3.8 Suites de fonctions

3.8.1 Définition

Soit $E \subset \mathbb{R}$ un sous ensemble de $\mathbb{R}$. $\mathbb{K}^E$ est l'ensemble des fonctions numériques, définies sur E et à valeurs dans $\mathbb{K}$.
Une suite de fonctions numériques est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{K}^E$

Remarque 45 :

Comme pour les suites numériques :

1. On désigne par f_n, la fonction image de l'entier n
2. La notation $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne la suite elle-même

Exemple 31 :

1. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\left\{\begin{array}{rcl} f_n : [0;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f_n(x) = x^n \end{array}\right.$$

2. Ou encore, cette suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\left\{\begin{array}{rcl} g_n : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & g_n(x) = \dfrac{e^{inx}}{n} \end{array}\right.$$

Remarque 46 :

Il y a plusieurs questions qui se posent avec les suites de fonctions.
Le premier problème est lié à **la convergence**. Que veut dire, par exemple, qu'une suite de fonctions converge ?
On peut penser qu'une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si, pour tout $x \in E$, la suite numérique dépendant de x, $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un nombre l_x, et si nous posons $f(x) = l_x$, on dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f. Voici la définition formalisée

3.8.2 Définition de la convergence simple

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur $E \subset \mathbb{R}$ et à valeurs de $\mathbb{K}$.
On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement et admet pour limite la fonction f si et seulement si, pour tout $x \in E$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$, c'est à dire

$$(\forall x \in E)\,(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists N \in \mathbb{N})\,(\forall n \in \mathbb{N})\,(n \geqslant N \Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$$

Remarque 47 :

1. L'entier N dépend de ε et aussi de $x \in E$
2. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est simplement convergente si et seulement si, pour tout $x \in E$, la suite numérique dépendant de x, $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, c'est à dire :

$$(\forall x \in E)\,(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists N \in \mathbb{N})\,(\forall p \in \mathbb{N})\,(\forall q \in \mathbb{N})\,(p > q \geqslant N \Longrightarrow |f_p(x) - f_q(x)| < \varepsilon)$$

Exemple 32 :

1. Prenons $E = [0;1]$, et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} f_n : [0;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f_n(x) = \dfrac{x}{x+n} \end{array}\right.$$

Pour tout $x \in [0;1]$, nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x}{x+n} = 0$. La limite de cette suite de fonctions est donc la fonction nulle sur $[0;1]$; f est une fonction continue

2. Prenons toujours $E = [0;1]$, et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} g_n : [0;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & g_n(x) = \dfrac{nx}{1+nx} \end{array}\right.$$

Pour tout $x \in [0;1]$, $x \neq 0$, nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{nx}{1+nx} = 1$.
Pour $x = 0$, nous avons $g_n(0) = 0$ La limite de cette suite de fonctions est donc la fonction g définie par $g(x) = 1$ pour $x \in]0;+1]$ et $g(0) = 0$.
Cette fois-ci, g n'est pas une fonction continue, alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions g_n sont continues.*(Voir la figure 3.26)*

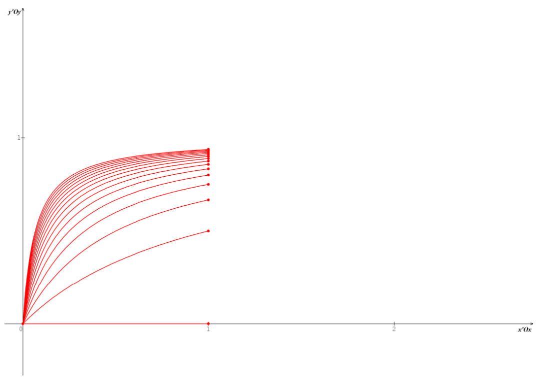

FIGURE 3.26 – Une représentation des fonctions g_n pour $n = 0, \cdots, 10$

Exercice 72 :

Pour $E = [0;1]$, nous définissons la suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par, pour tout $x \in [0;1]$, $f_n(x) = n^2 x \left(1-x^2\right)^n$. Quelle est la limite simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Exercice 73 :

Soit $E \subset \mathbb{R}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de E dans $\mathbb{R}$ qui converge simplement vers une fonction f. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, chaque fonction f_n est croissante. Démontrer que f est croissante

3.8.3 Définition de la convergence uniforme

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur $E \subset \mathbb{R}$ et à valeurs de $\mathbb{K}$.
On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément et admet pour limite la fonction f si et seulement si,

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists N \in \mathbb{N})\,(\forall n \in \mathbb{N})\,((n \geqslant N) \Longrightarrow ((\forall x \in E)\,(|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)))$$

Remarque 48 :

1. Il faut remarquer la place du quantificateur $(\forall x \in E)$
2. **Il est tout à fait possible d'écrire que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément et admet pour limite la fonction f si et seulement si,**

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists N \in \mathbb{N})\,(\forall n \in \mathbb{N})\left((n \geqslant N) \Longrightarrow \sup_{x\in E}|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\right)$$

   C'est, le plus souvent, l'outil que nous utiliserons pour démontrer la convergence uniforme
3. Une autre façon de voir les choses est de dire que la suite numérique $\left(\sup_{x\in E}|f_n(x) - f(x)|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ définie à partir d'un certain rang, converge vers 0
4. Ce qui signifie que, à partir d'un certain rang *(en fait, le rang N)* le graphe des f_n se trouve dans « un tube » $f + \varepsilon \longleftrightarrow f - \varepsilon$; cf la figure 3.27

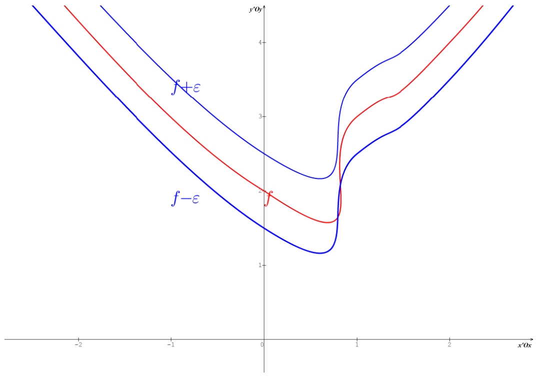

FIGURE 3.27 – Le « tube » dans lequel se trouvent les f_n

3.8.4 Proposition

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur $E \subset \mathbb{R}$ et à valeurs de $\mathbb{K}$ qui converge uniformément vers f
Alors, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f

Démonstration

C'est très facile.
Soit $x \in E$ et $\varepsilon > 0$
La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant uniformément vers f, il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que si $n > N$, alors $\sup_{t\in E}|f_n(t) - f(t)| < \varepsilon$.
En particulier, si $n > N$, alors $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$
La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc simplement vers f

Remarque 49 :

Et, évidemment, la réciproque est fausse ! !

On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$f_n(x) = \begin{cases} nx & \text{si } x \in \left[0; \dfrac{1}{n}\right] \\ -n\left(x - \dfrac{2}{n}\right) & \text{si } x \in \left[\dfrac{1}{n}; \dfrac{2}{n}\right] \\ 0 & \text{si } x \in \left[\dfrac{2}{n}; 1\right] \end{cases}$$

Pour $x \in [0;1]$ fixé, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\dfrac{2}{n} < x$, et donc si $n \geqslant N_0$, alors $f_n(x) = 0$; la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$

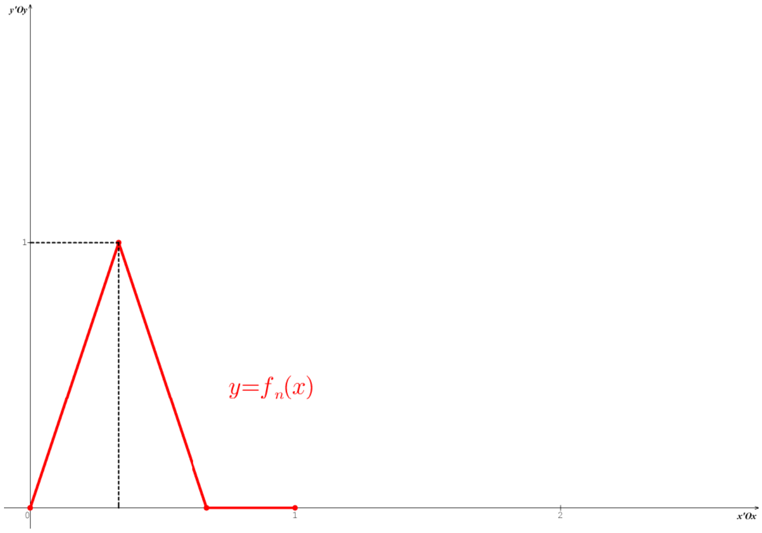

FIGURE 3.28 – Représentation graphique d'une fonction f_n

converge donc simplement vers 0.
Mais, elle ne converge pas uniformément vers 0. En effet, $\sup_{x\in[0;1]} |f_n(x)| = 1$.

Exemple 33 :

Exemple de suite de fonctions qui converge uniformément :
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ par :

$$f_n(x) = x\sqrt{n}e^{-nx}$$

En faisant une étude classique, on remarque que f_n admet un maximum en $x_0 = \dfrac{1}{n}$ et $f_n\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{e\sqrt{n}}$.
Donc, $\sup_{x\in\mathbb{R}^+} |f_n(x)| = \dfrac{1}{e\sqrt{n}}$; et comme $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{e\sqrt{n}} = 0$, la suite converge donc uniformément sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction nulle

3.8.5 Proposition

Soit $E \subset \mathbb{R}$, f une fonction numérique définie sur E. On suppose qu'il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers f
On suppose, de plus, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur E
Alors, f est continue sur E

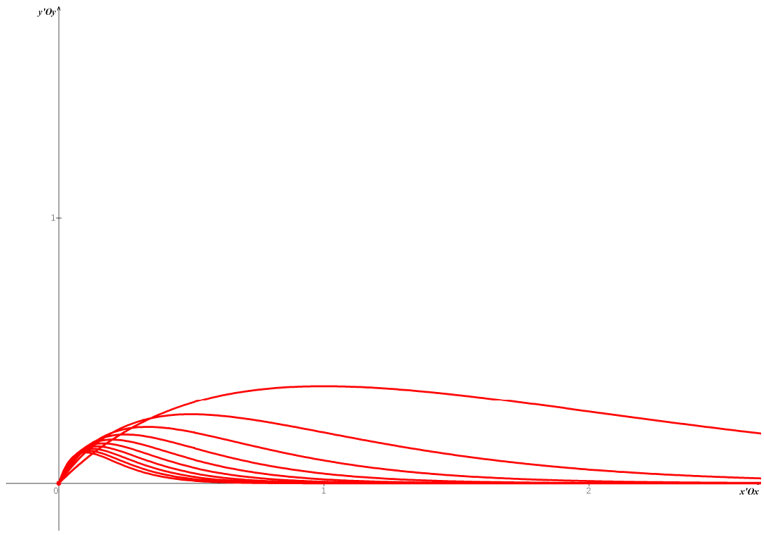

FIGURE 3.29 – Représentation graphique des fonction $f_n(x) = x\sqrt{n}e^{-nx}$ pour $n = 1, \cdots, 10$

Démonstration

Soit $x_0 \in E$ et $\varepsilon > 0$
Pour commencer, nous avons :

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| = & \ |(f(x) - f_n(x)) + (f_n(x) - f_n(x_0)) + (f_n(x_0) - f(x_0))| \\ \leqslant & \ |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \end{aligned}$$

- ▷ $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge uniformément vers** f
  Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N$ alors, pour tout $x \in E$, nous avons $|f(x) - f_n(x)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{3}$; en particulier, $|f_n(x_0) - f(x_0)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{3}$
- ▷ **Pour tout** $n \in \mathbb{N}$**,** f_n **est continue en** x_0
  Pour ce $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que si $|x - x_0| < \eta$, alors $|f_n(x) - f_n(x_0)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{3}$

Ainsi, pour $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que si $|x - x_0| < \eta$, alors $|f(x) - f(x_0)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{3} + \dfrac{\varepsilon}{3} + \dfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$
f est donc continue en x_0

Remarque 50 :

1. Dit autrement : **La limite d'une suite de fonctions continues convergeant uniformément est continue**
2. Il y a deux mots importants à retenir : convergence uniforme et fonctions continues

Exercice 74 :

Soit $E \subset \mathbb{R}$, f une fonction numérique définie sur E. On suppose qu'il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers f. On suppose, de plus, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est uniformément continue sur E. Démontrer que f est uniformément continue sur E
(Pour résoudre cet exercice, utiliser la démonstration de 3.8.5)

3.8.6 Corollaire

Soit $E \subset \mathbb{R}$ et $a \in \overline{E}$ adhérent à E. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur E telles que :

- ▷ $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in E}} f_n(x) = l_n$

▷ **La suite $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} l_n = l$**

▷ **La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction f définie sur E**

Alors $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x\in E}} f(x) = l$

Démonstration

Soit $\varepsilon > 0$

Pour commencer, nous avons :

$$\begin{aligned}|f(x) - l| = & \ |(f(x) - f_n(x)) + (f_n(x) - l_n) + (l_n - l)| \\ \leqslant & \ |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - l_n| + |l_n - l|\end{aligned}$$

▷ **$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f**

Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N$ alors, pour tout $x \in E$, nous avons $|f(x) - f_n(x)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{3}$.

▷ **Nous avons $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x\in E}} f_n(x) = l_n$**

Pour ce $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que si $|x - a| < \eta$, alors $|f_n(x) - l_n| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{3}$

▷ **La suite $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} l_n = l$**

Pour $\varepsilon > 0$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \geqslant N_1$ alors $|l_n - l| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{3}$

▷ pour $n \sup(N, N_1)$, nous avons $|f_n(x) - l_n| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{3}$ et $|l_n - l| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{3}$

Ainsi, pour $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que si $|x - a| < \eta$, alors $|f(x) - l| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{3} + \dfrac{\varepsilon}{3} + \dfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$

Nous avons donc $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x\in E}} f(x) = l$

Remarque 51 :

C'est un exemple de permutation des limites *(sujet très délicat !!)*. En effet, nous avons :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{\substack{x\to a\\x\in E}} f_n(x)\right) = \lim_{\substack{x\to a\\x\in E}}\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right)$$

3.8.7 Corollaire

Soit $E \subset \mathbb{R}$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur E telles que :

▷ **Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur E**

▷ **La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction f définie sur E**

Alors, pour tout suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E tels que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$, nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x_n) = f(x)$

Démonstration

Soit $\varepsilon > 0$; il faut donc évaluer la différence $|f_n(x_n) - f(x)|$

Pour commencer, nous avons :

$$\begin{aligned}|f_n(x_n) - f(x)| = & \ |(f_n(x_n) - f(x_n)) + (f_n(x_n) - f(x))| \\ \leqslant & \ |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f_n(x_n) - f(x)|\end{aligned}$$

▷ **$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f**

Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N$ alors, pour tout $x \in E$, nous avons $|f(x) - f_n(x)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$.

▷ **Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue**

De la convergence uniforme des $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f, nous déduisons que f est continue.

Pour ce $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que si $|x_n - x| < \eta$, alors $|f(x_n) - f(x)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$

▷ **La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est telle que** $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$
Pour $\varepsilon > 0$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \geqslant N_1$ alors $|x_n - x| \leqslant \eta$

▷ pour $n \sup (N, N_1)$, nous avons $|x_n - x| \leqslant \eta$ et $|f(x) - f_n(x)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$

Ainsi, pour $\varepsilon > 0$, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$,$N_0 = \sup(N, N_1)$, tel que si $n \geqslant N_0$, alors $|f_n(x_n) - f(x)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$
Nous avons donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x_n) = f(x)$

Exemple 34 :

Reprenons l'exemple où $E = [0;1]$, et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} g_n : [0;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & g_n(x) = \dfrac{nx}{1+nx} \end{array}\right.$$

Pour tout $x \in [0;1]$, $x \neq 0$, nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{nx}{1+nx} = 1$.
La limite simple de la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la fonction g telle que $g(0) = 0$ et si $x \neq 0$, $g(x) = 1$

1. g n'est pas continue sur $E = [0;1]$, la convergence de la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut être uniforme
2. D'autre part, si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite d'éléments de $[0;1]$ telle que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = \dfrac{1}{n}$, nous avons $g_n(x_n) = \dfrac{1}{2}$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n(x_n) = \dfrac{1}{2}$, soit, bien différente de $g(0) = 0$. La convergence ne peut donc pas être uniforme.

Remarque 52 :

Il y a des fonctions continues qui peuvent être limite uniforme de suites de fonctions non continues. C'est ce que nous allons voir dans la proposition qui suit.

3.8.8 Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé borné $[a;b]$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$
Alors, il existe une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, en escalier sur $[a;b]$, qui converge uniformément vers f

Démonstration

⋆ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, nous considérons la subdivision de $[a;b]$:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b \text{ où, pour } k = 0, \ldots, n-1 \text{ nous avons } x_k = a + \frac{k(b-a)}{n}$$

C'est donc une subdivision à pas constant, puisque $x_{k+1} - x_k = \dfrac{b-a}{n}$

⋆ A partir de cette subdivision, nous construisons la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions en escalier sur $[a;b]$ par :

$$\left\{\begin{array}{l} f_n(x) = f(x_k) \text{ si } x \in [x_k; x_{k+1}[\text{ pour } k = 0, \ldots, n-1 \\ f_n(b) = f(b) \end{array}\right.$$

⋆ **Nous disons que cette suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, en escalier sur $[a;b]$ converge uniformément vers f**
Soit $\varepsilon > 0$

▷ f étant continue sur l'intervalle $[a;b]$ y est uniformément continue *(Théorème de Heine 3.6.9)*
Il existe donc $\eta > 0$ tel que, pour tout $x \in [a;b]$ et tout $y \in [a;b]$, si $|x - y| < \eta$, alors $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$

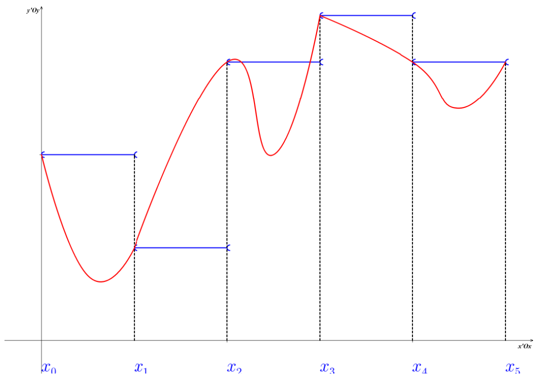

FIGURE 3.30 – Le graphe de la fonction f et le graphe de la fonction en escalier pour un n particulier

- ▷ Il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que si $n \geqslant N$, alors $0 < \dfrac{b-a}{n} < \eta$
  Soit donc $n \geqslant N$ et $x \in [a;b]$
  Il existe $k \in \mathbb{N}$ et $0 \leqslant k \leqslant n-1$ tel que $x \in [x_k; x_{k+1}[$; alors $|x - x_k| < \dfrac{b-a}{n}$ et donc $|f(x) - f(x_k)| < \varepsilon$
  Or, $f_n(x) = f(x_k)$
- ▷ Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, si $n \geqslant N$, pour tout $x \in [a;b]$, nous avons $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$

La suite de fonctions en escaliers sur $[a;b]$ $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc uniformément vers f

Remarque 53 :

1. Le théorème 3.8.8 vaut aussi pour des fonctions continues par morceaux.
2. Le théorème ci-après est souvent donné en exercice ; il a cependant une grande importance théorique, c'est pourquoi je le présente ici. Sa démonstration se rapproche de 3.8.8

3.8.9 Le théorème de Dini

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur $[a;b]$.
On suppose que :

- ▷ **La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, c'est à dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$:**

$$f_n \leqslant f_{n+1} \iff (\forall x \in [a;b])\,(f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x))$$

- ▷ **La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction f, laquelle est continue sur $[a;b]$**

Alors, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f

Démonstration

Remarque
Avant de commencer, et d'après les résultats sur les suites numériques, il faut voir que, pour tout $x \in [a;b]$, nous avons $f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$, et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = g(x)$, nous avons, pour tout $x \in [a;b]$, $f_n(x) \leqslant g(x)$.
Mieux, nous avons $g(x) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$

Soit $\varepsilon > 0$

1. f est continue sur l'intervalle $[a;b]$; donc, d'après le théorème de Heine, elle y est uniformément continue. Il existe donc $\eta_\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $x \in [a;b]$ et tout $y \in [a;b]$, nous ayons $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$

2. Soit $S = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ une subdivision de l'intervalle $[a; b]$ telle que :
$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b \text{ et } x_k = a + \frac{k(b-a)}{n} \text{ avec } k = 0, \cdots, n$$
Nous choisissons $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N_1$, alors $\dfrac{(b-a)}{n} < \eta_\varepsilon$
3. La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers f. Alors, il existe un entier $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que, si $n \geqslant N_2$, pour tout $k = 0, \cdots, n$, on ait $|f_n(x_k) - f(x_k)| < \varepsilon$
4. Soit $n \geqslant \sup\{N_1; N_2\}$ et soit $x \in [a; b]$
   - Il existe $k \in \{0, \cdots, n\}$ tel que $x \in [x_k; x_{k+1}]$, et alors $|x - x_k| \leqslant \dfrac{(b-a)}{n} < \eta_\varepsilon$ et donc $|f(x) - f(x_k)| < \varepsilon$
   - Donc, dès que $n \geqslant \sup\{N_1; N_2\}$, pour tout $x \in [a; b]$, nous avons :
$$\begin{aligned}
|f(x) - f_n(x)| &\leqslant |f(x) - f(x_k)| + |f(x_k) - f_n(x_k)| + |f_n(x_k) - f_n(x)| \text{ (inégalité triangulaire)} \\
&\leqslant \varepsilon + \varepsilon + (f_n(x) - f_n(x_k)) \text{ Continuité uniforme, convergence simple et croissance de } f_n \\
&\leqslant 2\varepsilon + (f_n(x_{k+1}) - f_n(x_k)) \text{ car } f \text{ est croissante et } x \leqslant x_{k+1} \\
&\leqslant 2\varepsilon + (f_n(x_{k+1}) - f(x_{k+1}) + f(x_{k+1}) - f(x_k) + f(x_k) - f_n(x_k)) \\
&\leqslant 2\varepsilon + |f_n(x_{k+1}) - f(x_{k+1})| + |f(x_{k+1}) - f(x_k)| + |f(x_k) - f_n(x_k)| \text{ Inégalité triangulaire} \\
&\leqslant 5\varepsilon \text{ par convergence simple et continuité uniforme}
\end{aligned}$$

   On vient donc de montrer que la convergence de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est uniforme vers f

3.8.10 Exercices

Exercice 75 :

Etudier la convergence simple et la convergence uniforme des suites de fonctions définies sur l'intervalle fermé borné $[0; 1]$ par :

1. $f_n(x) = \dfrac{x}{1 + nx}$
2. $g_n(x) = \dfrac{1}{1 + nx}$

Exercice 76 :

Etudier la convergence simple et la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ de la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{x^{2n}}{1 + x^{2n}}$

Exercice 77 :

On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $f_n(x) = x^n$ pour $x \in [0; 1]$.
1. Démontrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout intervalle $[0; h]$ avec $0 < h < 1$
2. Qu'en est-il de la convergence uniforme sur $[0; 1]$?

Exercice 78 :

Etudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie pour tout $x \in [0; 1]$ par $f_n(x) = x^n(1 - x)$

Exercice 79 :

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définires sur l'intervalle fermé borné $[0; 1]$ par :
$$\begin{cases} f_n(x) = & n^2 x(1 - nx) \text{ si } 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{n} \\ f_n(x) = & 0 \text{ si } \dfrac{1}{n} \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$
Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction f. La convergence est-elle uniforme ?

Exercice 80 :

Etudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\begin{cases} f_n(x) = & \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^n \text{ si } 0 \leqslant x \leqslant n \\ f_n(x) = & 0 \text{ si } x > n \end{cases}$$

Exercice 81 :

1. Soient $E \subset \mathbb{R}$, $F \subset \mathbb{R}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur E et à valeurs dans F qui converge uniformément vers une fonction f. Soit $g : F \longrightarrow \mathbb{K}$ une application uniformément continue. Démontrer que la suite de fonctions $(g \circ f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $g \circ f$
2. Soit $E \subset \mathbb{R}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions défnies sur E et à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui converge uniformément vers une fonction f. Démontrez que la suite de fonctions $\left(\dfrac{f_n}{1+f_n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction $\dfrac{f}{1+f^2}$

Exercice 82 :

Soient $E \subset \mathbb{R}$
On considère $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur E et à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui converge uniformément vers une fonction f,bornée et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une autre suite de fonctions définies sur E et à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui converge uniformément vers une fonction g, bornée elle aussi.
Démontrer que la suite de fonctions $(g_n \times f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $g \times f$