3.7 Monotonie et continuité

Nous ne reviendrons pas dans cette partie sur les définitions de la monotonie donnée en 3.2.6

3.7.1 Proposition

Soit $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction monotone. Alors, f est bornée sur $[a;b]$

Démonstration

Visualisons, par la figure 3.20 ce qu'est une fonction monotone non forcément continue

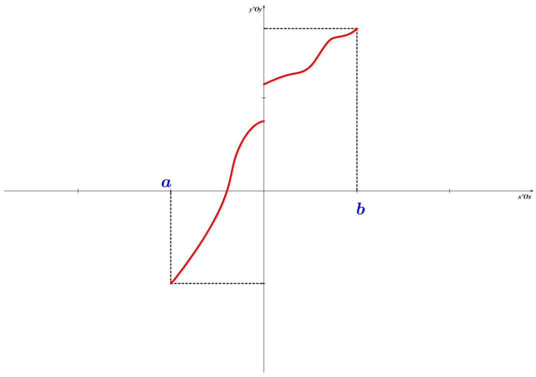

FIGURE 3.20 – Visualisation, d'une fonction monotone *(ici, croissante)*

C'est assez simple ; supposons, pour simplifier que f soit croissante, alors pour tout $x \in [a;b]$, nous avons $f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b)$, ce qui montre que f est bornée.

Remarque 42 :

Si nous avons :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f : [0;+1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \dfrac{1}{x-1} \end{array} \right.$$

f est croissante sur $[0;+1[$, mais n'y est pas bornée, puisque l'intervalle $[0;+1[$, s'il est borné, **n'est pas fermé**

3.7.2 Proposition

Soit $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction monotone. Alors, pour tout $x_0 \in [a;b]$, f admet une limite à gauche de x_0, c'est à dire $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$ existe

Démonstration

Supposons f croissante sur $[a;b]$ et soit $x_0 \in [a;b]$
Soit $A = \{y = f(x) \text{ où } a \leqslant x < x_0\}$
Nous avons $A \subset f([a;b])$, et comme d'après 3.7.1 $f([a;b])$ est aussi bornée, l'ensemble A est borné. On appele $\mu = \sup_{x \in A} f(x) = \sup_{x < x_0} f(x)$.
Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $y' \in A$ tel que $\mu - \varepsilon < y' \leqslant \mu$, c'est à dire qu'il existe $x_1 < x_0$ tel que $f(x_1) = y'$ et $\mu - \varepsilon < f(x_1) \leqslant \mu$
f étant coissante, pour tout $x \in]x_1;x_0[$, nous avons $\mu - \varepsilon < f(x_1) \leqslant f(x) \leqslant \mu$
Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$, $\eta = x_0 - x_1$ tel que si $x_0 - \eta \leqslant x < x_0$ alors $\mu - \varepsilon < f(x) \leqslant \mu$, ce qui montre que $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = \mu$

Remarque 43 :

De la même manière, on démontrerait que f admet une limite à droite pour tout $x_0 \in [a;b]$

3.7.3 Proposition

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction injective et continue. Alors, f est strictement monotone sur I

Démonstration

Supposons que f ne soit pas strictement monotone sur I. ce qui veut dire qu'il existe

- ▷ $x_1 < x_2$ et $f(x_1) \leqslant f(x_2)$
- ▷ $x_3 < x_4$ et $f(x_3) \geqslant f(x_4)$

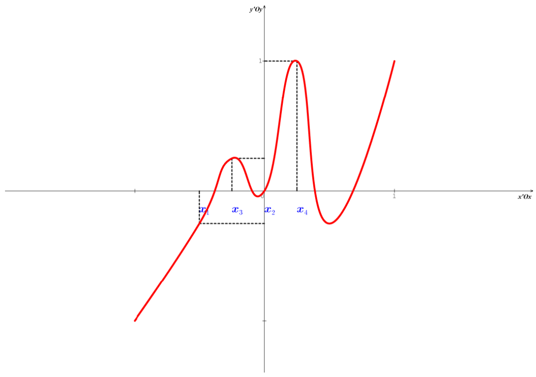

FIGURE 3.21 – Visualisation, par un graphe du fait que f ne soit pas monotone

Soit $g : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que, pour tout $t \in [0;1]$,

$$g(t) = f(tx_1 + (1-t)x_3) - f(tx_2 + (1-t)x_4)$$

Alors, g est continue comme composée et somme de fonctions continues, nous avons :

- ▷ $g(0) = f(x_3) - f(x_4) \geqslant 0$
- ▷ $g(1) = f(x_1) - f(x_2) \leqslant 0$

Il existe donc $\lambda \in [0;1]$ tel que $g(\lambda) = 0$
Soit $x_5 = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_3$ et $x_6 = \lambda x_2 + (1-\lambda)x_4$
Alors, $x_5 \in [x_1;x_3]$ et $x_6 \in [x_2;x_4]$, et comme I est un intervalle, nous avons $[x_1;x_3] \subset I$ et $[x_2;x_4] \subset I$ et donc $x_5 \in I$ et $x_6 \in I$
Des hypothèses $x_1 < x_2$ et $x_3 < x_4$ nous déduisons $\lambda x_1 \leqslant \lambda x_2$ et $(1-\lambda)x_3 \leqslant (1-\lambda)x_4$; l'une des deux inégalités au moins étant stricte, nous déduisons $x_5 < x_6$
Comme $g(\lambda) = f(x_5) - f(x_6) = 0$, nous avons $f(x_5) = f(x_6)$ alors que $x_5 \neq x_6$; il y a donc contradiction avec le fait que f soit injective.
f est donc strictement monotone.

3.7.4 Théorème

Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur E. Soit $I \subset E$ un intervalle sur lequel f est strictement monotone. Alors :

1. **f est bijective de I vers $f(I)$**
2. **La fonction réciproque $f^{-1} : f(I) \longrightarrow I$ est continue sur $f(I)$ et de même sens de variation que f**

Démonstration

Soit f continue et strictement monotone sur I ; pour simplifier, supposons f strictement croissante.

1. Démontrons que f est bijective de I sur $f(I)$
   (a) f est injective, puisque si $x \in I$ et $y \in I$ tels que $x \neq y$, nous avons $x < y$ ou $y < x$.
   — Si $x < y$ alors $f(x) < f(y)$
   — Si $y < x$ alors $f(y) < f(x)$
   A chaque fois, donc $f(y) \neq f(x)$. f est donc bien injective
   (b) f est clairement surjective de I sur $f(I)$
   (c) f étant injective et surjective, f est bien bijective
2. f^{-1} est de même sens de variations que f
   Nous avons supposé f strictement croissante ; démontrons que f^{-1} est strictement croissante.
   Soient $y_1 \in f(I)$ et $y_2 \in f(I)$ tels que $y_1 < y_2$
   Il existe $x_1 \in I$ et $x_2 \in I$ tels que $y_1 = f(x_1) \iff x_1 = f^{-1}(y_1)$ et $y_2 = f(x_2) \iff x_2 = f^{-1}(y_2)$
   f étant strictement croissante, nous avons
   $$y_1 < y_2 \iff f(x_1) < f(x_2) \iff x_1 < x_2 \iff f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$$
   f^{-1} est donc strictement croissante.
3. L'image d'un ouvert par f est un ouvert
   Soit donc $]a;b[\subset I$ un intervalle ouvert.
   f étant continue, $f(]a;b[)$ est un intervalle de $f(I)$, et donc, en particulier $]f(a);f(b)[\subset f(]a;b[)$
   Soit $y \in f(]a;b[)$; il existe $x \in]a;b[$ tel que $y = f(x)$; de $x \in]a;b[$, nous avons $a < x < b$ et donc $f(a) < f(x) < f(b)$, et donc $y \in]f(a);f(b)[$, et nous avons donc $f(]a;b[) \subset]f(a);f(b)[$
   D'où, nous avons $f(]a;b[) =]f(a);f(b)[$ et donc $f(]a;b[)$ est un intervalle ouvert de I
4. f^{-1} est une fonction continue sur $f(I)$
   La démonstration de cet item, elle non plus, n'a rien d'évidente
   Soit $y_0 \in f(I)$ et $\varepsilon > 0$.
   Nous allons démontrer que f^{-1} est continue en y_0. Il existe $x_0 \in I$ tel que $y_0 = f(x_0)$
   (a) **Si $x_0 \in \mathring{I}$, c'est à dire si x_0 est intérieur à I**
   ▷ Il existe $\eta > 0$ tel que $]x_0 - \eta; x_0 + \eta[\subset I$; on peut même choisir $\eta < \varepsilon$
   ▷ f étant strictement croissante, pour tout $x \in]x_0 - \eta; x_0 + \eta[$, nous avons :
   $$f(x_0 - \eta) < f(x) < f(x_0 + \eta)$$
   Et, en particulier
   $$f(x_0 - \eta) < f(x_0) < f(x_0 + \eta) \iff f(x_0 - \eta) < y_0 < f(x_0 + \eta)$$
   ▷ On appelle :
   $$\star\ \alpha_1 = f(x_0) - f(x_0 - \eta) = y_0 - f(x_0 - \eta) \qquad \star\ \alpha_2 = f(x_0 + \eta) - f(x_0) = f(x_0 + \eta) - y_0$$
   Et $\alpha = \min\{\alpha_1; \alpha_2\}$
   ▷ Soit $y \in]y_0 - \alpha; y_0 + \alpha[$, c'est à dire $y \in f(I)$ tel que $|y - y_0| < \alpha \iff y_0 - \alpha < y < y_0 + \alpha$
   De $\alpha \leqslant \alpha_1 \iff -\alpha_1 < -\alpha$ et $\alpha \leqslant \alpha_2$, nous tirons :
   $$\begin{aligned} y_0 - \alpha_1 \leqslant y_0 - \alpha < y < y_0 + \alpha \leqslant y_0 + \alpha_2 &\iff y_0 - (y_0 - f(x_0 - \eta)) < y < y_0 + f(x_0 + \eta) - y_0 \\ &\iff f(x_0 - \eta) < y < f(x_0 + \eta) \end{aligned}$$
   ▷ f étant strictement croissante, f^{-1} l'est aussi sur $f(I)$. Donc :
   $$\begin{aligned} f(x_0 - \eta) < y < f(x_0 + \eta) &\iff f^{-1}(f(x_0 - \eta)) < f^{-1}(y) < f^{-1}(f(x_0 + \eta)) \\ &\iff x_0 - \eta < f^{-1}(y) < x_0 + \eta \\ &\iff \left|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)\right| < \eta \leqslant \varepsilon \end{aligned}$$
   Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $y \in f(I)$, $|y - y_0| < \alpha \implies \left|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)\right| < \varepsilon$

(b) **Si** $x_0 \in I \setminus \mathring{I}$

Il existe alors $\eta > 0$ tel que $[x_0; x_0 + \eta[\subset I$ ou $]x_0 - \eta; x_0] \subset I$. Et la démonstration est semblable à celle qui précède

Remarque 44 :

Il faut remarquer que nous n'utilisons pas la continuité de f, mais la stricte monotonie de f

3.7.5 Définition d'homéomorphisme

1. **Soient $I \subset \mathbb{R}$ et $J \subset \mathbb{R}$ 2 intervalles et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$**
   f est un homéomorphisme de I sur J si :
   (a) **$f : I \longrightarrow J$ est bijective et continue**
   (b) **Et $f^{-1} : J \longrightarrow I$ est, elle aussi, bijective et continue**
2. **2 intervalles I et J sont dits homéomorphes s'il existe un homéomorphisme entre I et J**

Exemple 30 :

1. La fonction $f(x) = \dfrac{1}{x}$ est un homéomorphisme de $]0; 1]$ sur $[+1; +\infty[$
2. deux intervalles ouverts non vides sont homéomorphes

   Pour le montrer, il suffit de montrer qu'un intervalle ouvert non vide $]a; b[$est homéomorphe à $]0; 1[$; pour cela, il suffit de prendre l'application affine $f(x) = \dfrac{x - a}{b - a}$

   De la même manière, pour $a > 0$, la fonction $\Phi(x) = \dfrac{a}{x}$ est un homéomorphisme de $]0; 1[$ sur $]a; +\infty[$
3. Il est assez facile de voir que 2 intervalles fermés bornés sont homéomorphes, tout comme deux intervalles semi-ouverts.
4. Un intervalle fermé borné ne peut pas être homéomorphe à un intervalle semi-ouvert, car l'image d'un intervalle fermé borné par une fonction continue est un intervalle fermé borné.
5. Bien entendu, les fonctions décrites dans 3.7.4 sont des homéomorphismes.

3.7.6 Exemples de fonctions réciproques

Nous donnons ici quelques exemples de telles fonctions ; elle feront toutes l'objet d'une étude plus approfondie dans le chapitre des fonctions transcendantes

1. **Les fonctions puissances**

   Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on sait que $f(x) = x^n$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$; cette fonction f admet donc une fonction réciproque de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ notée $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$

   Voir les graphes en figure 3.22
2. **La fonction** $\arcsin x$

   La fonction sin de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ **n'est pas bijective** ; cependant, si nous restreignons l'intervalle dans lequel sin est strictement monotone, nous obtenons une fonction bijective.

   La fonction $\sin : \left[-\dfrac{\pi}{2}; +\dfrac{\pi}{2}\right] \Longrightarrow [-1, +1]$ est continue et strictement croissante ; elle y est donc bijective, et admet, dans ces conditions, une application réciproque notée arcsin

   Nous avons donc : $\arcsin : [-1, +1] \Longrightarrow \left[-\dfrac{\pi}{2}, +\dfrac{\pi}{2}\right]$; cette fonction est continue et croissante sur $[-1, +1]$

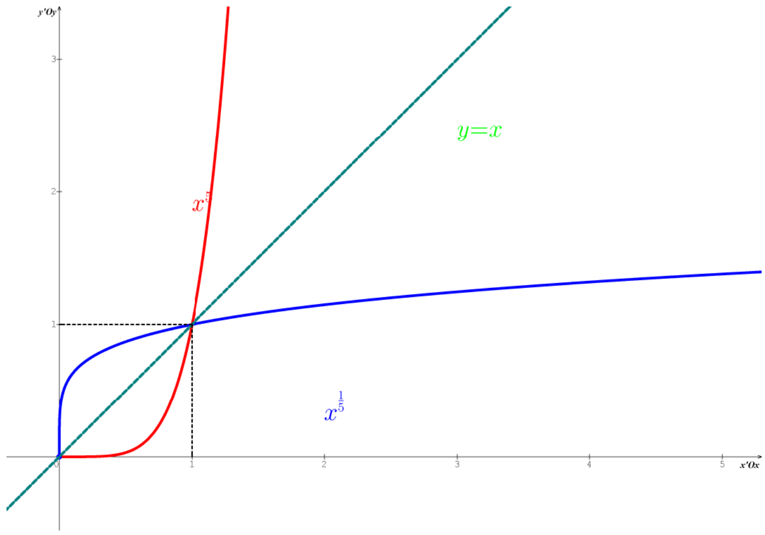

FIGURE 3.22 – Par exemple, voici les graphes des fonctions x^5 et $x^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{x}$, symétriques par rapport à la première bissectrice

Il faut absolument remarquer que :

$$\boxed{y = \arcsin x \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \sin y \\ x \in [-1, +1] \\ y \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, +\dfrac{\pi}{2}\right] \end{cases}}$$

Voir les graphes en figure 3.23

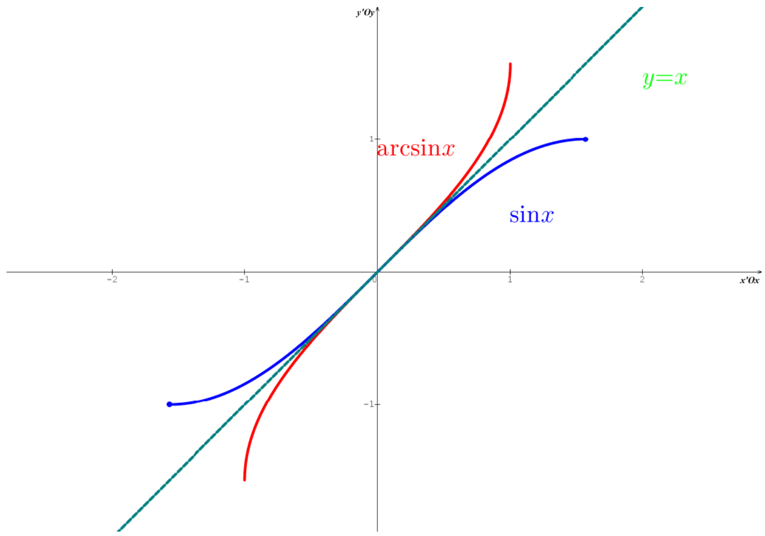

FIGURE 3.23 – Les graphes des fonctions $\arcsin x$ et $\sin x$, symétriques par rapport à la première bissectrice

3. **La fonction** $\arccos x$
   La fonction cos de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ n'est pas bijective ; cependant, si nous restreignons l'intervalle dans lequel cos est strictement monotone, nous obtenons une bijection.
   La fonction $\cos : [0; +\pi] \to [-1, +1]$ est continue et strictement décroissante ; elle y est donc bijective, et admet, dans ces conditions, une application réciproque notée arccos

Nous avons donc : arccos : $[-1,+1] \to [0,+\pi]$; cette fonction est continue et décroissante sur $[-1,+1]$

Il faut absolument remarquer que :

$$\boxed{y = \arccos x \iff \begin{cases} x = \cos y \\ x \in [-1,+1] \\ y \in [0,+\pi] \end{cases}}$$

Voir les graphes en figure 3.24

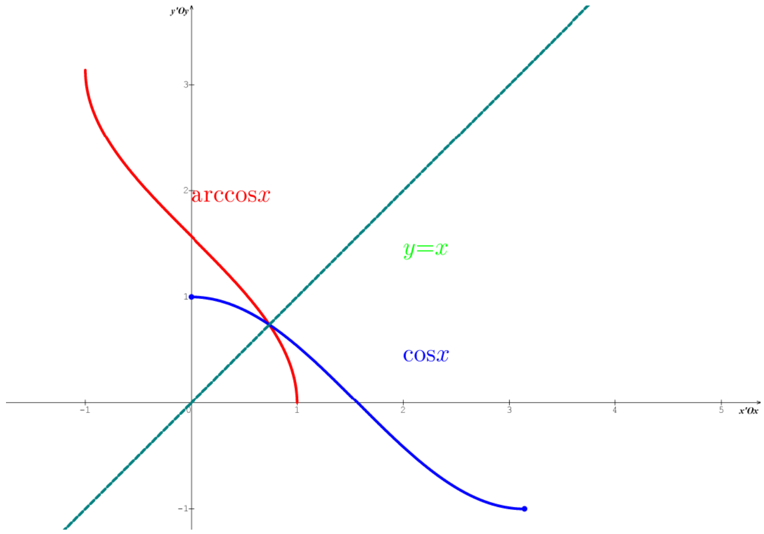

FIGURE 3.24 – Le graphe de la fonction $\arccos x$ et de la fonction $\cos x$

4. **La fonction** $\arctan x$
   La fonction tan de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ n'est pas bijective ; elle n'est même pas définie pour tous les x de $\mathbb{R}$: les nombres $\left\{\tan\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right) k \in \mathbb{Z}\right\}$ n'existent pas.
   Cependant, si nous restreignons l'intervalle dans lequel tan est strictement monotone, nous obtenons une bijection.
   Ainsi, la fonction tan : $\left]-\frac{\pi}{2};+\frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ est continue et strictement croissante ; elle y est donc bijective, et admet, dans ces conditions, une application réciproque notée arctan
   Nous avons donc : arctan : $\mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2};+\frac{\pi}{2}\right[$; cette fonction est continue et croissante sur $\mathbb{R}$
   Il faut absolument remarquer que :

$$\boxed{y = \arctan x \iff \begin{cases} x = \tan y \\ x \in \mathbb{R} \\ y \in \left]-\frac{\pi}{2};+\frac{\pi}{2}\right[\end{cases}}$$

   Voir les graphes en figure 3.25

Exercice 68 :

Voici quelques questions simples :

1. Quel est le domaine de définition de $\arcsin(x+1)$?
2. Et celui de $\arcsin\left(x^2+1\right)$?
3. Et celui de $\arcsin\left(x^4+2\right)$?

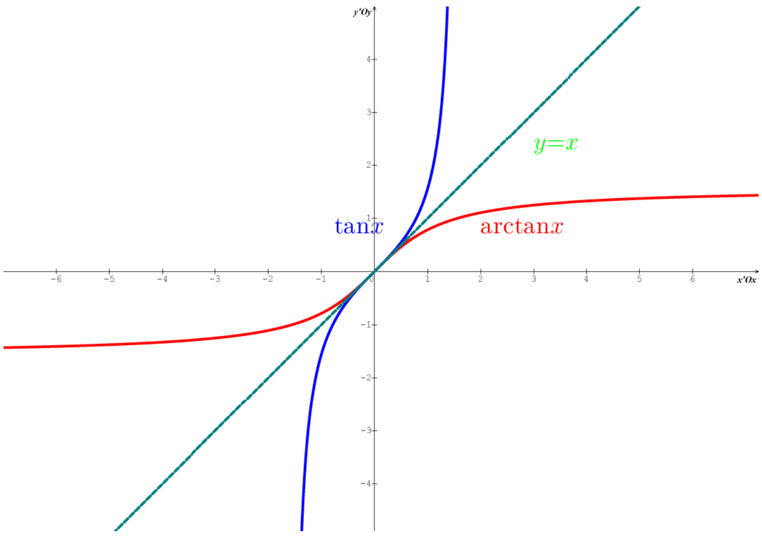

FIGURE 3.25 – Le graphe de la fonction $\arctan x$ et de la fonction $\tan x$

Et quelques questions moins simples :

1. Montrer que $\arcsin(-x) = -\arcsin x$
2. Montrer que $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$
3. Montrer que $\arcsin x + \arccos x = +\dfrac{\pi}{2}$

3.7.7 Théorème de synthèse

Soit $E \subset \mathbb{R}$, $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ et $I \subset E$ un intervalle.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. **f est continue et injective**
2. **f est continue et strictement monotone sur I**
3. **f est strictement monotone sur I et $f(I)$ est un intervalle**

Démonstration

1. **Supposons f est continue et injective et démontrons que f est continue et strictement monotone sur I**
   C'est très simplement l'énoncé du théorème 3.7.3.
   Nous venons de montrer que l'assertion (1) implique l'assertion (2)
2. **Supposons f est continue et strictement monotone sur I et démontrons que f est strictement monotone sur I et $f(I)$ est un intervalle**
   C'est très simplement le théorème de la valeur intermédiaire.
   Nous venons de montrer que l'assertion (2) implique l'assertion (3)
3. **Supposons f est strictement monotone sur I et $f(I)$ est un intervalle et démontrons que f est continue et injective**
   - ▷ Nous avons déjà montré que si f est strictement monotone, alors f est injective *(cf 3.7.4)*
   - ▷ Démontrons que f est continue
     Par hypothèse, $f(I)$ est un intervalle, et supposons, pour simplifier, que f soit strictement croissante
     - ⋆ D'après 3.7.2, pour tout $x_0 \in \mathring{I}$, $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x)$ existe et est finie ; notons $l_{x_0}^-$ cette limite.

De même, toujours d'après 3.7.2, $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$ existe et nous la notons $l_{x_0}^+$.

Nous avons même, $l_{x_0}^- \leqslant f(x_0) \leqslant l_{x_0}^+$ [5]

- ⋆ Supposons f non continue sur I
  Il existe donc $x_0 \in I$ tel que $x_0 \neq \inf I$ et $l_{x_0}^- < f(x_0)$ ou $f(x_0) < l_{x_0}^+$. Les démonstrations étant semblables, supposons $l_{x_0}^- < f(x_0)$
- ⋆ Nous allons montrer que $l_{x_0}^- \in f(I)$
  Comme $\inf I < x_0$, il existe $t \in I$ tel que $\inf I \leqslant t < x_0$, et comme $t \in I$, nous avons $f(t) \in f(I)$; $f(I)$ étant un intervalle, et f étant croissante, nous avons : $[f(t) ; f(x_0)] \subset f(I)$
  Nous avons aussi $f(t) \leqslant l_{x_0}^- < f(x_0)$, donc $l_{x_0}^- \in [f(t) ; f(x_0)]$ et donc $l_{x_0}^- \in f(I)$
- ⋆ Soit $y \in \left]l_{x_0}^- ; f(x_0)\right[$ [6]
  $f(I)$ étant un intervalle, $\left]l_{x_0}^- ; f(x_0)\right[\subset f(I)$ et il existe donc $x \in I$ tel que $y = f(x)$;
  - ∘ Si $x \geqslant x_0$, alors, de la stricte croissance, $f(x) = y \geqslant f(x_0)$; contradiction
  - ∘ Si $x < x_0$, alors, de la limite, $f(x) < l_{x_0}^-$; il y a toujours contradiction

f est donc continue sur I

3.7.8 Corollaire

Soient $I \subset \mathbb{R}$ et $J \subset \mathbb{R}$ 2 intervalles
Les homéomorphismes de I sur J sont les fonctions f srictement monotones telles que $f(I) = J$

3.7.9 Quelques exercices

La résolution de ces exercices nécessite de bien connaître les formules trigonométriques, et, surtout, de revenir aux définitions des fonctions trigonométriques réciproques.

Exercice 69 :

1. Calculer, pour $ab \neq 1$, $\arctan a + \arctan b$
2. Calculer, pour $x \neq 0$, $\arctan x + \arctan \dfrac{1}{x}$

Exercice 70 :

Démontrer les égalités :

1. $\cos(\arctan x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
2. $\sin(\arctan x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

Exercice 71 :

Pour $x \in \mathbb{R}$ tel que $-\dfrac{\pi}{4} < x < \dfrac{3\pi}{4}$, simplifier $\arcsin(2 \sin x \cos x)$

5. S'il y a égalité, alors f est continue en x_0
6. Cet intervalle n'est pas vide, mais, si nous sommes cohérents avec la supposition de départ, $\left]l_{x_0}^- ; f(x_0)\right[\subsetneq f(I)$; nous allons donc arriver à une contradiction)