3.6 Continuité sur un intervalle

3.6.1 Théorème

Soit f une fonction numérique continue définie sur l'intervalle fermé borné $[a;b]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$
Alors, f est bornée sur $[a;b]$, c'est à dire qu'il existe $m \in \mathbb{R}$ et $M \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $x \in [a;b]$, nous ayions $m \leqslant f(x) \leqslant M$

Démonstration

Supposons le contraire, c'est à dire que l'ensemble $f([a;b])$ ne soit pas un ensemble borné.
Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un nombre $x_n \in [a;b]$ tel que $|f(x_n)| \geqslant n$.
Nous créons ainsi une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de l'intervalle $[a;b]$.
D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass 1.5.5, il nous est possible de construire une sous-suite $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers un nombre $\lambda \in [a;b]$; c'est à dire $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{\varphi(n)} = \lambda$
f étant continue sur $[a;b]$ l'est en particulier en λ ; nous écrivons que f est continue en λ.
Soit $\varepsilon > 0$.
Alors, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in [a;b]$, nous ayions l'implication :

$$|x-\lambda| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(\lambda)| < \varepsilon$$

Pour cet $\alpha > 0$, puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{\varphi(n)} = \lambda$, il existe $N_\alpha \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant N_\alpha \Longrightarrow \left|x_{\varphi(n)} - \lambda\right| \leqslant \alpha$
Ainsi, $n \geqslant N_\alpha \Longrightarrow \left|x_{\varphi(n)} - \lambda\right| \leqslant \alpha \Longrightarrow \left|f\left(x_{\varphi(n)}\right) - f(\lambda)\right| < \varepsilon$, ce qui est en totale contradiction avec le fait que $\left|f\left(x_{\varphi(n)}\right)\right| \geqslant \varphi(n) \geqslant n$
Donc, l'hypothèse que l'ensemble $f([a;b])$ ne soit pas un ensemble borné est contradictoire.
Donc, f est bornée sur $[a;b]$

Remarque 35 :

1. En fait, M est la **borne supérieure** de f sur $[a;b]$, c'est à dire : $M = \sup\limits_{x\in[a;b]} f(x)$, tout comme m en est la **borne inférieure** ie $m = \inf\limits_{x\in[a;b]} f(x)$
2. Si f est une fonction numérique continue sur $[a;b]$ alors, $f([a;b])$ est un ensemble borné

Exercice 58 :

Soient a et b 2 nombres réels tels que $a < b$. Soit f une fonction uniformément continue sur $]a;b[$. Démontrer qu'il est possible de prolonger f en une fonction $\tilde{f}$ continue sur $[a;b]$. En déduire qu'elle est bornée sur $]a;b[$

3.6.2 Théorème

Soit f une fonction numérique continue définie sur l'intervalle fermé borné $[a;b]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$
Alors, f est bornée sur $[a;b]$, et atteint ses bornes c'est à dire qu'il existe $\alpha \in [a;b]$ et $\beta \in [a;b]$ tels que :

$$f(\alpha) = \inf_{x\in[a;b]} f(x) \text{ et } f(\beta) = \sup_{x\in[a;b]} f(x)$$

Démonstration

Le fait que f soit bornée a été démontré en 3.6.1.
Nous allons, maintenant, démontrer que f atteint ses bornes.

1. Nous appelons donc m la borne inférieure de $f([a;b])$.
   De la défintion de borne inférieure, nous tirons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un nombre $y_n \in f([a;b])$ tel que $m \leqslant y_n \leqslant m + \dfrac{1}{n}$.
   On construit ainsi une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de $f([a;b])$; pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, il existe donc $x_n \in [a;b]$ tel que $y_n = f(x_n)$
   Comme $[a;b]$ est un intervalle fermé, on peut extraire de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une sous-suite $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergente vers un nombre $\alpha \in [a;b]$; nous avons donc $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{\varphi(n)} = \alpha$
   De la continuité de f, nous déduisons que $\lim\limits_{n\to+\infty} f\left(x_{\varphi(n)}\right) = f(\alpha)$, c'est à dire $\lim\limits_{n\to+\infty} y_{\varphi(n)} = f(\alpha)$.
   De l'inégalité, vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $m \leqslant y_n \leqslant m + \dfrac{1}{n}$, nous déduisons $y_{\varphi(n)} \leqslant m + \dfrac{1}{\varphi(n)}$, et, par passage à la limite, $f(\alpha) \leqslant m$.
   De l'hypothèse $m \leqslant f(\alpha)$, nous déduisons $m = f(\alpha)$
2. Nous démontrerions de la même manière, l'existence d'un nombre $\beta \in [a;b]$ tel que $f(\beta) = \sup\limits_{x\in[a;b]} f(x)$

Remarque 36 :

1. Nous venons de démontrer que pour une fonction f définie sur un intervalle fermé borné $[a;b]$, la <u>continuité est une condition nécessaire</u> pour que cette fonction f soit bornée et atteine ses bornes. Ce n'est, par contre, pas une condition suffisante.

   <u>Exemples :</u>

   (a) Sur $\mathbb{R}$, la fonction $f(x) = x - [x]$ est discontinue pour toutes les valeurs entières de x. Sur l'intervalle $[0;1]$, nous avons $\inf\limits_{x\in[0;1]} f(x) = 0$ et $\sup\limits_{x\in[0;1]} f(x) = +1$. Si la borne inférieure est atteinte (nous avons $f(0) = f(1) = 0$), par contre, jamais la borne supérieure n'est atteinte : pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $f(x) \neq +1$; nous avons même $f(x) < +1$

   (b) Considérons maintenant la fonction g définie sur $[0;1]$ par :
   $$g(0) = 0 \quad g(1) = 1 \text{ et } (\forall x \in]0;+1[)\,(g(x) = 1 - x)$$
   g n'est évidemment pas continue sur $[0;1]$, mais la borne supérieure et la borne inférieure sont atteintes.
2. Nous venons aussi de démontrer que l'image, par une fonction numérique f continue d'un intervalle fermé borné $[a;b]$, est un intervalle fermé borné $[m;M]$; nous avons donc : $f([a;b]) = [m;M]$

3.6.3 Théorème

Soit $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $E \subset [a;b]$ un sous-ensemble fermé de $[a;b]$
Alors, $f(E)$ est un fermé

<u>Démonstration</u>

1. Si $f(E)$ est un ensemble fini, il est fermé
2. Supposons $f(E)$ infini.
   Comme $f(E) \subset f([a;b]) = [m;M]$, $f(E)$ est un ensemble borné.
   Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E convergeant vers une limite l ; il faut montrer que $l \in f(E)$
   Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $y_n \in f(E)$, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E tels que $y_n = f(x_n)$.
   Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $x_n \in E$ et que $E \subset [a;b]$, nous avons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in [a;b]$. De la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, nous pouvons extraire une sous-suite $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers

un nombre $l_x \in [a; b]$, mais, comme E est fermé et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $x_{\varphi(n)} \in E$, nous avons aussi $l_x \in E$
f étant continue, $\lim\limits_{n \to +\infty} f\left(x_{\varphi(n)}\right) = f(l_x)$, ce qui peut être traduit par : $\lim\limits_{n \to +\infty} y_{\varphi(n)} = f(l_x)$
La suite $\left(y_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, laquelle est une suite convergente telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n = l$; donc, $\lim\limits_{n \to +\infty} y_{\varphi(n)} = l$ et, ainsi, $l = f(l_x)$ avec $l_x \in E$, et donc $l \in f(E)$
$f(E)$ est donc fermé

Exemple 28 :

1. L'image du segment $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ par la fonction $f(x) = \sin x$ est l'intervalle $[0; +1]$
2. Par contre, si nous considérons la fonction $f(x) = x - [x]$ sur l'intervalle $[0; +1]$, elle n'y est pas continue et l'image du segment $[0; +1]$ n'est pas un ensemble fermé : c'est l'intervalle semi-ouvert $[0; +1[$

Remarque 37 :

La condition de de continuité d'une fonction est une condition suffisante pour que l'image d'un ensemble fermé soit fermée, mais, elle n'est pas nécessaire, c'est à dire que l'image d'un ensemble fermé par une fonction non continue peut être un ensemble fermé.

Exemple :
Soit g, la fonction définie sur $[0; +1]$ par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} g : [0; +1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left\{\begin{array}{l} g(0) = 0 \text{ et } g(1) = 1 \\ g(x) = 1 - x \text{ si } 0 < x < 1 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

g n'est pas continue sur $[0; +1]$, mais $g([0; +1]) = [0; +1]$

3.6.4 Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soient $a \in I$ et $b \in I$ tels que $a < b$.
Alors, tout élément y compris entre $f(a)$ et $f(b)$ est l'image, par f d'un élément $c \in [a; b]$

Démonstration

1. Quitte à remplacer f par $-f$, nous supposons $f(a) \leqslant f(b)$
2. Il faut donc montrer que, pour tout $y \in]f(a); f(b)[$, il existe $c \in [a; b]$ tel que $f(c) = y$
   Soit donc $y \in]f(a); f(b)[$
   (a) Soit $X_y = \{x \in [a; b] \text{ tel que } f(x) \leqslant y\}$
      i. Nous avons $X_y \neq \emptyset$, car comme $f(a) < y$, nous avons $a \in X_y$
      ii. D'autre part, X_y est majoré, car, pour tout $t \in X_y$, nous avons $t \leqslant b$
      X_y étant non vide et majoré admet une borne supérieure. Appelons $c = \sup X_y$
   (b) c étant la borne supérieure de X_y, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_n \in X_y$ tel que $c - \dfrac{1}{n} \leqslant x_n \leqslant c$.
      Nous créons ainsi une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de X_y telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = c$
   (c) f étant continue sur $[a; b] \subset I$, nous avons $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = f(c)$, et comme, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons $x_n \in X_y$ et donc $f(x_n) \leqslant y$, et donc, par passage à la limite, $f(c) \leqslant y$
   (d) Soit $x \in [c; b]$; alors, $x \geqslant c$ et $x \notin X_y$, et donc $f(x) > y$.
      f étant continue, $\lim\limits_{\substack{x \to c \\ x > c}} f(x) = f(c)$, et donc, en utilisant les théorèmes sur limites et relation d'ordre, nous avons $f(c) \geqslant y$
   (e) En conclusion, $f(c) = y$

Remarque 38 :

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$; alors $f([a;b]) = [m;M]$, et donc, pour tout $y \in [m;M]$, il existe $c \in [a;b]$ tel que $f(c) = y$

3.6.5 Synthèse

L'énoncé ci-après fait la synthèse des précédnts résultats.
Toute fonction continue sur un intervalle fermé borné $[a;b]$ est bornée ; elle atteint sa borne supérieure et sa borne inférieure et toute valeur comprise entre ses bornes

3.6.6 Corollaire

Soit $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(a) \times f(b) < 0$. Alors, il existe $c \in]a;b[$ tel que $f(c) = 0$

Démonstration

Que nous ayions $f(a) \times f(b) < 0$ signifie que $f(a)$ et $f(b)$ sont non nulles et de signe contraire.
Pour simplifier, supposons $f(a) > 0$ et $f(b) < 0$
Alors, $[f(b); f(a)] \subset f([a;b])$ et $0 \in [f(b); f(a)]$. D'après le théorème de la valeur intermédiaire, il existe $c \in [a;b]$ (en fait $c \in]a;b[$ puisque $f(a) \neq 0$ et $f(b) \neq 0$
Ce que nous voulions

Remarque 39 :

Ce résultat est très utilisé en analyse numérique pour localiser les racines d'une équation du type $f(x) = 0$ avec f qui est une fonction continue

Exemple 29 :

1. **Tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré impair possède une racine réelle.**

   En effet
   Soit $P(X) = a_{2n+1}X^{2n+1} + a_{2n}X^{2n} + \cdots + a_1X + a_0$, et supposons $a_{2n+1} > 0$ *(le problème serait le même si $a_{2n+1} < 0$)*
   A ce polynôme, on peut aussi associer la fonction polynômiale réelle :

   $$f(x) = a_{2n+1}x^{2n+1} + a_{2n}x^{2n} + \cdots + a_1x + a_0$$

   C'est une fonction continue telle que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$
   Soit alors $A > 0$
   Il existe $X_A \in \mathbb{R}$ tel que $x \geqslant X_A \Longrightarrow f(x) > A$ et $X'_A \in \mathbb{R}$ tel que $x \leqslant X'_A \Longrightarrow f(x) < -A$
   Nous avons alors $0 \in [f(X'_A); f(X_A)]$; f étant continue, il existe $x_0 \in [X'_A; X_A]$ tel que $f(x_0) = 0$
   Nous venons de démontrer que le polynôme P admet donc au moins une racine réelle

2. Une conséquence du point ci-dessus est que, si n est un nombre impair, tout nombre réel admet une racine n-ième
   Pour tout $a \in \mathbb{R}$, il suffit de considérer la fonction $f(x) = x^n - a = x^{2p+1} - a$

3. **Soit $f : [a;b] \longrightarrow [a;b]$ une fonction continue ; alors, il existe $\alpha \in [a;b]$ tel que $f(\alpha) = \alpha$**

   En effet
   Soit $g(x) = f(x) - x$; g est continue sur l'intervalle $[a;b]$ et est telle que :

▷ $g(a) = f(a) - a \geqslant 0$ ▷ $g(b) = f(b) - b \leqslant 0$

Nous avons donc $0 \in [g(b) ; g(a)]$; il existe donc $\alpha \in [a; b]$ tel que $g(\alpha) = 0$, c'est à dire tel que $f(\alpha) = \alpha$
Ce que nous voulions

4. **Soit $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $[a; b] \subset f([a; b])$; alors, il existe $\alpha \in [a; b]$ tel que $f(\alpha) = \alpha$**

   En effet
   Nous prenons toujours $g(x) = f(x) - x$ et nous supposons qu'il n'existe pas de nombre $\alpha \in [a; b]$ tel que $g(\alpha) = 0$
   Alors, la fonction g étant continue, pour tout $x \in [a; b]$, nous avons $g(x) > 0$ ou bien $g(x) < 0$
   Supposons, pour simplifier que $g(x) > 0$
   Comme $[a; b] \subset f([a; b])$ et f étant continue, il existe $x_0 \in [a; b]$ tel que $f(x_0) = a$. Comme $g(x_0) = f(x_0) - x_0 = a - x_0 \leqslant 0$, il y a donc contradiction.
   Il existe donc $\alpha \in [a; b]$ tel que $f(\alpha) = \alpha$

3.6.7 Exercices

Exercice 59 :

Soit $f(x) = x^2 \cos x + x \sin x + 1$. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$

Exercice 60 :

Soient $f : [0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : [0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continues et telles que

$$(f(0) - g(0))(f(1) - g(1)) < 0$$

Montrer qu'il existe $c \in]0; 1[$ tel que $f(c) = g(c)$

Exercice 61 :

Soient $p > 0$ et $q > 0$ et $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(a) \neq f(b)$. Démontrer qu'il existe $c \in [a; b]$ tel que : $pf(a) + qf(b) = (p + q) f(c)$

Exercice 62 :

Soit $f : [0; 1] \longrightarrow [0; 1]$ telle que :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f : [0; 1] & \longrightarrow & [0; 1] \\ x & \longmapsto & f(x) = \left\{ \begin{array}{l} 1 - x \text{ si } x \notin \mathbb{Q} \\ x \text{ si } x \in \mathbb{Q} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

1. La fonction f est-elle continue sur $[0; 1]$
2. Montrer que f prend toutes les valeurs comprises entre 0 et 1

Exercice 63 :

Soit $f : [0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, une application continue telle que $f(0) = f(1)$.
Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, il existe un nombre $\alpha_n \in [0; 1]$ tel que $f(\alpha_n) = f\left(\alpha_n + \dfrac{1}{n}\right)$

3.6.8 Théorème

Soit $E \subset \mathbb{R}$ et $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors, l'image de tout intervalle $I \subset E$ par f est un intervalle
Ainsi, si I est un intervalle et f fonction continue, alors $f(I)$ est un intervalle

Démonstration

Rappellons que I est un intervalle si et seulement si :

$$(\forall x \in I)\,(\forall y \in I)\,(x \leqslant y \Longrightarrow [x;y] \subset I)$$

Soient $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et I un intervalle inclus dans E
Soient $y_1 \in f\,(I)$ et $y_2 \in f\,(I)$ tels que $y_1 < y_2$; il faut donc montrer que $[y_1; y_2] \subset f\,(I)$
Il existe $x_1 \in I$ et $x_2 \in I$ tels que $y_1 = f\,(x_1)$ et $y_2 = f\,(x_2)$
Nous pouvons dire que l'intervalle fermé borné $[f\,(x_1)\,; f\,(x_2)] =\subset f\,([x_1; x_2])$
D'après le théorème de la valeur intermédiaire, pour tout $\beta \in [y_1; y_2]$, il existe $\alpha \in [x_1; x_2]$ tel que $f\,(\alpha) = \beta$. I étant un intervalle, nous avons $[x_1; x_2] \subset I$, et donc $f\,(\alpha) = \beta \in f\,(I)$ et donc $[y_1; y_2] \subset f\,(I)$.
Ainsi, $f\,(I)$ est un intervalle.

Remarque 40 :

L'image d'un intervalle ouvert par une fonction continue, si c'est un intervalle, n'est pas forcément un intervalle ouvert. L'image directe *(sauf pour les fermés bornés)* peut ne pas être de même nature.
Par exemple :

1. Si nous prenons la fonction $f\,(x) = x^2$ *(cf figure 3.18)*

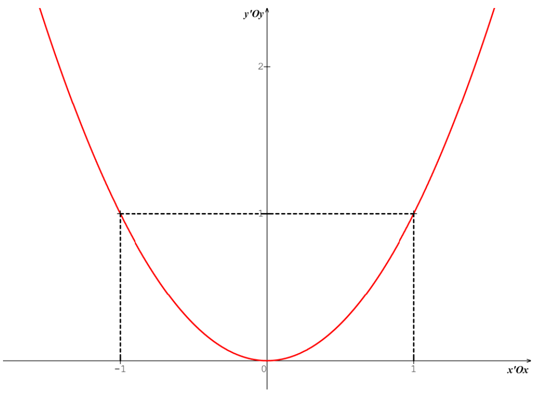

FIGURE 3.18 – Le graphe de $f\,(x) = x^2$

   L'image de l'ouvert $]-1; +1[$ par f est l'intervalle semi-ouvert $[0; +1[$

2. Si nous prenons la fonction $f\,(x) = \sin x$ *(cf figure 3.19)*

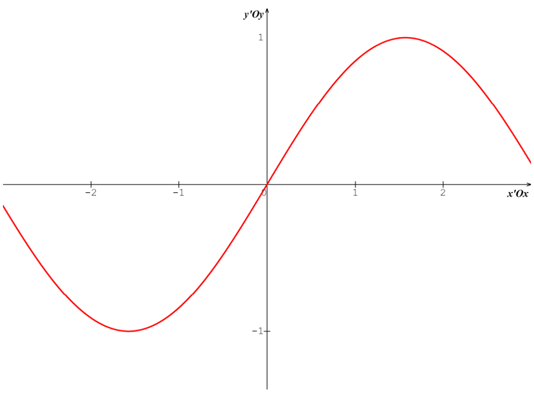

FIGURE 3.19 – Le graphe de $f\,(x) = \sin x$

   — L'image de l'intervalle $[0; \pi[$ est $[0; +1]$
   — L'image de l'intervalle $]-2\pi; +2\pi[$ *(intervalle ouvert)* est $[-1; +1]$ *(intervalle fermé)*

3.6.9 Théorème de Heine

Toute fonction f continue sur un intervalle fermé borné $[a;b]$ est uniformément continue sur $[a;b]$

Démonstration

1. Supposons que f ne soit pas uniformément continue sur l'intervalle $[a;b]$
   Soit $x \in [a;b]$
   Il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $\eta > 0$ il existe $x \in [a;b]$ et il existe $y \in [a;b]$ nous ayions $|x-y| < \eta$ et $|f(x) - f(y)| \geqslant \varepsilon$
   Donc, pour ce $\varepsilon > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe $x_n \in [a;b]$ et il existe $y_n \in [a;b]$ nous ayions $|x_n - y_n| < \dfrac{1}{n}$ et $|f(x_n) - f(y_n)| \geqslant \varepsilon$.
2. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \in [a;b]$, de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, on peut extraire une sous-suite $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergente et telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{\varphi(n)} = l$
   Nous allons démontrer que la suite $\left(y_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge aussi vers l. Nous avons :
   $$\left|y_{\varphi(n)} - l\right| \leqslant \left|y_{\varphi(n)} - x_{\varphi(n)}\right| + \left|x_{\varphi(n)} - l\right|$$
   Comme, $\varphi(n) \geqslant n$, nous avons $\dfrac{1}{\varphi(n)} \leqslant \dfrac{1}{n}$
   Soit $\alpha > 0$.
   Il existe $N_\alpha \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant N_\alpha \Longrightarrow \left|x_{\varphi(n)} - l\right| < \dfrac{\alpha}{2}$
   Soit N_α^1 tel que $\dfrac{1}{N_\alpha^1} < \dfrac{\alpha}{2}$.
   Si $n \geqslant \sup\left(N_\alpha, N_\alpha^1\right)$, alors $\dfrac{1}{\varphi(n)} \leqslant \dfrac{1}{n} < \dfrac{\alpha}{2}$, et donc, pour $n \geqslant \sup\left(N_\alpha, N_\alpha^1\right)$:
   $$\left|y_{\varphi(n)} - l\right| \leqslant \left|y_{\varphi(n)} - x_{\varphi(n)}\right| + \left|x_{\varphi(n)} - l\right| < \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = \alpha$$
   Ainsi, $\left|y_{\varphi(n)} - l\right| < \alpha$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} y_{\varphi(n)} = l$
3. f n'est pas continue en l
   En effet, si f est continue, $\lim\limits_{n\to+\infty} f\left(y_{\varphi(n)}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} f\left(x_{\varphi(n)}\right) = f(l)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f\left(y_{\varphi(n)}\right) - f\left(x_{\varphi(n)}\right) = 0$ or, c'est impossible puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons $\left|f\left(y_{\varphi(n)}\right) - f\left(x_{\varphi(n)}\right)\right| \geqslant \varepsilon$
   f n'est donc pas continue en l

Il y a donc contradiction avec l'hypothèse, et nous concluons que f est donc uniformément continue sur $[a;b]$

Remarque 41 :

La clef de la démonstration ci-dessus est que l'intervalle $[a;b]$ est un fermé borné et que de toute suite d'éléments de $[a;b]$ on peut en extraire une sous-suite convergente

3.6.10 Exercices

Exercice 64 :

Soient a et b 2 réels tels que $a \leqslant b$
Soient $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ toutes deux continues et telles que, pour tout $x \in [a;b]$, nous avons $f(x) > g(x)$
Démontrer qu'il existe $\lambda > 0$ tel que, pour tout $x \in [a;b]$, nous ayions $f(x) \geqslant g(x) + \lambda$

Exercice 65 :

Démontrer que toute fonction continue et périodique est bornée

Exercice 66 :

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leqslant b$. Soit $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que f admette des maxima locaux en x_1 et x_2 avec $x_1 < x_2$.
Démontrer que f admet un minimum local en un point $c \in \left]x_1; x_2\right[$

Exercice 67 :

Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction continue telle que pour tout $x \geqslant 0$, nous ayions $f(x) < x$

1. Démontrer que $f(0) = 0$
2. Soient $a \in \mathbb{R}^+$ et $b \in \mathbb{R}^+$ tels que $0 < a < b$.
   Montrer qu'il existe $M \in [0; 1[$ tel que pour tout $x \in [a;b]$, nous ayions $f(x) \leqslant Mx$