dit que f tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers x_0, et on écrit $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ si et seulement si :**

   $$(\forall A > 0)\,(\exists \eta_A > 0)\,((0 < |x - x_0| < \eta_A) \Longrightarrow (f(x) < -A))$$

2. **Soit $E \subset \mathbb{R}$ et $f : E \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction numérique à valeurs complexes.**
   Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que f n'est pas forcément définie en x_0
   On dit que f tend vers ∞ lorsque x tend vers x_0, et on écrit $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ si et seulement si :

   $$(\forall A > 0)\,(\exists \eta_A > 0)\,((0 < |x - x_0| < \eta_A) \Longrightarrow (|f(x)| > A))$$

Exemple 14 :

Par exemple, nous avons $\lim\limits_{x \to +1} \dfrac{1}{(x-1)^2} = +\infty$

Soit $A > 0$.

Alors, pour que $\dfrac{1}{(x-1)^2} > A$, nous devons avoir $(x-1)^2 < \dfrac{1}{A}$, c'est à dire $|x-1| < \dfrac{1}{\sqrt{A}}$.

Ainsi, pour tout $A > 0$, il existe $\eta_A = \dfrac{1}{\sqrt{A}} > 0$ tel que si $0 < |x-1| < \eta_A$ alors $\dfrac{1}{(x-1)^2} > A$

Et donc, $\lim\limits_{x \to +1} \dfrac{1}{(x-1)^2} = +\infty$

Remarque 23 :

1. Dans cet item, nous ne nous intéressons qu'aux fonctions numériques à valeurs réelles $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$
   (a) On déduit de la définition 3.3.9 que si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ alors, il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de x_0 tel que, pour tout $x \in \mathcal{U}$, alors $f(x) > 0$
   (b) De la même manière, on déduit de la même définition 3.3.9 que si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ alors, il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de x_0 tel que, pour tout $x \in \mathcal{V}$, alors $f(x) < 0$
   (c) Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = 0$

      En effet, soit $\varepsilon > 0$. Comme $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, alors pour $A = \dfrac{1}{\varepsilon}$, il existe $\eta > 0$ tel que si $0 < |x - x_0| < \eta_A$, alors $f(x) > A$, c'est à dire $f(x) > \dfrac{1}{\varepsilon} \Longleftrightarrow 0 < \dfrac{1}{f(x)} < \varepsilon$.

      Nous obtenons en fait 2 choses :
      - ▷ $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = 0$
      - ▷ Et, il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de x_0, tel que si $x \in \mathcal{V}$, alors $\dfrac{1}{f(x)} > 0$

   (d) De même, si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = 0$, et il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de x_0, tel que si $x \in \mathcal{V}$, alors $\dfrac{1}{f(x)} < 0$
   (e) i. Il est facile de démontrer que si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ et que s'il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de x_0 tel que, pour tout $x \in \mathcal{U}$, alors $f(x) < 0$, alors $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = -\infty$
      ii. La question est identique si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ et que s'il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de x_0 tel que, pour tout $x \in \mathcal{U}$, alors $f(x) > 0$, alors $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$
2. Supposons maintenant que f soit à valeurs complexes, c'est à dire $f : E \longrightarrow \mathbb{C}$
   (a) On peut aussi tout à fait démontrer que si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = 0$. *(Le fait que f soit à valeurs complexes ne rend pas la démonstration plus difficile)*
   (b) De même, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = \infty$.

3.3.10 Limite à droite, limite à gauche

Soit $E \subset \mathbb{R}$ et $f : E \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction numérique.

1. **Fonction définie à droite, fonction définie à gauche**
   (a) La fonction f est dite définie à droite de x_0 s'il existe $\alpha > 0$ tel que l'intervalle ouvert $]x_0\,;\,x_0+\alpha[\subset E$

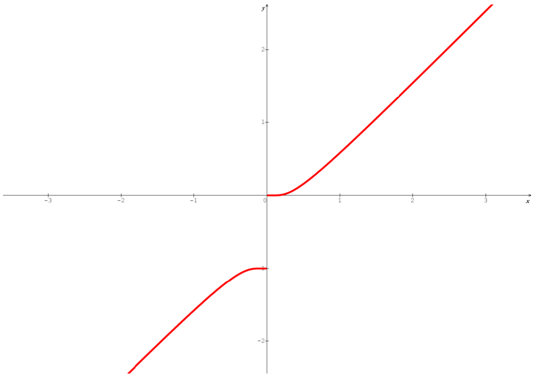

FIGURE 3.12 – Le graphe de la fonction $f(x) = \dfrac{1}{e^{\frac{1}{x}} - 1}$ au voisinage de 0

(b) **La fonction f est dite définie à gauche de x_0 s'il existe $\alpha > 0$ tel que l'intervalle ouvert** $]x_0 - \alpha\,;\, x_0[\subset E$

2. **Limite à droite, limite à gauche**

(a) **La fonction f, définie à droite de x_0 admet pour limite l_d, à droite de x_0, et on écrit :** $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = l_d$ **si et seulement si :**

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \eta_\varepsilon > 0) \text{ tel que } (x_0 < x < x_0 + \eta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - l_d| < \varepsilon)$$

(b) **La fonction f, définie à gauche de x_0 admet pour limite l_g, à gauche de x_0, et on écrit :** $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = l_g$ **si et seulement si :**

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \eta_\varepsilon > 0) \text{ tel que } (x_0 - \eta_\varepsilon < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - l_g| < \varepsilon)$$

Exemple 15 :

1. Comme premier exemple, très simple : la fonction $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ est définie à droite de $+1$
2. La fonction $f(x) = \dfrac{1}{e^{\frac{1}{x}} - 1}$ admet une limite à droite de 0 et une limite à gauche de 0 :
   - ▷ Pour $x > 0$, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$ et donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} e^{\frac{1}{x}} - 1 = +\infty$, et donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{1}{e^{\frac{1}{x}} - 1} = 0$, c'est à dire : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = 0$
   - ▷ Pour $x < 0$, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \dfrac{1}{x} = -\infty$ et donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} e^{\frac{1}{x}} - 1 = -1$, et donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \dfrac{1}{e^{\frac{1}{x}} - 1} = -1$, c'est à dire : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = -1$

   Cette fonction f admet donc 2 limites différentes à gauche et à droite de 0. Voir le graphe 3.12

3.3.11 Proposition

Soient $E \subset \mathbb{R}$, $f : E \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction numérique définie sur un intervalle E et $x_0 \in \mathbb{R}$
On suppose que f n'est pas forcément définie en x_0
f admet une limite en x_0, si et seulement si, elle admet une limite droite de x_0 notée l_d , et une limite à gauche de x_0 notée l_g, et si ces limites sont égales $l_d = l_g = l$

Démonstration

1. Supposons que f admette pour limite l en x_0
   Remarquons tout d'abord que $0 < |x - x_0| < \eta \iff x_0 - \eta < x < x_0$ ou $x_0 < x < x_0 + \eta$
   Ecrivons que f admet une limite en x_0 :
   Soit $\varepsilon > 0$; alors, il existe $\eta > 0$ tel que si $0 < |x - x_0| < \eta$ alors $|f(x) - l| < \varepsilon$.
   Donc, si $x_0 - \eta < x < x_0$, alors alors $|f(x) - l| < \varepsilon$, ce qui montre que f admet une limite à gauche de x_0, et que cette limite est l.
   De même, f admet une limite à droite de x_0, et que cette limite est l.
   Ainsi, si f admet une limite l en x_0, alors f admet une limite droite l_d,et une limite à gauche l_g, et ces 2 limites sont égales $l_d = l_g = l$
2. Réciproquement, supposons que f admette une limite droite l_d,une limite à gauche l_g et que $l_d = l_g = l$
   Soit $\varepsilon > 0$.
   — Ecrivons que f admet une limite à droite :
   $$\left(\exists\eta_\varepsilon^0 > 0\right) \text{ tel que } \left(x_0 < x < x_0 + \eta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon\right)$$
   — Ecrivons maintenant que f admet une limite à gauche :
   $$\left(\exists\eta_\varepsilon^1 > 0\right) \text{ tel que } \left(x_0 - \eta_\varepsilon^1 < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon\right)$$
   En posant $\eta = \inf\left\{\eta_\varepsilon^0; \eta_\varepsilon^1\right\}$, si $0 < |x - x_0| < \eta$, alors $x_0 - \eta_\varepsilon^1 < x < x_0$ et $x_0 < x < x_0 + \eta_\varepsilon^0$, et donc $|f(x) - l| < \varepsilon$, c'est à dire $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) = l$

Exemple 16 :

La fonction $f(x) = \dfrac{1}{e^{\frac{1}{x}} - 1}$ n'admet donc pas de limite en 0

3.3.12 Limites en l'infini

1. **Limite finie en l'infini**
   (a) **Soit $E \subset \mathbb{R}$ tel qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que l'intevalle $[a\,; +\infty[$ soit inclus dans E. Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{K}$;**
   On dit que f tend vers $l \in \mathbb{K}$ lorsque x tend vers $+\infty$, et on écrit : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$ si :
   $$(\forall\varepsilon > 0)\,(\exists A > 0)\,((x > A) \Longrightarrow (|f(x) - l| < \varepsilon))$$
   (b) **Soit $E \subset \mathbb{R}$ tel qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que l'intevalle $]-\infty\,; a]$ soit inclus dans E. Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{K}$;**
   On dit que f tend vers $l \in \mathbb{K}$ lorsque x tend vers $-\infty$, et on écrit : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l$ si :
   $$(\forall\varepsilon > 0)\,(\exists A > 0)\,((x < -A) \Longrightarrow (|f(x) - l| < \varepsilon))$$
2. **Limite infinie en l'infini d'une fonction numérique à valeurs réelles**
   (a) **Soit $E \subset \mathbb{R}$ tel qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que l'intevalle $[a\,; +\infty[$ soit inclus dans E. Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$;**
   On dit que f tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$, et on écrit : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ si :
   $$(\forall A > 0)\,(\exists B > 0)\,((x > B) \Longrightarrow (f(x) > A))$$
   (b) **Soit $E \subset \mathbb{R}$ tel qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que l'intevalle $[a\,; +\infty[$ soit inclus dans E. Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$;**
   On dit que f tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$, et on écrit : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ si :
   $$(\forall A > 0)\,(\exists B > 0)\,((x > B) \Longrightarrow (f(x) < -A))$$

(c) Soit $E \subset \mathbb{R}$ tel qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que l'intevalle $]-\infty\,;a]$ soit inclus dans E. Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$;
On dit que f tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$, et on écrit : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ si :

$$(\forall A>0)\,(\exists B>0)\,((x<-B) \Longrightarrow (f(x)>A))$$

(d) Soit $E \subset \mathbb{R}$ tel qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que l'intevalle $]-\infty\,;a]$ soit inclus dans E. Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$;
On dit que f tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$, et on écrit : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ si :

$$(\forall A>0)\,(\exists B>0)\,((x<-B) \Longrightarrow (f(x)<-A))$$

3. <u>Limite infinie en l'infini d'une fonction numérique à valeurs complexes</u>

(a) Soit $E \subset \mathbb{R}$ tel qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que l'intevalle $[a\,;+\infty[$ soit inclus dans E. Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{C}$;
On dit que f tend vers ∞ lorsque x tend vers $+\infty$, et on écrit : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \infty$ si :

$$(\forall A>0)\,(\exists B>0)\,((x>B) \Longrightarrow (|f(x)|>A))$$

(b) Soit $E \subset \mathbb{R}$ tel qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que l'intevalle $]-\infty\,;a]$ soit inclus dans E. Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{C}$;
On dit que f tend vers ∞ lorsque x tend vers $-\infty$, et on écrit : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ si :

$$(\forall A>0)\,(\exists B>0)\,((x<-B) \Longrightarrow (|f(x)|>A))$$

Remarque 24 :

1. Lorsque f et g tendent vers une limite finie $l_f \in \mathbb{K}$ et $l_g \in \mathbb{K}$ lorsque x tend vers l'infini, on retrouve tous les théorèmes sur somme, produits et quotients.
2. **Pour les fonctions numériques à <u>valeurs réelles</u>, attention aux cas d'indétermination ! !**
   (a) Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ et si $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$, alors $f-g$, fg et $\dfrac{f}{g}$ peuvent avoir tous les comportements possibles au voisinage de x_0
   (b) Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ et si $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$, alors fg peut avoir tous les comportements possibles au voisinage de x_0
   (c) Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ et si $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$, alors $\dfrac{f}{g}$ peut avoir tous les comportements possibles au voisinage de x_0

   Exemples :

   (a) Soit f et g, 2 fonctions numériques à valeurs réelles définies sur $\mathbb{R}\setminus\{+1\}$ par : $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$ et $g(x) = \dfrac{1}{(x-1)^3}$ Nous avons :
   ▷ $\lim\limits_{x\to+1} \dfrac{1}{(x-1)^2} = +\infty$ ▷ $\lim\limits_{\substack{x\to+1\\x>1}} \dfrac{1}{(x-1)^3} = +\infty$
   Alors $g(x) - f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^3} - \dfrac{1}{(x-1)^2} = \dfrac{1}{(x-1)^3}(1-x+1) = \dfrac{2-x}{(x-1)^3}$
   Et nous avons donc $\lim\limits_{\substack{x\to+1\\x>1}} g(x) - f(x) = +\infty$

   (b) Soit f et g, 2 fonctions numériques à valeurs réelles définies sur $\mathbb{R}^+\setminus\{0\}$ par : $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x}+1}$ et $g(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x}}$ Nous avons :

▷ $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = +\infty$ ▷ $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} g(x) = +\infty$

Alors $f(x) - g(x) = \sqrt{\frac{1}{x}+1} - \sqrt{\frac{1}{x}} = \dfrac{1}{\sqrt{\frac{1}{x}+1}+\sqrt{\frac{1}{x}}}$

Et nous avons donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) - g(x) = 0$

(c) Soit f et g, 2 fonctions numériques à valeurs réelles définies sur $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ par : $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = x$ Nous avons :

▷ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ▷ $\lim\limits_{+\infty} g(x) = +\infty$

Alors $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\sqrt{x}}{x} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

Et nous avons donc $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$

Soit f et g, 2 fonctions numériques à valeurs réelles définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x$ et $g(x) = 2x+1$ Nous avons :

▷ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ▷ $\lim\limits_{+\infty} g(x) = +\infty$

Alors $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{x}{2x+1} = \dfrac{1}{2+\frac{1}{x}}$

Et nous avons donc $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{1}{2}$

Exercice 18 :

Soit x_0 un nombre réel et $\alpha > 0$, un nombre réel strictement positif. On considère une fonction f, définie sur l'intervalle ouvert $]x_0 - \alpha\,; x_0 + \alpha[$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$.
Démontrer que si $f(x_0 + h)$ admet une limite finie lorsque h tend vers 0, alors $\lim\limits_{h \to 0} [f(x_0+h) - f(x_0-h)] = 0$. La réciproque est-elle vraie ?

3.3.13 Suites et limite d'une fonction numérique

Soient $E \subset \mathbb{R}$, $f : E \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction numérique définie sur un intervalle E et $x_0 \in \mathbb{R}$
On suppose que f n'est pas forcément définie en x_0
f admet une limite l en x_0, si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ d'éléments de E convergeant vers x_0, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ admet pour limite l

Démonstration

1. Supposons que f admette une limite l en x_0

   Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E convergeant vers x_0 ; nous allons montrer que la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ admet pour limite l.
   Soit $\varepsilon > 0$
   ▷ Comme $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$, il existe $\eta_\varepsilon > 0$ tel que si $0 < |x - x_0| < \eta_\varepsilon \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$
   ▷ Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x_0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N$, alors $|x_n - x_0| < \eta_\varepsilon$
   Ainsi, pour $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N$, alors $|x_n - x_0| < \eta_\varepsilon \Longrightarrow |f(x_n) - l| < \varepsilon$
   On vient donc de montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = l$

2. Supposons que pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = l$

   Nous allons donc démontrer $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$. Nous allons plutôt démontrer la contraposée, c'est à dire que nous allons supposer que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq l$ et que nous allons trouver une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to+_infty} x_= x_0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) \neq l$

   Supposons donc que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq l$
   - ▷ Ecrivons donc que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq l$

     Donc, il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $\eta > 0$, il existe $x \in E$, $x \neq x_0$ tel que $|x - x_0| < \eta$ et $|f(x) - l| \geqslant \varepsilon$
   - ▷ Considérons la suite de nombres $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$

     Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_n \in E$, $x_n \neq x_0$ tel que $|x_n - x_0| < \dfrac{1}{n}$ et $|f(x_n) - l| \geqslant \varepsilon$
   - — Nous venons de construire une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) \neq l$

   Donc, si f admet une limite l en x_0, alors, pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ d'éléments de E convergeant vers x_0, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ admet pour limite l

Remarque 25 :

Ce résultat sur les suites vaut beaucoup pour sa contraposée

Exemple : la fonction $f(x) = \cos\dfrac{1}{x}$ admet-elle une limite lorsque x tend vers 0 ?

Considérons 2 suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définies par :

- $x_n = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$
- $y_n = \dfrac{1}{2n\pi}$

Nous avons, de manière évidente, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = y_n = 0$

Et :

- $f(x_n) = \cos\dfrac{1}{x_n} = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 0$
- $f(y_n) = \cos\dfrac{1}{y_n} = \cos 2n\pi = 1$

Nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f(y_n) = 1$

Nous venons de construire 2 suites, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui toutes deux convergent vers 0, mais telles que les suites $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ aient des limites différentes

La fonction $f(x) = \cos\dfrac{1}{x}$ n'admet donc pas de limite lorsque x tend vers 0.*(cf graphe 3.13)*

Remarque 26 :

Nous avons un résultat analogue lorsque x tend $+\infty$ *(resp $-\infty$)* :

La fonction f admet une limite l lorsque x tend vers $+\infty$ *(resp $-\infty$)*, si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in R^{\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{R}$ tendant vers $+\infty$ *(resp $-\infty$)*, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ admet pour limite l

3.3.14 Le critère de Cauchy

Soit $E \subset \mathbb{R}$ et $f : E \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction numérique. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$
f admet une limite finie en x_0 si et seulement si :

$$(\forall\varepsilon > 0)\,(\exists\eta > 0)\,(\forall x \in E)\,(\forall x' \in E)\,((0 < |x - x_0| < \eta \textbf{ et } 0 < |x' - x_0| < \eta) \Longrightarrow (|f(x) - f(x')| < \varepsilon))$$

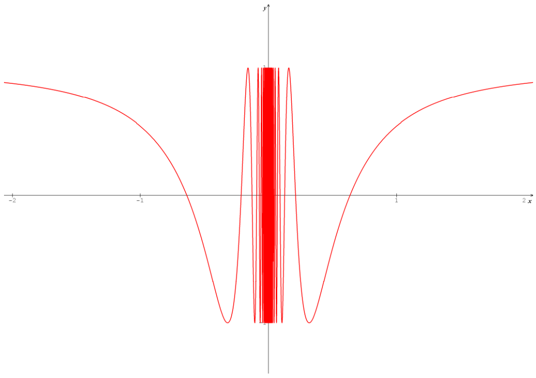

FIGURE 3.13 – Le graphe de la fonction $f(x) = \cos\dfrac{1}{x}$ au voisinage de 0

Démonstration

1. Supposons que f admette une limite finie l en x_0

   Soit $\varepsilon > 0$; alors, il existe $\eta_\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $x \in E$, $0 < |x - x_0| < \eta_\varepsilon \Longrightarrow |f(x) - l| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
   Soient $x \in E$ et $x' \in E$ tels que $0 < |x - x_0| < \eta_\varepsilon$ et $0 < |x' - x_0| < \eta_\varepsilon$. Alors,

   $$|f(x) - f(x')| \leqslant |f(x) - l| + |l - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

   Ce que nous voulions
2. Réciproquement

   Soit $\varepsilon > 0$
   Alors, il existe $\eta_\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x \in E$ et tout $x' \in E$ si $0 < |x - x_0| < \eta_\varepsilon$ et $0 < |x' - x_0| < \eta_\varepsilon$ alors $|f(x) - f(x')| < \dfrac{\varepsilon}{2}$
   Soit $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{1}{N} < \eta_\varepsilon$. Alors pour tout entier m et n tels que $m > N$ et $n > N$, nous avons $0 < \left|\left(x_0 + \dfrac{1}{m}\right) - x_0\right| < \eta_\varepsilon$ et $0 < \left|\left(x_0 + \dfrac{1}{n}\right) - x_0\right| < \eta_\varepsilon$, et donc, d'après l'hypothèse, $\left|f\left(x_0 + \dfrac{1}{m}\right) - f\left(x_0 + \dfrac{1}{n}\right)\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
   La suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $y_n = f\left(x_0 + \dfrac{1}{n}\right)$ est donc une suite de Cauchy, et d'après 1.6.6 est une suite convergente dans $\mathbb{K}$.
   Appelons $l = \lim\limits_{n\to+\infty} f\left(x_0 + \dfrac{1}{n}\right)$. Il existe donc un entier $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout entier n, si $n > N_\varepsilon$, alors $\left|f\left(x_0 + \dfrac{1}{n}\right) - l\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$
   Alors, pour $x \in E$ tel que $0 < |x - x_0| < \eta_\varepsilon$, et pour $n \geqslant \max\{N, N_\varepsilon\}$, nous avons :

   $$|f(x) - l| \leqslant \left|f(x) - f\left(x_0 + \frac{1}{n}\right)\right| + \left|f\left(x_0 + \frac{1}{n}\right) - l\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

   Donc, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x\neq x_0}} f(x) = l$

Remarque 27 :

Nous avons le même critère lorsque x tend vers ∞ :

> La fonction f admet une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$ *(resp $-\infty$)* si et seulement si
> Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A > 0$, tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $x' \in \mathbb{R}$, si $x > A$ et $x' > A$ *(resp $x < -A$ et $x' < -A$)* alors $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$

Exemple 17 :

On considère la fonction f, définie sur $[+1\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{[x]}$$

Il faut montrer que f ne vérifie pas le critère de Cauchy lorsque x tend vers $+\infty$

Soit $x \geqslant +1$

Considérons $f(2x) - f(x) = \displaystyle\sum_{k=[x]+1}^{[2x]} \frac{1}{k}$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$ tels que $[x]+1 \leqslant k \leqslant [2x]$, nous avons $\dfrac{1}{k} \geqslant \dfrac{1}{[2x]}$, et donc :

$$f(2x) - f(x) = \sum_{k=[x]+1}^{[2x]} \frac{1}{k} \geqslant \frac{[2x]-[x]}{[2x]}$$

▷ Si $[x] \leqslant x < [x] + \dfrac{1}{2}$, alors, $2[x] \leqslant 2x < 2[x]+1$, et donc $[2x] = 2[x]$ et donc,

$$f(2x) - f(x) \geqslant \frac{2[x]-[x]}{2[x]} = \frac{1}{2}$$

▷ Si $[x] + \dfrac{1}{2} \leqslant x < [x]$, alors $2[x]+1 \leqslant 2x < 2[x]$ et alors, $[2x] = 2[x]+1$

Donc $\dfrac{[2x]-[x]}{[2x]} = \dfrac{2[x]+1-[x]}{2[x]+1} = \dfrac{[x]+1}{2[x]+1} > \dfrac{1}{2}$ [3]

Ainsi, il existe $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ tel que, pour tout $A > 0$, il existe $x > A$ et $x' = 2x > A$ et $|f(x) - f(x')| > \varepsilon = \dfrac{1}{2}$.

f ne vérifie donc pas le critère de Cauchy

3.3.15 Théorème

Soient $E \subset \mathbb{R}$, $F \subset \mathbb{R}$, $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ **et** $g : F \longrightarrow \mathbb{K}$ **tels que** $f(E) \subset F$

On suppose que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0$ **et** $\lim\limits_{y \to y_0} g(y) = l$ **avec** $l \in \mathbb{K}$.

Alors, $\lim\limits_{x \to x_0} g \circ f(x) = l$

Démonstration

Soit $\varepsilon > 0$

▷ Il existe $\eta_\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $y \in F$ si $0 < |y - y_0| < \eta_\varepsilon$, alors $|g(y) - l| < \varepsilon$

▷ Pour cet $\eta_\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x \in E$ si $0 < |x - x_0| < \alpha$, alors $|f(x) - y_0| < \eta_\varepsilon$

Ainsi, pour tout $x \in E$ tel que $0 < |x - x_0| < \alpha$, alors $|f(x) - y_0| < \eta_\varepsilon$ qui implique que $|g(f(x)) - l| < \varepsilon$

Nous avons donc $\lim\limits_{x \to x_0} g \circ f(x) = l$

Remarque 28 :

Ce résultat est aussi valable lors que x tend vers ∞

3. Pour montrer que $\dfrac{[x]+1}{2[x]+1} > \dfrac{1}{2}$, il suffit de calculer $\dfrac{[x]+1}{2[x]+1} - \dfrac{1}{2}$, et on trouve que $\dfrac{[x]+1}{2[x]+1} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2[x]+1} > 0$

Exemple 18 :

1. Nous avons $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=1$ et $\lim\limits_{t\to+1}\ln t=0$, ce qui nous permet d'écrire que $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=0$
   Ce résultat permet de résoudre des formes indéterminées :
   (a) **Calculons** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+1)}{\ln x}$**.**
   Nous sommes devant une indétermination du type $\dfrac{\infty}{\infty}$
   En utilisant les propriétés du logarithme, nous avons :
   $$\frac{\ln(x+1)}{\ln x}=\frac{\ln\left(x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)}{\ln x}=\frac{\ln x+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x}$$
   Finalement : $\dfrac{\ln(x+1)}{\ln x}=1+\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x}$.
   D'où $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+1)}{\ln x}=\lim\limits_{x\to+\infty}1+\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x}=1$
   (b) **Calculons :** $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x+1)-\ln x$**.**
   Cette fois ci, nous sommes devant une indétermination du type $\infty-\infty$
   Nous avons
   $$\ln(x+1)-\ln x=\ln\left(x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)-\ln(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$
   Finalement $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x+1)-\ln(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=0$
2. **Soit à calculer :** $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(e^x+1)-x$**.**
   Une nouvelle fois, nous sommes devant une indétermination du type $\infty-\infty$
   Nous avons :
   $$\ln(e^x+1)-x=\ln\left(e^x\left(1+e^{-x}\right)\right)-x=\ln e^x+\ln\left(1+e^{-x}\right)-x=\ln(1+e^{-x})$$
   Finalement : $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(e^x+1)-x=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+e^{-x})=0$.

Exercice 19 :

1. Etudiez $\lim\limits_{x\to1}\sin\left(\dfrac{\pi\left(x^2-x\right)}{x^2-1}\right)$
2. $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}}\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^2-4x+3}}$ puis $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}}\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^2-4x+3}}$
3. Donner $\lim\limits_{x\to0}\sin\left(\sqrt{\dfrac{\frac{1}{x^2}+1}{\frac{1}{x^4}+1}}\right)$

3.3.16 Exercices sur les limites d'une fonction

Exercice 20 :

Pour $x\in\mathbb{K}$ et $n\in\mathbb{N}$ fixés, donner $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{(x+h)^n-x^n}{h}$

Exercice 21 :

Donner $\lim\limits_{x\to0}\sqrt{\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{x}+1}-\sqrt{\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{x}-1}$

Exercice 22 :

On considère la fonction $Q(x) = \dfrac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$
où $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$ et pour $i = 0, \ldots, n$, $a_i \in \mathbb{K}$ et pour $j = 0, \ldots, m$, $b_j \in \mathbb{K}$ avec $a_n \neq 0$ et $b_m \neq 0$
Donner $\lim\limits_{x \to +\infty} Q(x)$

Exercice 23 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$, la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 1$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$. Quelle est $\lim\limits_{x \to 0} g \circ f(x)$?

Exercice 24 :

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $x_0 \in \overset{\circ}{I}$ où $\overset{\circ}{I}$ est l'intérieur de l'intervalle I. Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ 2 fonctions telles que : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l_f$ et $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l_g$
Démontrer que $\sup(f, g)$ et $\inf(f, g)$ admettent une limite finie en x_0 et les calculer.

Exercice 25 :

1. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction numérique périodique. On suppose qu'elle admet une limite finie l lorsque x tens vers $+\infty$. Montrer que f est constante.
2. La fonction $f(x) = \sin x$ a-t-elle une limite lorsque x tend vers $+\infty$?

Exercice 26 :

Soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\deg P_n = n$
Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $f_n = \dfrac{1}{(P_n)^2 + 1}$. Etablir que la famille $\{f_n ; n \in \mathbb{N}^*\}$ est une famille libre dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

Exercice 27 :

Soit $\alpha > 0$.
Soient $f :]0; \alpha[\longrightarrow \mathbb{K}$ et $g :]0; \alpha[\longrightarrow \mathbb{K}$, 2 fonctions numériques.
On suppose $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = L$ avec $L \in \mathbb{K}$ et on suppose de plus que pour tout $x \in]0; \alpha[$ et tout $y \in]0; \alpha[$,

$$|g(x) - g(y)| \leqslant |f(x) - f(y)|$$

Démontrer que g admet une limite finie lorsque x tend vers 0 par valeurs positives.

Exercice 28 :

Calculez les limites suivantes :

1. Dans toute cette partie, $[x]$ désigne la partie entière de x, c'est à dire l'unique entier tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $[x] \leqslant x < [x] + 1$

   (a) $\lim\limits_{x \to 0} x \left[\dfrac{1}{x}\right]$

   (c) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \sqrt{x} \left[\dfrac{1}{x}\right]$

   (e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\left[\dfrac{1}{x}\right] + x}{\left[\dfrac{1}{x}\right] - x}$

   (b) $\lim\limits_{x \to +\infty} x \left[\dfrac{1}{x}\right]$

   (d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{[x]}{x}$

   (f) $\lim\limits_{x \to 0} x \left[x - \dfrac{1}{x}\right]$

2.

(a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+x+1}-(x+1)\right)$

(b) $\lim\limits_{x \to +\infty} x\left(\sqrt{x+\sqrt{x+1}}-\sqrt{x+\sqrt{x-1}}\right)$

(c) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\frac{3}{4}}\left(\sqrt[4]{x+1}-\sqrt[4]{x-1}\right)$

Exercice 29 :

Nous avons toujours $[x]$ qui désigne la partie entière de x. La fonction $f(x)=\dfrac{x^x}{[x]^{[x]}}$ définie pour $x \geqslant 1$ admet-elle une limite en $+\infty$?

Exercice 30 :

Soit $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$ par : $f(x)=\lim\limits_{m \to +\infty}\left(\lim\limits_{n \to +\infty}\left((\cos(n!\pi x))^{2m}\right)\right)$ Démontrer que $f=1_{\mathbb{Q}}$ où $1_{\mathbb{Q}}$ désigne la fonction indicatrice de l'ensemble $\mathbb{Q}$