3.4 Fonction continue en un point

3.4.1 Définition

Soit $E \subset \mathbb{R}$ et $f : E \longrightarrow \mathbb{K}$. Soit $x_0 \in E$. f est dite continue en x_0 si et seulement si :
- **$f(x_0)$ existe**
- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Remarque 29 :

1. La définition peut donc se traduire par :
$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \eta_{\varepsilon\,;\,x_0} > 0)\left((|x - x_0| < \eta_{\varepsilon\,;\,x_0}) \Longrightarrow (|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)\right)$$
La notation $\eta_{\varepsilon\,;\,x_0}$ signifie que cette valeur dépend de x_0 et du choix de ε.
La définition utilisant la limite en un point, beaucoup de résultats résulteront de l'étude des limites des fonctions en un point.
2. Une autre version de la définition de fonction continue peut être donnée en utilisant les intervalles :
La fonction f définie sur un voisinage de $x_0 \in E$ est continue en x_0 si et seulement si à tout intervalle ouvert J de centre $f(x_0)$, on peut faire correspondre un intervalle ouvert I de centre x_0 tel que $f(I) \subset J$
3. Si une fonction définie au voisinage de x_0 n'est pas continue en x_0, on dit qu'elle est **discontinue**
Pour formaliser la discontinuité d'une fonction en un point x_0, il suffit de nier le formalisation de la définition :
$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \eta > 0)(\exists x \in \mathbb{R})\left((|x - x_0| < \eta) \text{ et } (|f(x) - f(x_0)| \geqslant \varepsilon)\right)$$

3.4.2 Théorème

Soit $E \subset \mathbb{R}$ et $f : E \longrightarrow \mathbb{K}$. Soit $x_0 \in E$. On suppose que f est bien définie au voisinage de x_0 f est continue en x_0 si et seulement si l'image réciproque de tout voisinage de $f(x_0)$ est un voisinage de x_0

Démonstration

1. Supposons f continue en x_0
Nous allons donc démontrer que l'image réciproque de tout voisinage de $f(x_0)$ est un voisinage de x_0
Soit V un voisinage de $f(x_0)$
Il existe donc un intervalle ouvert de centre $f(x_0)$ noté $I_{f(x_0)}$ tel que $I_{f(x_0)} \subset V$. Or *(voir l'exercice qui suit)* :
$$I_{f(x_0)} \subset V \Longrightarrow f^{-1}\left[I_{f(x_0)}\right] \subset f^{-1}(V)$$
f étant continue en x_0, il existe un intervalle J_{x_0}, de centre x_0 tel que $f(J_{x_0}) \subset I_{f(x_0)}$. Or, *(voir une nouvelle fois l'exercice qui suit)* :
$$f(J_{x_0}) \subset I_{f(x_0)} \Longleftrightarrow J_{x_0} \subset f^{-1}\left[I_{f(x_0)}\right]$$
Et donc $J_{x_0} \subset f^{-1}(V)$, ce qui montre que $f^{-1}(V)$ est un voisinage de x_0
2. Réciproquement, supposons que l'image réciproque de tout voisinage de $f(x_0)$ est un voisinage de x_0
Montrons que f est continue en x_0
Soit $I_{f(x_0)}$ un intervalle ouvert de centre $f(x_0)$; c'est bien un voisinage de $f(x_0)$. Ainsi, l'image réciproque de $I_{f(x_0)}$, $f^{-1}\left[I_{f(x_0)}\right]$ est un voisinage de x_0. Il existe donc un intervalle J_{x_0} de centre x_0 tel que $J_{x_0} \subset f^{-1}\left[I_{f(x_0)}\right]$ ou , de manière équivalente, tel que $f(J_{x_0}) \subset I_{f(x_0)}$
f est donc continue en x_0

Exercice 31 :

Soit E et F 2 ensembles quelconques et $f : E \longrightarrow F$ une application.

1. Soient $A \subset F$ et $B \subset F$. Démontrez que nous avons l'implication :
$$A \subset B \Longrightarrow f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$$
2. Soient $I \subset E$ et $J \subset F$. Démontrer que nous avons l'équivalence :
$$f(I) \subset J \Longleftrightarrow I \subset f^{-1}(J)$$

Exemple 19 :

Des exemples de fonctions continues

1. **La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x|$ est continue en tout $x_0 \in \mathbb{R}$**
Soit $\varepsilon > 0$. Il faut majorer $||x| - |x_0||$
Or, $||x| - |x_0|| \leqslant |x - x_0|$. Donc, si $|x - x_0| \leqslant \varepsilon$ alors $||x| - |x_0|| \leqslant \varepsilon$
Donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta_{\varepsilon\,;\,x_0} = \varepsilon$ tel que si $|x - x_0| \leqslant \eta_{\varepsilon\,;\,x_0}$, alors $||x| - |x_0|| \leqslant \varepsilon$
La fonction valeur absolue est donc continue en tout $x_0 \in \mathbb{R}$
2. **La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin x$ est continue en tout $x_0 \in \mathbb{R}$**
Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et nous allons utiliser les classiques formules d'addition de la trigonométrie :
$$\sin x - \sin x_0 = 2 \sin \frac{x - x_0}{2} \cos \frac{x + x_0}{2}$$
De telle sorte que :
$$|\sin x - \sin x_0| \leqslant 2 \left| \sin \frac{x - x_0}{2} \right|$$
En utilisant l'inégalité classique $|\sin x| \leqslant |x|$, nous obtenons l'inégalité :
$$|\sin x - \sin x_0| \leqslant 2 \left| \frac{x - x_0}{2} \right| = |x - x_0|$$
Soit maintenant $\varepsilon > 0$.
Si $|x - x_0| \leqslant \varepsilon$, alors $|\sin x - \sin x_0| \leqslant \varepsilon$. Donc, la fonction $f(x) = \sin x$ est continue en tout $x_0 \in \mathbb{R}$
On démontrerait de même que $g(x) = \cos x$ est continue en tout $x_0 \in \mathbb{R}$
3. **La fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \sqrt{x}$ est continue en tout $x_0 \in \mathbb{R}^+$**
Soit $\varepsilon > 0$
   - ▷ Si $x_0 = 0$, nous devons majorer $\left|\sqrt{x} - \sqrt{0}\right| = \sqrt{x}$ par ε. Il suffit donc que $0 \leqslant x \leqslant \varepsilon^2$ pour que $\sqrt{x} \leqslant \varepsilon$
   - ▷ Supposons maintenant $x_0 > 0$. Alors :
$$\sqrt{x} - \sqrt{x_0} = \frac{\left(\sqrt{x} - \sqrt{x_0}\right)\left(\sqrt{x} + \sqrt{x_0}\right)}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \frac{x - x_0}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}$$
De telle sorte que : $\left|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}\right| = \dfrac{|x - x_0|}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}$
Comme $\sqrt{x} + \sqrt{x_0} \geqslant \sqrt{x_0}$, nous avons $\dfrac{|x - x_0|}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \leqslant \dfrac{|x - x_0|}{\sqrt{x_0}}$, et donc nous avons
$$\left|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}\right| = \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \leqslant \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x_0}} \leqslant \varepsilon$$
dès que $|x - x_0| \leqslant \varepsilon\sqrt{x_0}$
Ainsi, pour $\varepsilon > 0$, il existe $\eta_{\varepsilon\,;\,x_0} > 0$ tel que si $|x - x_0| \leqslant \eta_{\varepsilon\,;\,x_0}$ alors $\left|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}\right| \leqslant \varepsilon$
On peut remarquer que $\eta_{\varepsilon\,;\,x_0} = \varepsilon\sqrt{x_0}$ dépend bien de ε et de x_0

Exemple 20 :

Des exemples de fonctions discontinues

1. Soit f définie pour $x \neq 0$ par $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ et $f(0) = 0$. Cette fonction n'est pas continue en 0
   - $*$ Parce que, d'une part $\sin \frac{1}{x}$ n'admet pas de limite en 0
   - $*$ Et que, d'autre part, en utilisant la formalisation, il suffit de voir que la suite $x_n = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$ qui est une suite qui tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini et qui a le bonheur d'être telle que $f(x_n) = \sin \frac{\pi}{2} + 2n\pi = 1$.

     Ainsi, il existe $\varepsilon = \frac{1}{2}$ tel que, pour tout $\eta > 0$ nous ayons $0 < x_n < \eta$ et $f(x_n) > \frac{1}{2}$
2. Une fonction f qui a une limite en x_0 différente de $f(x_0)$ n'est pas continue en x_0

   Soit f définie pour $x \neq 0$ par $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ et $f(0) = 0$. Cette fonction n'est pas continue en 0 puisque $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ et $1 \neq 0$

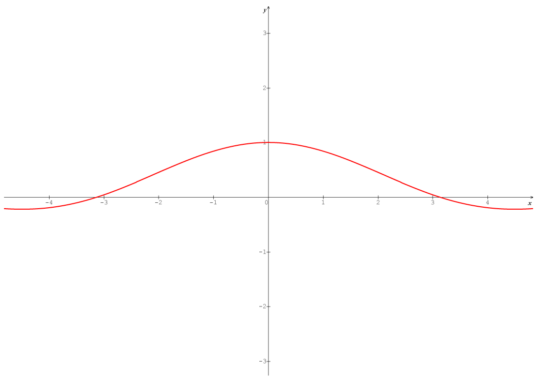

FIGURE 3.14 – Le graphe de $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$

Exercice 32 :

1. Soit f une fonction continue et positive sur un voisinage V de x_0. Démontrer que la fonction $F(x) = \sqrt{f(x)}$ est continue en x_0
2. Soit g une fonction définie et continue sur un voisinage V de x_0. Démontrer que la fonction $G(x) = |g(x)|$ est continue en x_0

3.4.3 Théorème

Soit $E \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in E$ et $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$. Soit $F \subset \mathbb{R}$ et $g : F \longrightarrow \mathbb{K}$.
On suppose :
- $f(E) \subset F$
- f **est continue en** x_0
- g **est continue en** $f(x_0)$

Alors, $g \circ f$ est continue en x_0

Démonstration

Soit V un voisinage de $g \circ f(x_0)$.
g étant continue en $f(x_0)$, $g^{-1}(V)$ est un voisinage de $f(x_0)$.
De même, f étant continue en x_0, $f^{-1}\left[g^{-1}(V)\right]$ est un voisinage de x_0.

Or, $f^{-1}\left[g^{-1}(V)\right]$ est l'image réciproque, par $g \circ f$ de V.
Ainsi, $g \circ f$ est bien continue en x_0

Remarque 30 :

Grâce à ce théorème, il est possible de montrer que :

1. Si f est une fonction continue et positive sur un voisinage V de x_0, alors la fonction $F(x) = \sqrt{f(x)}$ est continue en x_0
2. Si g est une fonction définie et continue sur un voisinage V de x_0, alors la fonction $G(x) = |g(x)|$ est continue en x_0

3.4.4 Continuité en un point d'une fonction numérique à valeurs complexes

Soit f une fonction numérique d'une variable réelle définie sur $E \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$. Nous écrivons $f = \mathrm{Reel}(f) + i\mathrm{Im}(f)$, où $\mathrm{Reel}(f)$ est la partie réelle de f et $\mathrm{Im}(f)$ est la partie imaginaire de f.
Alors, f est continue en x_0 si et seulement si
$\mathrm{Reel}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont continues en x_0

Démonstration

La démonstration utilise les résultats sur les limites 3.3.4

3.4.5 Opérations sur les fonctions continues

Soient $E \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in E$,$f : E \longrightarrow \mathbb{K}$ et $g : E \longrightarrow \mathbb{K}$
On suppose f et g continues en x_0. Alors :

1. **La fonction somme $f + g$ est continue en x_0**
2. **La fonction produit $f \times g$ est continue en x_0**
3. **En particulier, pour tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$, la fonction λf est continue en x_0**
4. **Si $g(x_0) \neq 0$, alors la fonction quotient $\dfrac{f}{g}$ est continue en x_0**

Démonstration

Ce théorème est l'application stricte du théorème 3.3.6 sur les limites de fonctions.

Remarque 31 :

Il n'est pas inintéressant de faire remarquer que si $g(x_0) \neq 0$, alors, il existe un voisinage V de x_0 tel que si $x \in V$, alors $g(x) \neq 0$ et $g(x)$ est du même signe que $g(x_0)$

Exemple 21 :

- ▷ La fonction identité $\mathrm{Id}(x) = x$ est continue pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$
- ▷ En utilisant le résultat sur les produits, les fonctions puissances $E_n(x) = x^n$ avec $n \in \mathbb{N}$ sont aussi continues pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$
- ▷ Et donc, plus généralement, toute fonction polynôme $P_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ avec $a_k \in \mathbb{K}$ est continue en $x_0 \in \mathbb{R}$

Exercice 33 :

1. Soient f et g, 2 fonctions définies et continues sur un voisinage V de x_0. Démontrez que $\max(f, g)$ et $\min(f, g)$ sont aussi des fonctions continues en x_0
2. Soit f une fonction continue en x_0 et g une fonction discontinue en x_0. Montrer que la fonction $f + g$ est discontinue en x_0
3. *(Question facile !...Prendre un exemple)* La fonction $f + g$ peut-elle être continue en x_0 si les fonctions f et g sont discontinues en x_0 ?

3.4.6 Suites et fonctions continues

Soient $E \subset \mathbb{R}$, $f : E \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction numérique définie sur un intervalle E et $x_0 \in \mathbb{R}$
f est continue en x_0, si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ d'éléments de E convergeant vers x_0, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ admet pour limite $f(x_0)$

Démonstration

C'est l'application du théorème 3.3.13 sur les limites de fonctions et suites numériques

Exemple 22 :

1. La fonction $f = 1_{\mathbb{Q}}$ qui est la fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$ qui est telle que $f(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $f(x) = 0$ sinon, n'est pas continue.

   En effet

   Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Alors $f(x) = 0$. $\mathbb{Q}$ étant dense dans $\mathbb{R}$, il existe une suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de rationnels tels que $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = x$. Alors, nous avons : $f(r_n) = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f(r_n) = 1$.
   Nous venons donc d'exhiber une suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de rationnels tels que $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = x$ et telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(r_n) \neq f(x)$ f n'est donc pas continue.

2. Soit $\Delta = \left\{x \in \mathbb{R} \text{ tel que il existe } (\alpha, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \text{ tels que } x = \dfrac{\alpha}{2^n}\right\}$. Δ est l'ensemble des dyadiques, dense dans $\mathbb{R}$. Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}$ s'annule sur Δ, alors, f est identiquement nulle sur $\mathbb{R}$

   En effet

   Si $x \in \mathbb{R}$ alors, x est limite d'une suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de dyadiques. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(d_n) = 0$
   f étant continue et $x = \lim\limits_{n\to+\infty} d_n$, nous avons $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(d_n) = 0$

3.4.7 Continuité à droite, continuité à gauche

Soient $E \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in E$ et $f : E \longrightarrow \mathbb{K}$

1. **f est dite continue à droite de x_0 si :**
   - ▷ **$f(x_0)$ existe**
   - ▷ **Et si $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x) = f(x_0)$**
2. **f est dite continue à gauche de x_0 si :**
   - ▷ **$f(x_0)$ existe**
   - ▷ **Et si $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x) = f(x_0)$**

Remarque 32 :

1. Ecrivons la définition 3.4.7 de manière formalisée :
   * f est dite continue à droite de x_0 si :
   $$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \eta > 0)\,((x \in [x_0; x_0 + \eta[) \Longrightarrow (|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon))$$
   * f est dite continue à gauche de x_0 si :
   $$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \eta > 0)\,((x \in]x_0 - \eta; x_0]) \Longrightarrow (|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon))$$
2. Si une fonction f est continue à droite et à gauche de x_0, alors elle est continue en x_0
3. Une fonction qui a des limites différentes à droite et à gauche de x_0 n'est pas continue en x_0
   Exemple : la fonction $f(x) = x - [x]$ n'est pas continue en $n \in \mathbb{Z}$ *(cf figure 3.15)*

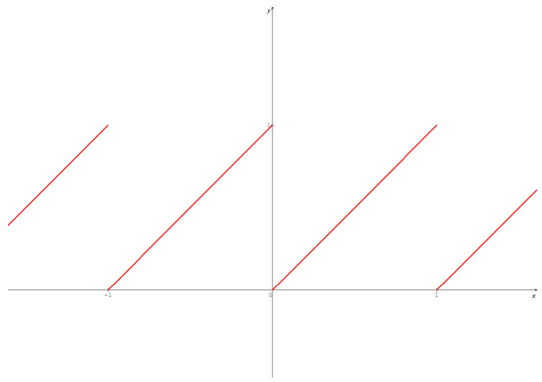

FIGURE 3.15 – Le graphe de $f(x) = x - [x]$

3.4.8 Prolongement par continuité

Soient $E \subset \mathbb{R}$ et $f : E \to \mathbb{K}$ une fonction numérique d'une variable réelle. On considère x_0 qui n'est pas dans E, mais adhérent à E. On suppose $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$. On construit la fonction g par :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} g : E \cup \{x_0\} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & g(x) = \left\{ \begin{array}{l} f(x) \text{ si } x \neq x_0 \\ l \text{ si } x = x_0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Alors, g est continue en x_0. On dit que g est le prolongement par continuité de f en x_0

Exemple 23 :

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$. La fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $$\left\{ \begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \varphi(x) = \left\{ \begin{array}{l} f(x) \text{ si } x \neq 0 \\ 1 \text{ si } x = 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$
   est une fonction déduite de la fonction f par prolongement par continuité de f en 0
2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^{*+}$ par $g(x) = x \ln x$. La fonction ψ définie sur $\mathbb{R}^+$ par :
   $$\left\{ \begin{array}{rcl} \psi : \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \psi(x) = \left\{ \begin{array}{l} x \ln x \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$
   est une fonction déduite de la fonction g par prolongement par continuité de g en 0 *(Cf figure 3.16)*

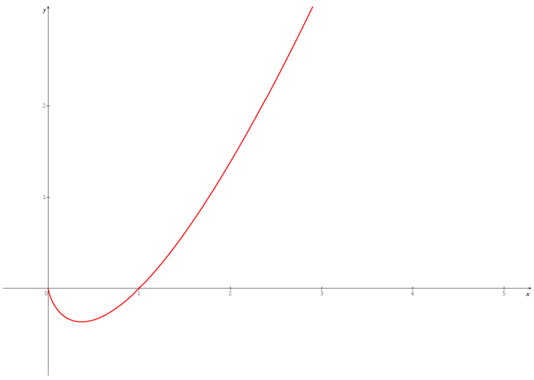

FIGURE 3.16 – Le graphe de $f(x) = x \ln x$

3.4.9 Exercices complémentaires

Exercice 34 :

Pour tout triplet $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, on note $\text{Mil}(a, b, c)$ le point intermédiaire parmi a, b et c.
Par exemple, si $a \leqslant c \leqslant b$, alors $\text{Mil}(a, b, c) = c$
Soient $E \subset \mathbb{R}$ et 3 fonctions f, g et h, définies sur E à valeurs dans $\mathbb{R}$ et continues en $x_0 \in E$.
Nous définissons la fonction $\text{Mil}(f, g, h)(x)$ par :

$$\text{Mil}(f, g, h)(x) = \text{Mil}(f(x), g(x), h(x))$$

Montrez que la fonction $\text{Mil}(f, g, h)$ est continue en x_0

Exercice 35 :

Est-il possible de prolonger par continuité les fonctions suivantes, toutes définies sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

1. $f(x) = \dfrac{1}{2x}\left[(1 + x)^n - 1\right]$ avec $n \in \mathbb{N}$
2. $f(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$
3. $f(x) = \dfrac{1}{x} \sin \dfrac{1}{x}$
4. $f(x) = x \left[\dfrac{1}{x}\right]$

Exercice 36 :

Etudier la continuité des fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ par :

1. $f(x) = \sqrt{x - [x]}$
2. $g(x) = [x] + \sqrt{x - [x]}$
3. $h(x) = [x] + (x - [x])^2$

Exercice 37 :

Soit f une fonction numérique d'une variable réelle définie sur l'intervalle ouvert $]-1; +1[$

1. On suppose qu'il existe un nombre $k \geqslant 0$ tel que, pour tout $x \in]-1; +1[\setminus \{0\}$ nous ayons $|f(x)| \leqslant k|x|$. Quelle valeur faut-il donner à $f(0)$ pour que f soit continue sur $]-1; +1[$?
2. Plus généralement, on suppose qu'il existe 2 fonctions g et h définies et continues sur l'intervalle $]-1; +1[$ et vérifiant :
   — $h(0) = g(0)$
   — Et, pour tout $x \in]-1; +1[\setminus \{0\}$ nous avons $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$
   Quelle valeur faut-il donner à $f(0)$ pour que f soit continue sur $]-1; +1[$?

Exercice 38 :

On considère la fonction f définie par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x)=\left\{\begin{array}{l} x^2 \text{ si } x\in\mathbb{Q} \\ x \text{ si } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{array}\right.\end{array}\right.$$

Montrer que f n'est pas continue pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

Exercice 39 :

C'est un exercice assez difficile

La **fonction de Thomae** est ainsi définie :

$$\left\{\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x)=\left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{q} \text{ si } x\in\mathbb{Q}^* \text{ et } x=\dfrac{p}{q} \text{ avec } p\in\mathbb{Z}, q\in\mathbb{N}^* \text{ et } \operatorname{pgcd}(p,q)=1 \\ 1 \text{ si } x=00 \text{ si } x\notin\mathbb{Q}\end{array}\right.\end{array}\right.$$

1. Montrer que f est périodique et de période 1
2. On se restreint maintenant à l'intevalle $[0;1]$
   (a) Montrer que f n'est pas continue sur $\mathbb{Q}$
   (b) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$