3.5 Continuité sur un ensemble

3.5.1 Définition

Soit f une fonction numérique définie sur $E \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ et soit $I \subset E$
On dit que f est continue sur I, si et seulement si $(\forall x_0 \in I)$ f est continue en x_0

Remarque 33 :

1. En formalisant, la propriété de continuité sur I se traduit par :

$$(\forall x_0 \in I)\,(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \eta_{\varepsilon\,;\,x_0} > 0)\,((|x - x_0| < \eta_{\varepsilon\,;\,x_0}) \Longrightarrow (|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon))$$

2. Lorsque nous dirons que f est continue sur un intervalle $[a;b]$, cela voudra dire que :
   - ▷ Ou bien que f est continue sur l'intervalle ouvert $]a;b[$ et continue à droite de a et continue à gauche de b
   - ▷ Ou bien que la fonction f est définie sur un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ qui contient un voisinage ouvert V de chaque point de $[a;b]$ et qu'elle est continue pour chaque $x \in V$

3.5.2 Fonctions continues par morceaux

Soit $E \subset \mathbb{R}$ et $f : E \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction numérique
Soit $[a;b] \subset E$ un intervalle fermé borné inclus dans E
f est dite continue par morceaux sur $[a;b]$, s'il existe une subdivision de $[a;b]$:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_= b$$

telle que les restrictions de f sur les intervalles $]x_i;x_{i+1}[$ notées $f_{|]x_i;x_{i+1}[}$ soient continues sur l'intervalle $]x_i;x_{i+1}[$

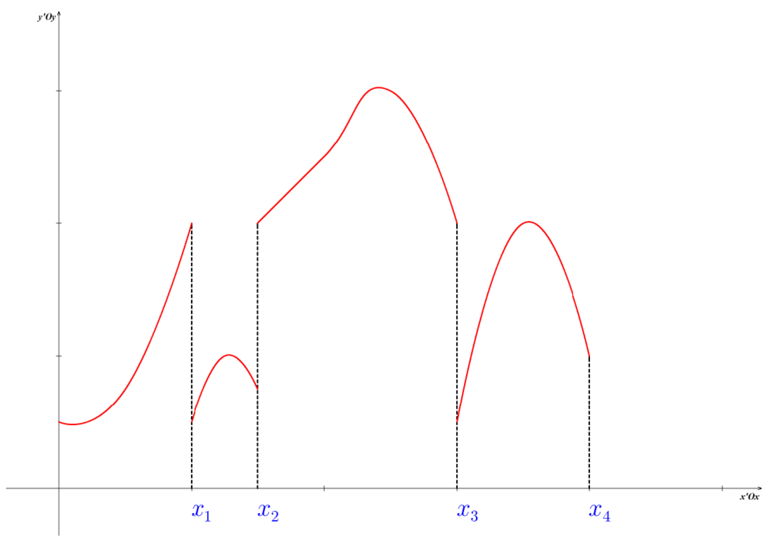

FIGURE 3.17 – Le graphe d'une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue par morceaux

Exemple 24 :

Les fonctions en escalier sont des exemples de fonctions continues par morceaux

3.5.3 Théorème

Soient $f : E \to \mathbb{K}$ et $g : F \to \mathbb{K}$ deux fonctions numériques d'une variable réelle continues sur $\mathcal{U} \subset (E \cap F)$. Alors :

1. **Somme de fonctions continues : $f + g$ est continue sur $\mathcal{U}$**
2. **Produit de fonctions continues : $f \times g$ est continue sur $\mathcal{U}$**
3. **Produit par un scalaire : $(\forall \lambda \in \mathbb{K})$ $\lambda \times f$ est continue sur $\mathcal{U}$**
4. **Quotient de fonctions continues : Si, pour tout $x \in \mathcal{U}$, $g(x) \neq 0$ alors $\dfrac{f}{g}$ est continue en $\mathcal{U}$**

Exemple 25 :

Exemples et contre-exemples de fonctions continues sur un sous-ensemble de $\mathbb{R}$

1. $\tan x$ est continue sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}; +\dfrac{\pi}{2}\right[$ mais pas sur $[0; \pi]$ puisque $\tan x$ n'est pas définie en $x_0 = +\dfrac{\pi}{2}$
2. $[x]$ est continue sur $]0, 1[$, mais pas sur $[0, 1]$ *(Attention aux bornes)*
3. $\dfrac{1}{x}$ n'est pas continue sur $[-1; +1]$; en effet, $\dfrac{1}{x}$ n'est pas définie en 0.

3.5.4 Théorème

Soit $E \subset \mathbb{R}$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.
Une fonction $f : E \longrightarrow \mathbb{K}$ est continue sur E si et seulement si pour tout ouvert $\mathcal{U} \subset \mathbb{K}$, l'image réciproque de $\mathcal{U}$ notée $f^{-1}(\mathcal{U})$ est un ouvert de E

Démonstration

1. Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue sur E
   Soit $\mathcal{U} \subset \mathbb{K}$ une ouvert de $\mathbb{K}$, $x_0 \in f^{-1}(\mathcal{U})$ et $y_0 = f(x_0)$. Nous avons donc $y_0 \in \mathcal{U}$
   $\mathcal{U}$ étant un ouvert, il existe une boule ouverte $B_O(y_0, \varepsilon)$[4] telle que $B_O(y_0, \varepsilon) \subset \mathcal{U}$
   f étant continue, pour ce ε, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $x \in E$,
   $$|x - x_0| < \eta \Longrightarrow |f(x) - y_0| < \varepsilon$$
   Donc, $f(E \cap]x_0 - \eta; x_0 + \eta[) \subset B_O(y_0, \varepsilon) \subset \mathcal{U}$, et donc $E \cap]x_0 - \eta; x_0 + \eta[\subset f^{-1}(\mathcal{U})$ est un ouvert de E
2. Réciproquement, supposons que pour tout ouvert $\mathcal{U} \subset \mathbb{K}$, $f^{-1}(\mathcal{U})$ soit un ouvert de E
   Démontrons que, pour tout $x_0 \in E$, f est continue en x_0
   Soit donc $x_0 \in E$ et $\varepsilon > 0$
   Alors, $B_O(f(x_0), \varepsilon)$ est un ouvert de $\mathbb{K}$, et donc $f^{-1}[B_O(f(x_0), \varepsilon)]$ est un ouvert de E. il existe donc $\eta > 0$ tel que $E \cap]x_0 - \eta; x_0 + \eta[\subset f^{-1}[B_O(f(x_0), \varepsilon)]$.
   Ainsi, si $x \in E$ et si $|x - x_0| < \eta$, alors $f(x) \in B_O(f(x_0), \varepsilon)$, c'est à dire $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$
   f est donc continue en x_0

Exemple 26 :

Applications de 3.5.4

1. **Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Soit $N = \{x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \neq 0\}$. Montrer que N est un ouvert de $\mathbb{R}$**

4. Rappel : $B_O(y_0, \varepsilon) = \{z_i n\mathbb{K}$ tels que $|z - y_0| < \varepsilon\}$

Soient $N_1 = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } f(x) > 0\}$ et $N_2 = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } f(x) < 0\}$. Evidemment, $N = N_1 \cup N_2$

Nous pouvons écrire $N_1 = f^{-1}(]0; +\infty[)$.

Comme $]0; +\infty[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$, que f est continue sur $\mathbb{R}$, alors $f^{-1}(]0; +\infty[)$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.

De la même manière, nous démontrerions que N_2 est un ouvert.

Ainsi, N, réunion finie d'ouverts est un ouvert.

2. **Soient $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$. Soit $M = \{x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) > g(x)\}$. Montrer que M est un ouvert de $\mathbb{R}$**

   Construisons une fonction auxiliaire $h = f - g$; h est continue comme somme de fonctions continues et :

$$\begin{aligned} M = & \ \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } f(x) > g(x)\} \\ = & \ \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } f(x) - g(x) > 0\} \\ = & \ \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } h(x) > 0\} \\ = & \ h^{-1}(]0; +\infty[) \end{aligned}$$

   Pour les mêmes raisons que la question ci-dessus, $h^{-1}(]0; +\infty[)$ est un ouvert de $\mathbb{R}$. M est donc un ouvert de $\mathbb{R}$

Exercice 40 :

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$.
Montrer que f est continue si et seulement si l'image réciproque de tout fermé est un fermé.

Exercice 41 :

Dans tout cet exercice, f est une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$

1. Soit $A \subset \mathbb{R}$, une partie de $\mathbb{R}$. Montrer que si x est un point adhérent à A *(c'et à dire $x \in \overline{A}$)* alors $f(x)$ est adhérent à $f(A)$
2. Démontrer que, pour toute partie $A \subset \mathbb{R}$, nous avons $f\left(\overline{A}\right) \subset \overline{f(A)}$

3.5.5 Continuité uniforme

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$
On dit que f est uniformément continue si :

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \eta_\varepsilon > 0)\,(\forall x \in I)\,(\forall y \in I)\,(|x - y| < \eta_\varepsilon \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon)$$

Remarque 34 :

1. Si f est uniformément continue sur I, alors elle est continue sur I, mais la réciproque est fausse.
2. Dans la définition, la grande différence avec la définition de fonction continue, c'est que le nombre $\eta_\varepsilon >$ ne dépend que de ε et non pas de $x \in I$.

   Par exemple, la fonction affine $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = ax + b$ avec $a \neq 0$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$

   Soit $\varepsilon > 0$; alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}$ $|g(x) - g(y)| = |(ax + b) - (ay + b)| = |a(x - y)| = |a|\,|(x - y)|$

   Ainsi, si $|(x - y)| < \dfrac{\varepsilon}{|a|}$, alors $|g(x) - g(y)| < \varepsilon$, et donc g est-elle uniformément continue sur $\mathbb{R}$

Exemple 27 :

Exemple de fonctions uniformément continues : les fonctions Lipschitziennes

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}$, une fonction numérique.
f est dite k-lispschitzienne sur $E \subset \mathbb{R}$ s'il existe $k > 0$ tel que :

$$(\forall x \in E)\,(\forall y \in E)\,(|f(x) - f(y)| \leqslant k\,|x - y|)$$

Il est facile de démontrer qu'une fonction k-lispschitzienne sur E est uniformément continue sur E

Exercice 42 :

Démontrer qu'une fonction k-lispschitzienne sur E y est uniformément continue

3.5.6 Exercices sur la continuité sur un ensemble

Exercice 43 :

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, nous notons φ_n l'application :

$$\begin{cases} \varphi_n : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \quad x & \longmapsto & \varphi_n(x) = \begin{cases} -n & \text{si } x \leqslant -n \\ x & \text{si } -n \leqslant x \leqslant n \\ +n & \text{si } x \geqslant +n \end{cases} \end{cases}$$

Démontrer que, pour toute application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, f est continue si et seulement si $\varphi_n \circ f$ est continue

Exercice 44 :

1. Ecrire la négation de la définition de fonction uniformément continue.
2. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) = x^2$. Montrer que f n'est pas uniformément continue sur $[0; +\infty[$
3. Démontrer que, par contre, $f(x) = x^2$ est uniformément continue sur tout intervalle $[a, b]$ où $a < b$ *(sans utiliser le théorème de Heine)*

Exercice 45 :

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. On dit que f est lipschitzienne sur I si et seulement si il existe $K_f > 0$ tel que, pour tout $x \in I$ et tout $y \in I$, $|f(x) - f(y)| \leqslant K_f\,|x - y|$. Montrer que f est uniformément continue sur I.

Exercice 46 :

Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ n'est pas uniformément continue sur l'intervalle $]0, 1]$

Exercice 47 :

1. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ et tout $y \in \mathbb{R}^+$, nous avons $\left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| \leqslant \sqrt{|x - y|}$
2. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$

Exercice 48 :

1. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \ln x$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}^{+*}$
2. Démontrez, par contre que la fonction $f(x) = x \ln x$ est uniformément continue sur l'intervalle $]0, 1]$

Exercice 49 :

1. La fonction $\sin \dfrac{1}{x}$ est-elle uniformément continue sur $]0,1]$?
2. Même question pour la fonction $\sin x^2$.

Exercice 50 :

Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$. Montrer qu'il existe $a > 0$, $b > 0$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leqslant ax + b$

Exercice 51 :

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}$:

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

On appelle, pour simplifier, $a = f(1)$.

1. Donner $f(0)$; en déduire que f est une fonction impaire
2. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, $f(nx) = nf(x)$
3. En déduire que :
   (a) Pour tout entier $q > 0$, $f\left(\dfrac{1}{q}\right) = \dfrac{a}{q}$
   (b) Pour tout rationnel $r \in \mathbb{Q}$, $f(r) = ar$
   (c) Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax$

Exercice 52 :

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}$:

$$f(x-y) = f(x) - f(y)$$

Comme tout à l'heure, on appelle, pour simplifier, $a = f(1)$.

1. Donner $f(0)$; en déduire que f est une fonction impaire
2. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, $f(nx) = nf(x)$
3. En déduire que pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax$

Exercice 53 :

1. Nous appelons $\mathcal{A}_1$, l'ensemble des fonctions continues $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}$ telles que :

$$(\forall x \in \mathbb{R})\,(\forall y \in \mathbb{R})\,(\forall \lambda \in \mathbb{R})\,(f(\lambda x + (1-\lambda)\,y) = \lambda f(x) + (1-\lambda)\,f(y))$$

   (a) Montrer que $\mathcal{A}_1$, muni de l'addition des fonctions est un groupe abélien
   (b) Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$ et $f(x) = f(y) = 0$. Démontrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = 0$, c'est à dire que f est la fonction nulle sur $\mathbb{R}$
   (c) Soit $h(x) = ax + b$. Démontrer que $h \in \mathcal{A}_1$
   (d) Soit $g \in \mathcal{A}_1$ et $f \in \mathcal{A}_1$ tel que $f(x) = g(x) + (g(0) - g(1))\,x - g(0)$. Démontrer que f est la fonction nulle sur $\mathbb{R}$
   (e) En déduire que les seuls éléments de $\mathcal{A}_1$ sont les applications affines du type $g(x) = ax + b$ avec $a \in \mathbb{K}$ et $b \in \mathbb{K}$
2. Nous allons, dans cette question, alléger les conditions de l'hypothèse, en passant de $\lambda \in \mathbb{R}$ à $\lambda \in [0;1]$
   Nous appelons $\mathcal{A}_2$, l'ensemble des fonctions continues $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}$ telles que :

$$(\forall x \in \mathbb{R})\,(\forall y \in \mathbb{R})\,(\forall \lambda \in [0;1])\,(f(\lambda x + (1-\lambda)\,y) = \lambda f(x) + (1-\lambda)\,f(y))$$

(a) Montrer que $\mathcal{A}_2$, muni de l'addition des fonctions est un groupe abélien

(b) Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$ et $f(x) = f(y) = 0$. Démontrer que pour tout $t \in [x; y]$, $f(t) = 0$.

(c) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout $t \in [x; y]$, $f(t + n(y - x)) = 0$

(d) En déduire que f est nulle sur $\mathbb{R}$

(e) En déduire que les seuls éléments de $\mathcal{A}_2$ sont les applications affines du type $g(x) = ax + b$ avec $a \in \mathbb{K}$ et $b \in \mathbb{K}$

Exercice 54 :

Soit $f : [0; +1] \longrightarrow [0; +1]$, une fonction numérique d'une variable réelle, définie et continue sur $[0; +1]$ et à valeurs dans $[0; +1]$. On suppose que $f(0) = 0$ et que pour tout $x \in [0; +1]$ et tout $y \in [0; +1]$, nous avons $|f(x) - f(y)| \geqslant |x - y|$

1. Soit $x \in [0; +1]$. On construit une suite numérique $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $x_0 = x$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ Montrer que cette suite est convergente.
2. On appelle l la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Démontrer que $f(l) = l$
3. Déduire de tout ce qui précède que, pour tout $x \in [0; +1]$,$f(x) = x$

Exercice 55 :

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe un réel $0 < k < 1$ tel que pour tout nombre $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ nous ayions :

$$|f(x) - f(y)| \leqslant k\,|x - y|$$

Soit $a \in \mathbb{R}$ et une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $x_0 = a$ et $x_{n+1} = f(x_n)$. Démontrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et que sa limite l vérifie $l = f(l)$

Exercice 56 :

Soient $a \in \mathbb{R}^+$ un nombre réel positif et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels définie par :

$$u_0 = a \text{ et } u_{n+1} = 1 + \sqrt{u_n}$$

Démontrer que cette suite est convergente et calculer sa limite

Exercice 57 :

Soit $a \in \mathbb{R}^*$ un nombre réel non nul et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels définie par :

$$u_0 = a \text{ et } u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n} - 1$$

Etudier la convergence de cette suite et calculer son éventuelle limite