3.9 Quelques exercices corrigés

3.9.1 Fonction numérique d'une variable réelle

Exercice 1 :

Donner les domaines de définition des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \sqrt{\sin 2x}$
Pas exactement difficile ; nous devons toujours avoir $\sin 2x \geqslant 0$, c'est à dire $2k\pi \leqslant 2x \leqslant (2k+1)\pi$, c'est à dire $k\pi \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} + k\pi$. Donc, le domaine D est donné par :

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[k\pi\,;\,\frac{\pi}{2}+k\pi\right]$$

2. $g(x) = \ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right)$
Ici, il faut avoir $\frac{2+x}{2-x} > 0$, c'est à dire $-2 < x < +2$, et donc le domaine de définition est donc : $]-2\,;\,+2[$

Exercice 2 :

Construire les graphes des fonctions suivantes :

1. $f(x) = |x-3| + |x+1|$
C'est assez simple ; il suffit d'exprimer différemment les valeurs absolue sen fonction des valeurs de x. Ecrivons ceci dans un tableau :

x		-1		3	
$\lvert x-3\rvert$	$3-x$	4	$3-x$	0	$x-3$
$\lvert x+1\rvert$	$-1-x$	0	$x+1$	4	$x+1$
$f(x)$	$-2x+2$	4	4	4	$2x-2$

D'où le graphe. f est une **fonction affine par morceaux**

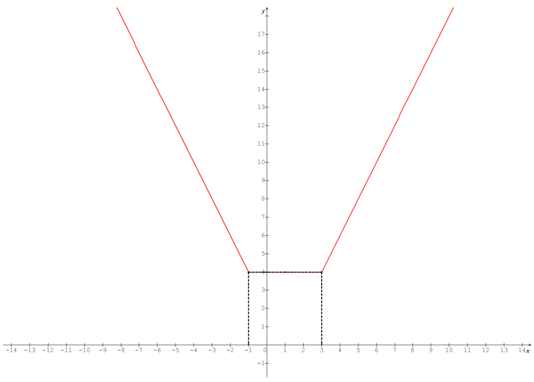

FIGURE 3.31 – Le graphe de $f(x) = |x-3| + |x+1|$

2. $g(x) = \sqrt{x-[x]}$
Pour $x \in \mathbb{R}$, on appelle $n = [x]$; ainsi, sur l'intervalle $[n\,;\,n+1[$ avec $n \in \mathbb{N}$, nous avons $g(x) = \sqrt{x-n}$, d'où nous obtenons le graphe 3.32

3. $h(x) = [x] + \sqrt{x-[x]}$
Comme tout à l'heure nous étudions h sur $[n\,;\,n+1[$ avec $n \in \mathbb{N}$; alors, clairement, sur cet intervalle, $h(x) = n + \sqrt{x-n}$, d'où le graphe 3.33

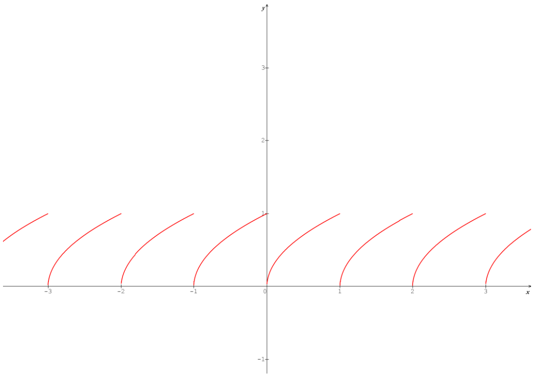

FIGURE 3.32 – Le graphe de $g(x) = \sqrt{x - [x]}$

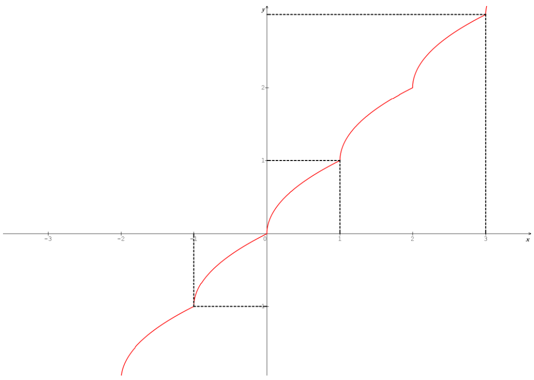

FIGURE 3.33 – Le graphe de $h(x) = [x] + \sqrt{x - [x]}$

Exercice 3 :

Démontrez que la fonction définie sur $]0;+1]$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ n'est pas bornée sur $]0;+1]$

Cet exercice ne pose aucune difficulté : il suffit d'utiliser la définition de fonction non majorée.
Soit donc $A > 0$; alors, dès que $0 < x < \dfrac{1}{A}$, nous avons $\dfrac{1}{x} > A$.
Ainsi, $f(x)$ n'est pas bornée sur $]0;+1]$

Exercice 4 :

1. *Soit f une fonction définie sur un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ bornée sur E. Montrer que $\inf\limits_{x\in E} f(x) = -\sup\limits_{x\in E}(-f(x))$*

   On appelle $m = \inf\limits_{x\in E} f(x)$

   D'après l'énoncé, pour tout $x \in E$, nous avons $m \leqslant f(x)$, et donc, pour tout $x \in E$,$-f(x) \leqslant -m$. Ainsi, $-m = \sup\limits_{x\in E}(-f(x))$.

   Nous avons donc bien $\inf\limits_{x\in E} f(x) = -\sup\limits_{x\in E}(-f(x))$

2. *Soient f et g deux fonctions définies sur un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ bornées sur E telle que pour tout $x \in E$, $f(x) \leqslant g(x)$. Montrer que : $\sup\limits_{x\in E} f(x) \leqslant \sup\limits_{x\in E} g(x)$ et $\inf\limits_{x\in E} f(x) \leqslant \inf\limits_{x\in E} g(x)$*

   C'est assez simple : pour tout $x \in E$, nous avons $f(x) \leqslant g(x) \leqslant \sup\limits_{x\in E}(g(x))$; et, en particulier, nous avons $\sup\limits_{x\in E}(f(x)) \leqslant \sup\limits_{x\in E}(g(x))$

   La démonstration est la même pour prouver que $\inf\limits_{x\in E} f(x) \leqslant \inf\limits_{x\in E} g(x)$

3. *Soit f une fonction définie sur un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ bornée sur E et soit $A \subset E$. Montrer que : $\sup\limits_{x \in A} f(x) \leqslant \sup\limits_{x \in E} f(x)$ et $\inf\limits_{x \in A} f(x) \geqslant \inf\limits_{x \in E} f(x)$*

   C'est assez simple : comme $A \subset E$, si $x \in A$, alors $x \in E$, et donc, pour tout $x \in A$, $f(x) \leqslant \sup\limits_{x \in E} f(x)$, et, en particulier, $\sup\limits_{x \in A} f(x) \leqslant \sup\limits_{x \in E} f(x)$.
   La justification est semblable pour l'inf

4. *Soient f et g deux fonctions définies sur un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ bornées sur E . Montrer que : $\sup\limits_{x \in E} (f(x) + g(x)) \leqslant \sup\limits_{x \in E} f(x) + \sup\limits_{x \in E} g(x)$ et $\sup\limits_{x \in E} f(x) + \inf\limits_{x \in E} g(x) \leqslant \sup\limits_{x \in E} (f(x) + g(x))$*

   ▷ Pour tout $x \in E$, nous avons :
   $$f(x) + g(x) \leqslant f(x) + \sup_{x \in E} g(x) \leqslant \sup_{x \in E} f(x) + \sup_{x \in E} g(x)$$
   Nous en concluons que $\sup\limits_{x \in E} (f(x) + g(x)) \leqslant \sup\limits_{x \in E} f(x) + \sup\limits_{x \in E} g(x)$

   ▷ Pour tout $x \in E$, nous avons : $\inf\limits_{x \in E} g(x) \leqslant g(x)$, et donc, pour tout $x \in E$,
   $$f(x) + \inf_{x \in E} g(x) \leqslant f(x) + g(x) \leqslant \sup_{x \in E} (f(x) + g(x))$$
   En particulier $\sup\limits_{x \in E} f(x) + \inf\limits_{x \in E} g(x) \leqslant \sup\limits_{x \in E} (f(x) + g(x))$

   De cette question, nous pouvons déduire que, pour tout $x \in E$:
   $$\sup_{x \in E} f(x) + \inf_{x \in E} g(x) \leqslant \sup_{x \in E} (f(x) + g(x)) \leqslant \sup_{x \in E} f(x) + \sup_{x \in E} g(x)$$

5. *Soit f et g deux fonctions définies sur un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ bornées sur E telle que pour tout $x \in E$, $f(x) \geqslant 0$ et $g(x) \geqslant 0$. Montrer que : $\sup\limits_{x \in E} (f(x) g(x)) \leqslant \sup\limits_{x \in E} f(x) \sup\limits_{x \in E} g(x)$ et $\sup\limits_{x \in E} f(x) \inf\limits_{x \in E} g(x) \leqslant \sup\limits_{x \in E} (f(x) g(x))$*

   ▷ Pour tout $x \in E$, nous avons $g(x) \leqslant \sup\limits_{x \in E} g(x)$ et $f(x) \leqslant \sup\limits_{x \in E} f(x)$.
   Par compatibilité de la relation d'ordre avec la multiplication par un nombre positif, nous avons : $f(x) g(x) \leqslant \sup\limits_{x \in E} f(x) \sup\limits_{x \in E} g(x)$, et, en particulier $\sup\limits_{x \in E} (f(x) g(x)) \leqslant \sup\limits_{x \in E} f(x) \sup\limits_{x \in E} g(x)$

   ▷ Démontrer que $\sup\limits_{x \in E} f(x) \inf\limits_{x \in E} g(x) \leqslant \sup\limits_{x \in E} (f(x) g(x))$ est semblable aux points précédents et ne pose pas de difficultés.

6. *Soit f une fonction définie sur un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ bornée sur E telle que pour tout $x \in E$, $f(x) > 0$. Montrer que : $\sup\limits_{x \in E} \left(\dfrac{1}{f(x)} \right) = \dfrac{1}{\inf\limits_{x \in E} f(x)}$*

   Dans cette question, il faut utiliser le fait que f est strictement positive, et que si $0 < x \leqslant y$, alors $0 < \dfrac{1}{y} \leqslant \dfrac{1}{x}$

Exercice 6 :

Montrer que l'ensemble des 6 fonctions :

1. $f_1(x) = x$
2. $f_2(x) = \dfrac{1}{x}$
3. $f_3(x) = 1 - x$
4. $f_4(x) = \dfrac{1}{1 - x}$
5. $f_5(x) = \dfrac{x - 1}{x}$
6. $f_6(x) = \dfrac{x}{x - 1}$

Est un groupe pour la loi de composition des applications. Etablir la table du groupe
Existe-t-il des sous groupes ?

Nous allons tout de suite construire la table de composition ; on peut remarque que f_1 est l'application identique $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ qui est l'élément neutre pour la composition des applications.

$\circ$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_2	f_2	f_1	f_4	f_3	f_6	f_5
f_3	f_3	f_5	f_1	f_2	f_6	f_4
f_4	f_4	f_6	f_2	f_5	f_1	f_3
f_5	f_5	f_3	f_6	f_1	f_4	f_2
f_6	f_6	f_4	f_5	f_6	f_2	f_1

On trouve comme sous-groupes :
- ▷ Le sous groupe trivial d'ordre 1 : $H_1 = \{f_1\}$
- ▷ Des sous-groupes d'ordre 2 :
  - $H_2^1 = \{f_1, f_2\}$
  - $H_2^2 = \{f_1, f_3\}$
  - $H_2^3 = \{f_1, f_6\}$
- ▷ Un sous-groupe d'ordre 3 $H_3 = \{f_1, f_4, f_5\}$

Autre remarque, le groupe n'est pas commutatif puisque $f_2 \circ f_6 = f_5$ et $f_6 \circ f_2 = f_4$; donc, $f_2 \circ f_6 \neq f_6 \circ f_2$

Exercice 7 :

1. *Pour tout $x \neq \frac{1}{2}$ on définit $g(x) = \frac{x-1}{2x-1}$. Démontrer que $g \circ g(x) = x$*

   C'est un calcul très simple :
   $$g \circ g(x) = \frac{g(x)-1}{2g(x)-1} = \frac{\frac{x-1}{2x-1}-1}{2\frac{x-1}{2x-1}-1} = \frac{x-1-2x+1}{2x-2-2x+1} = \frac{-x}{-1} = x$$

2. *Démontrer qu'il n'existe aucune application $f : \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :*
   $$\left(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}\right) \left(f(x) \times f \circ g(x) = x^2 + x + 1\right)$$

   Nous avons aussi $f(g(x)) \times f \circ g^2(x) = g(x)^2 + g(x) + 1 \Longleftrightarrow f(x) \times f \circ g(x) = g(x)^2 + g(x) + 1$, ce qui nous autorise à écrire :
   $$g(x)^2 + g(x) + 1 = x^2 + x + 1 \Longleftrightarrow \left(\frac{x-1}{2x-1}\right)^2 + \frac{x-1}{2x-1} + 1 = x^2 + x + 1$$
   On voit de suite que la dernière égalité est impossible.
   En effet, pour $x = 0$, $\left(\frac{x-1}{2x-1}\right)^2 + \frac{x-1}{2x-1} + 1 = 3$, alors que, pour $x = 0$, $x^2 + x + 1 = 1$
   Il n'existe donc pas de fonction f telle que $f(x) \times f \circ g(x) = x^2 + x + 1$

Exercice 8 :

1. *On définit $\varphi : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ par , pour $x \neq -1$, $\varphi(x) = \frac{-1}{x+1}$. Nous appelons $\varphi^2 = \varphi \circ \varphi$ et $\varphi^3 = \varphi^2 \circ \varphi = \varphi \circ \varphi^2 = \varphi \circ \varphi \circ \varphi$.*
   Démontrer que, pour tout $x \neq -1$, $\varphi^3(x) = x$

   C'est facile parce que uniquement calculatoire
2. *Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que*
   $$(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}) (f(x) + f \circ \varphi(x) = 3x + 2)$$

   La méthode sera la même que celle utilisée dans l'exercice précédent.

- ▷ On part de l'équation de base : $f(x) + f \circ \varphi(x) = 3x + 2$, et donc $f(x) = 3x + 2 - f \circ \varphi(x)$
- ▷ Ensuite, en remplaçant x par $\varphi(x)$, nous avons : $f(\varphi(x)) + f \circ \varphi^2(x) = 3\varphi(x) + 2$, et donc $f(\varphi(x)) = 3\varphi(x) + 2 - f \circ \varphi^2(x)$, et donc

$$f(x) = 3x + 2 - 3\varphi(x) - 2 + f \circ \varphi^2(x) \Longleftrightarrow f(x) = 3x - 3\varphi(x) + f \circ \varphi^2(x)$$

- ▷ Et, pour terminer, en remplaçant x par $\varphi^2(x)$, nous avons : $f\left(\varphi^2(x)\right) + f(x) = 3\varphi^2(x) + 2$, d'où $f\left(\varphi^2(x)\right) = 3\varphi^2(x) + 2 - f(x)$ et donc :

$$f(x) = 3x - 3\varphi(x) + 3\varphi^2(x) + 2 - f(x) \Longleftrightarrow f(x) = 1 + \frac{3}{2}\left(x - \varphi(x) + \varphi^2(x)\right)$$

D'où nous trouvons $f(x) = 1 + \dfrac{3}{2}\left(x + \dfrac{1}{x+1} - 1 - \dfrac{1}{x}\right) = 1 + \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{x^3 - x - 1}{x(x+1)}\right)$

Exercice 14 :

Soient f et g deux fonctions numériques d'une variable réelle définies sur $[0\,;+1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$
Démontrez la proposition suivante : $(\exists (x,y) \in [0\,;+1] \times [0\,;+1])\left(|xy - f(x) - g(y)| \geqslant \dfrac{1}{4}\right)$

Voilà une question qui m'a semblé difficile.
Supposons le contraire, c'est à dire que pour tout $x \in [0\,;+1]$ et tout $y \in [0\,;+1]$, nous ayions $|xy - f(x) - g(y)| < \dfrac{1}{4}$
Alors :

- ▷ Pour $x = 0$ et $y = 0$, nous avons : $|f(0) + g(0)| < \dfrac{1}{4}$
- ▷ Pour $x = 0$ et $y = 1$, nous avons : $|f(0) + g(1)| < \dfrac{1}{4}$
- ▷ Pour $x = 1$ et $y = 0$, nous avons : $|f(1) + g(0)| < \dfrac{1}{4}$
- ▷ Pour $x = 1$ et $y = 1$, nous avons : $|1 - (f(1) + g(1))| < \dfrac{1}{4}$

Nous utilisons l'inégalité triangulaire $||a| - |b|| \leqslant |a - b|$
D'après cette inégalité, nous avons donc :$|1 - (f(1) + g(1))| \geqslant |1 - |f(1) + g(1)||$ Or :

$$\begin{aligned} f(1) + g(1) &= f(1) + f(0) - f(0) + g(0) - g(0) + g(1) \\ &= (f(1) + g(0)) + (f(0) + g(1)) - (f(0) + g(0)) \end{aligned}$$

Et donc, $|f(1) + g(1)| \leqslant |f(1) + g(0)| + |f(0) + g(1)| + |f(0) + g(0)| < \dfrac{3}{4}$, d'où, $-|f(1) + g(1)| > \dfrac{-3}{4}$, et donc $|1 - |f(1) + g(1)|| > 1 - \dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{4}$
Il y a donc une contradiction avec le fait que $|1 - (f(1) + g(1))| < \dfrac{1}{4}$.
Donc, $(\exists (x,y) \in [0\,;+1] \times [0\,;+1])\left(|xy - f(x) - g(y)| \geqslant \dfrac{1}{4}\right)$

Exercice 15 :

Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les équations suivantes :

1. $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(|f(x) - f(y)| = |x - y|)$

   Pour $y = 0$, nous avons $|f(x) - f(0)| = |x|$.
   Posons $g(x) = f(x) - f(0)$, alors, nous avons : $|g(x)| = |x|$, d'où nous déduisons que $g(x) = x$ ou $g(x) = -x$, de telle sorte que $f(x) = x + f(0)$ ou $f(x) = -x + f(0)$
   En conclusion, il existe 2 familles de solutions à l'équation :
   - ▷ $S_1 = \{f_\alpha$ telle que $f_\alpha(x) = x + \alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}\}$
   - ▷ $S_1 = \{f_\alpha$ telle que $f_\alpha(x) = -x + \alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}\}$

2. $(\forall x \in \mathbb{R})\,(\forall y \in \mathbb{R})\,(|f(x) + f(y)| = |x + y|)$

   En faisant $x = 0$ et $y = 0$, nous obtenons $|2f(0)| = 0$ et donc $f(0) = 0$.
   De là, nous obtenons : $|f(x) + f(0)| = |x + 0| \Longleftrightarrow |f(x)| = |x|$, et donc, l'équation admet deux solutions $f_1(x) = x$ et $f_2(x) = -x$

3. $(\forall x \in \mathbb{R})\,(\forall y \in \mathbb{R})\,(f(x)\,f(y) - f(xy) = x + y)$

   Tout d'abord, en faisant $x = y = 0$, nous obtenons $f(0)^2 - f(0) = 0$, d'où nous tirons $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$
   D'autre part, nous pouvons dire, au vu de l'équation, que f est un polynôme de degré 1. Donc, $f(x) = ax$ ou $f(x) = ax + 1$.
   - ▷ Si $f(x) = ax$, alors :
   $$f(x)\,f(y) - f(xy) = x + y \Longleftrightarrow a^2xy - axy = x + y$$
     Equation qui est impossible
   - ▷ Si $f(x) = ax + 1$, alors :
   $$f(x)\,f(y) - f(xy) = x + y \Longleftrightarrow (ax + 1)(ay + 1) - (axy + 1) = x + y \Longleftrightarrow \left(a^2 - a\right)xy + a(x + y) = x + y$$
     Cette dernière égalité nous tirons $a^2 - a = 0$ et $a = 1$
     Donc, nous avons $f(x) = x + 1$

   La seule solution à l'équation $f(x)\,f(y) - f(xy) = x + y$ est la fonction $f(x) = x + 1$

4. $(\forall x \in \mathbb{R})\,(\forall y \in \mathbb{R})\,(f(x + y) - f(x - y) = 4xy)$

   En faisant $x = 0$, nous obtenons $f(y) - f(-y) = 0$, ce qui montre que f est paire. D'autre part, le terme rectangle en xy, laisse suggérer que f est un polynôme du second degré. Posons donc $f(x) = ax^2 + c$ (nous avons $b = 0$ du fait de la parité). Alors :
   $$f(x + y) - f(x - y) = 4xy \Longleftrightarrow 4axy = 4xy \Longleftrightarrow a = 1$$
   Une famille de solutions est donc donnée par la famille de solutions $f(x) = x^2 + c$ où $c \in \mathbb{R}$.
   Réciproquement, soit f une solution quelconque et $g(x) = f(x) - x^2$. Nous allons montrer que g est une fonction constante.
   $$g(x + y) - g(x - y) = f(x + y) - f(x - y) - (x + y)^2 + (x - y)^2 = 4xy - 4xy = 0$$
   Ce qui sous-entend que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}$, $g(x + y) = g(x - y)$, c'est à dire que g est une fonction constante, c'est à dire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = c$, et donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + c$, avec $c \in \mathbb{R}$

Exercice 16 :

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour tout $\lambda \in [0\,;\,+1]$ et tout $x \in I$ et tout $y \in I$,
$$f(\lambda x + (1 - \lambda)\,y) = \lambda f(x) + (1 - \lambda)\,f(y)$$
Démontrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $x \in I$, $f(x) = \alpha x + \beta$

Soient $x \in I$ et $y \in I$; alors, pour tout $t \in [x\,;\,y]$, il existe $\lambda \in [0\,;\,1]$ tel que $t = \lambda x + (1 - \lambda)\,y$, et alors $f(t) = \lambda f(x) + (1 - \lambda)\,f(y)$.
De $t = \lambda x + (1 - \lambda)\,y$, on tire $\lambda = \dfrac{y - t}{y - x}$, et donc :
$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{y - t}{y - x} f(x) + \left(1 - \frac{y - t}{y - x}\right) f(y) \\ &= \frac{t\,(f(y) - f(x))}{y - x} + \frac{yf(x) - xf(y)}{y - x} \end{aligned}$$
Soit $x \in I$; alors, il existe $x_1 \in I$, $x_2 \in I$, $x_3 \in I$, $x_4 \in I$, avec $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$, tels que $x_1 < x_2 < x << x_3 < x_4$, c'est à dire que $x \in [x_1\,;\,x_4]$ et $x \in [x_2\,;\,x_3]$ et donc :
$$f(x) = ax + b \qquad \text{et } f(x) = cx + d$$
avec a et b dépendanants de x_1 et x_4 et c et d dépendants de x_2 et x_3
Donc, $a = c$ et $b = d$ et donc $f(x) = ax + b$

Exercice 18 :

Soit x_0 un nombre réel et $\alpha > 0$, un nombre réel strictement positif. On considère une fonction f, définie sur l'intervalle ouvert $]x_0 - \alpha\,;\, x_0 + \alpha[$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$.
Démontrer que si $f(x_0 + h)$ admet une limite finie lorsque h tend vers 0, alors $\lim\limits_{h \to 0} [f(x_0 + h) - f(x_0 - h)] = 0$. La réciproque est-elle vraie ?

1. **On suppose que $\lim\limits_{h \to 0} f(x_0 + h) = l$ où l est finie**

   (a) <u>Première méthode</u>
   Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\lim\limits_{h \to 0} f(x_0 + h) = l$, il existe $\eta > 0$ tel que si $0 < |h| < \eta$ alors $|f(x_0 + h) - l| < \dfrac{\varepsilon}{2}$
   De la même manière, si $0 < |h| < \eta$ alors $|f(x_0 - h) - l| < \dfrac{\varepsilon}{2}$
   Or $f(x_0 + h) - f(x_0 - h) = (f(x_0 + h) - l) + (l - f(x_0 - h))$ et donc :

   $$|f(x_0 + h) - f(x_0 - h)| \leqslant |f(x_0 + h) - l| + |l - f(x_0 - h)|$$

   Ainsi, si $0 < |h| < \eta$ alors :

   $$|f(x_0 + h) - f(x_0 - h)| \leqslant |f(x_0 + h) - l| + |l - f(x_0 - h)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

   Ce qui montre que $\lim\limits_{h \to 0} [f(x_0 + h) - f(x_0 - h)] = 0$

   (b) <u>Seconde méthode</u>
   Nous avons : $\lim\limits_{h \to 0} f(x_0 + h) = \lim\limits_{h \to 0} f(x_0 - h) = l$ et donc :

   $$\lim_{h \to 0} [f(x_0 + h) - f(x_0 - h)] = \lim_{h \to 0} f(x_0 + h) - \lim_{h \to 0} f(x_0 - h) = l - l = 0$$

2. **La réciproque est fausse**
   Soit $f :]-1\,;\,+1[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

   $$\left\{ \begin{array}{rcl} f :]-1\,;\,+1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ si } x = 0 \\ \dfrac{1}{x^2} \text{ sinon} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

   Nous avons $f(0 + h) - f(0 - h) = \dfrac{1}{h^2} - \dfrac{1}{(-h)^2} = 0$, alors que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$

Exercice 19 :

1. *Etudiez* $\lim\limits_{x \to 1} \sin\left(\dfrac{\pi(x^2 - x)}{x^2 - 1}\right)$

   ▷ Dans un premier temps, nous avons, pour $x \neq \pm 1$

   $$\frac{\pi(x^2 - x)}{x^2 - 1} = \frac{\pi x(x^2 - 1)}{x^2 - 1} = \pi x$$

   ▷ De telle sorte que, pour $x \neq \pm 1$, nous ayons $\sin\left(\dfrac{\pi(x^2 - x)}{x^2 - 1}\right) = \sin \pi x$

   ▷ D'où $\lim\limits_{x \to 1} \sin\left(\dfrac{\pi(x^2 - x)}{x^2 - 1}\right) = \lim\limits_{x \to +1} \sin \pi x = 0$

2. (a) *Etude de* $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} \sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^2-4x+3}}$

   Tout d'abord, il faut remarquer que $\dfrac{x^2-1}{x^2-4x+3} = \dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-3)} = \dfrac{x+1}{x-3}$ pour $x \neq +1$

   Etudions maintenant le signe de $\dfrac{x+1}{x-3}$:

   ▷ Si $x \in [-1\,;+3[$, alors $\dfrac{x+1}{x-3} \leqslant 0$

   ▷ Et si $x \notin [-1\,;+3[$, alors $\dfrac{x+1}{x-3} > 0$

   De telle sorte qu'il est licite de calculer la limite de l'expression à gauche de -1. Et nous avons : $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} \sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^2-4x+3}} = 0$

   (b) *Etudier* $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} \sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^2-4x+3}}$

   Par contre, cette limite qui se situe à droite de -1 ne peut être calculée, puisque l'expression qui est sous la racine est négative si $x > -1$

3. *Donner* $\lim\limits_{x\to0} \sin\left(\sqrt{\dfrac{\frac{1}{x^2}+1}{\frac{1}{x^4}+1}}\right)$

   Dans notre cas, il n'y a aucune difficulté ; il faut, pour commencer, simplifier $\dfrac{\frac{1}{x^2}+1}{\frac{1}{x^4}+1}$, et nous avons :

$$\frac{\frac{1}{x^2}+1}{\frac{1}{x^4}+1} = \frac{x^2\left(1+x^2\right)}{1+x^4}$$

   Expression toujours positive et qui a le bonheur de tendre vers 0 lorsque x tend vers 0. Donc, $\lim\limits_{x\to0} \sin\left(\sqrt{\dfrac{\frac{1}{x^2}+1}{\frac{1}{x^4}+1}}\right) = 0$

Exercice 20 :

Pour $x \in \mathbb{K}$ *et* $n \in \mathbb{N}$ *fixés, donner* $\lim\limits_{h\to0} \dfrac{(x+h)^n - x^n}{h}$

C'est une question classique, mais néanmoins importante que nous retrouverons dans la dérivation. Nous allons la résoiudre à petits pas

▷ Tout d'abord, $(x+h)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k x^{n-k} h^k = x^n + \sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{C}_n^k x^{n-k} h^k$

▷ Donc, $(x+h)^n - x^n = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{C}_n^k x^{n-k} h^k = \mathrm{C}_n^1 x^{n-1} h + \sum\limits_{k=2}^{n} \mathrm{C}_n^k x^{n-k} h^k = nx^{n-1}h + h\sum\limits_{k=2}^{n} \mathrm{C}_n^k x^{n-k} h^{k-1}$

  En appelant $\varepsilon(h) = \sum\limits_{k=2}^{n} \mathrm{C}_n^k x^{n-k} h^{k-1}$, nous avons $\lim\limits_{h\to0} \varepsilon(h) = 0$ et $(x+h)^n - x^n = nx^{n-1}h + h\varepsilon(h)$

▷ De telle sorte que $\dfrac{(x+h)^n - x^n}{h} = \dfrac{nx^{n-1}h + h\varepsilon(h)}{h} = nx^{n-1} + \varepsilon(h)$

Et donc, $\lim\limits_{h\to0} \dfrac{(x+h)^n - x^n}{h} = nx^{n-1}$

Exercice 21 :

Donner $\lim\limits_{x\to0} \sqrt{\dfrac{1}{x^3} + \dfrac{1}{x} + 1} - \sqrt{\dfrac{1}{x^3} + \dfrac{1}{x} - 1}$

Un changement de variables apparaît ici évident ; le changement $X = \frac{1}{x}$, de telle sorte que lorsque x tend vers 0, X tend vers ∞. Nous sommes donc obligés de regarder 2 situations : la première, lorsque x tend vers 0 par valeurs positives, et la seconde lorsque x tend vers 0 par valeurs négatives.

1. Supposons $x > 0$. Nous faisons donc le changement de variables $X = \frac{1}{x}$ et nous avons :

$$\sqrt{\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x}+1}-\sqrt{\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x}-1}=\sqrt{X^3+X+1}-\sqrt{X^3+X-1}$$

et nous allons étudier

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\sqrt{\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x}+1}-\sqrt{\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x}-1}=\lim_{X\to+\infty}\sqrt{X^3+X+1}-\sqrt{X^3+X-1}$$

Or, en utilisant la quantité conjuguée :

$$\begin{aligned}\sqrt{X^3+X+1}-\sqrt{X^3+X-1} &= \frac{\left(\sqrt{X^3+X+1}-\sqrt{X^3+X-1}\right)\left(\sqrt{X^3+X+1}+\sqrt{X^3+X-1}\right)}{\sqrt{X^3+X+1}+\sqrt{X^3+X-1}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{X^3+X+1}+\sqrt{X^3+X-1}}\end{aligned}$$

Comme $\lim_{X\to+\infty} X^3+X+1 = \lim_{X\to+\infty} X^3+X-1 = +\infty$, nous avons

$$\lim_{X\to+\infty}\sqrt{X^3+X+1}=\lim_{X\to+\infty}\sqrt{X^3+X-1}=+\infty$$

Et donc $\lim_{X\to+\infty}\sqrt{X^3+X+1}+\sqrt{X^3+X-1}=+\infty$.

D'où, $\lim_{x\to 0}\sqrt{\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x}+1}-\sqrt{\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x}-1}=\lim_{X\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{X^3+X+1}+\sqrt{X^3+X-1}}=0$

Et comme $\frac{1}{\sqrt{X^3+X+1}+\sqrt{X^3+X-1}}>0$, lorsque X tend vers $+\infty$, l'expression

$$\sqrt{\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x}+1}-\sqrt{\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x}-1}$$

tend vers 0 par valeurs positives.

2. Supposons $x < 0$. Nous faisons à nouveau le changement de variables $X = \frac{1}{x}$ et nous avons :

$$\sqrt{\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x}+1}-\sqrt{\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x}-1}=\sqrt{X^3+X+1}-\sqrt{X^3+X-1}$$

Cette fois ci, nous devrons étudier $\lim_{X\to-\infty}\sqrt{X^3+X+1}-\sqrt{X^3+X-1}$. Or, $\lim_{X\to-\infty}X^3+X+1=\lim_{X\to-\infty}X^3+X-1=-\infty$; ce qui montre que cette limite n'existe pas.

Donc, $\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\sqrt{\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x}+1}-\sqrt{\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x}-1}$ n'existe pas.

Exercice 22 :

On considère la fonction $Q(x)=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0}$
où $m\in\mathbb{N}$, $n\in\mathbb{N}$ *et pour* $i=0,\ldots,n$, $a_i\in\mathbb{K}$ *et pour* $j=0,\ldots,m$, $b_j\in\mathbb{K}$ *avec* $a_n\neq 0$ *et* $b_m\neq 0$
Donner $\lim_{x\to+\infty}Q(x)$

C'est une question classique qui nous amène à un résultat connu et beaucoup utilisé.

1. En premier, nous factorisons par le terme de plus haut degré ; c'est possible puisque $a_n \neq 0$ et $b_m \neq 0$:

$$Q(x) = \frac{a_n x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \times \frac{1}{x} + \cdots + \frac{a_1}{a_n} \times \frac{1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n} \times \frac{1}{x^n}\right)}{b_m x^m \left(1 + \frac{b_{m-1}}{b_m} \times \frac{1}{x} + \frac{b_{m-2}}{b_m} \times \frac{1}{x^2} + \cdots + \frac{b_1}{b_m} \times \frac{1}{x^{m-1}} + \frac{b_0}{b_m} \times \frac{1}{x^m}\right)}$$

C'est à dire que :

$$Q(x) = \frac{a_n x^n}{b_m x^m} \times \frac{1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \times \frac{1}{x} + \cdots + \frac{a_1}{a_n} \times \frac{1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n} \times \frac{1}{x^n}}{1 + \frac{b_{m-1}}{b_m} \times \frac{1}{x} + \frac{b_{m-2}}{b_m} \times \frac{1}{x^2} + \cdots + \frac{b_1}{b_m} \times \frac{1}{x^{m-1}} + \frac{b_0}{b_m} \times \frac{1}{x^m}}$$

2. Ensuite, nous avons, pour $i = 1, \cdots, n$ et $j = 1, \cdots, m$: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{a_i}{a_n} \times \frac{1}{x^{n-i}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{b_j}{b_m} \times \frac{1}{x^{m-j}} = 0$, et donc, d'après les théorème d'addition et de quotient :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \times \frac{1}{x} + \cdots + \frac{a_1}{a_n} \times \frac{1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n} \times \frac{1}{x^n}}{1 + \frac{b_{m-1}}{b_m} \times \frac{1}{x} + \frac{b_{m-2}}{b_m} \times \frac{1}{x^2} + \cdots + \frac{b_1}{b_m} \times \frac{1}{x^{m-1}} + \frac{b_0}{b_m} \times \frac{1}{x^m}} = 1$$

De telle sorte que

$$\lim_{x \to +\infty} Q(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} = \lim_{x \to +\infty} \frac{a_n}{b_m} x^{n-m}$$

3. (a) Si $n > m$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{n-m} = +\infty$ et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} Q(x) = \text{signe}\left(\frac{a_n}{b_m}\right)\infty$
   (b) Si $n < m$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{n-m} = 0$ et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} Q(x) = 0$
   (c) Si $n = m$ alors $x^{n-m} = 1$ et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} Q(x) = \frac{a_n}{b_m}$

Nous retiendrons donc qu'un rapport de polynôme tend vers $+\infty$ comme le rapport de ses termes de plus haut degré

Exercice 23 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$, la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 1$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$. Quelle est $\lim\limits_{x \to 0} g \circ f(x)$?

1. Premièrement, $\underline{\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0}$

   En effet, $|f(x)| = \left|x \sin \frac{1}{x}\right| \leqslant |x|$; comme $\lim\limits_{x \to 0} |x| = 0$, par les théorèmes de majoration, nous en déduisons que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$
2. Par construction, $\underline{\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 1}$
3. Considérons, maintenant 2 suites :
   - ▷ La première suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $x_n = \frac{1}{n\pi}$. Alors $f(x_n) = \frac{1}{n\pi} \sin n\pi = 0$ et donc $g \circ f(x_n) = 0$
     Nous avons $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} g \circ f(x_n) = 0$
   - ▷ La seconde suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$. Alors $f(y_n) = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} \neq 0$ et donc $g \circ f(y_n) = 1$
     Nous avons $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} g \circ f(y_n) = 1$

Nous avons donc trouvé 2 suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ qui, toutes deux tendent vers 0, mais telles que $\lim\limits_{n \to +\infty} g \circ f(x_n) \neq \lim\limits_{n \to +\infty} g \circ f(y_n) = 1$
La fonction $g \circ f$ n'admet donc pas de limite en 0.

Exercice 24 :

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $x_0 \in \overset{\circ}{I}$ où $\overset{\circ}{I}$ est l'intérieur de l'intervalle I. Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ 2 fonctions telles que : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l_f$ et $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l_g$
Démontrer que $\sup(f, g)$ et $\inf(f, g)$ admettent une limite finie en x_0 et les calculer.

On montre facilement que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}$, $\sup(x, y) = \dfrac{(x + y) + |x - y|}{2}$ et $\inf(x, y) = \dfrac{(x + y) - |x - y|}{2}$.
Ainsi, $\sup(f, g) = \dfrac{(f + g) + |f - g|}{2}$.
D'après les théorèmes sur les limites *(sommes, quotient, composition)*, $\lim\limits_{x \to x_0} \sup(f, g)(x)$ existe et :

$$\lim_{x \to x_0} \sup(f, g)(x) = \frac{(l_f + l_g) + |l_f - l_g|}{2} = \sup(l_f, l_g)$$

De même, $\lim\limits_{x \to x_0} \inf(f, g)(x)$ existe et $\lim\limits_{x \to x_0} \inf(f, g)(x) = \inf(l_f, l_g)$

Exercice 25 :

1. *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction numérique périodique. On suppose qu'elle admet une limite finie l lorsque x tens vers $+\infty$. Montrer que f est constante.*

   Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction numérique périodique et de période T avec $T > 0$
   - Si f est constante, f est bien périodique. Et comme $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $f(x) = l$
   - Supposons f non constante et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$

     f étant non constante, il existe $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$ tels que $f(x_1) \neq f(x_2)$, c'est à dire tels que $|f(x_1) - f(x_2)| > 0$
     Soit $\varepsilon = \dfrac{|f(x_1) - f(x_2)|}{3}$.
     Comme $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = l$, il existe $A > 0$ tel que si $t > A$, alors $|f(t) - l| < \varepsilon$.
     $\mathbb{R}$ est un corps archimédien, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $x_1 + n_1 T > A$, et $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que $x_2 + n_2 T > A$.
     Alors, pour $n \in \mathbb{N}$, tels que $n > \sup(n_1, n_2)$, alors $x_1 + nT > A$ et $x_2 + nT > A$ et donc $|f(x_1 + nT) - l| < \varepsilon$ et $|f(x_2 + nT) - l| < \varepsilon$, c'est à dire, par périodicité, $|f(x_1) - l| < \varepsilon$ et $|f(x_2 +) - l| < \varepsilon$. Ainsi, :

     $$|f(x_1) - f(x_2)| = |f(x_1) - l + l - f(x_2)| \leqslant |f(x_1) - l| + |l - f(x_2)| < 2\varepsilon = \frac{2|f(x_1) - f(x_2)|}{3}$$

     C'est à dire que nous avons : $|f(x_1) - f(x_2)| < \dfrac{2|f(x_1) - f(x_2)|}{3}$, ce qui est impossible.
     Donc f ne peut pas être non-constante.

   Ainsi, une fonction périodique qui admet une limite finie est constante
2. *La fonction $f(x) = \sin x$ a-t-elle une limite lorsque x tend vers $+\infty$?*

   On n'apprendra à personne que la fonction $f(x) = \sin x$ est périodique et de période 2π, non constante ; elle ne peut donc admettre de limite en $+\infty$.
   Il en est de même des fonctions $g(x) = \cos x$ et $h(x) = e^{2i\pi x}$

Exercice 26 :

Soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\deg P_n = n$
Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $f_n = \dfrac{1}{(P_n)^2 + 1}$. Etablir que la famille $\{f_n ; n \in \mathbb{N}^*\}$ est une famille libre dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

Nous allons démontrer ce résultat en deux temps.
Premièrement, il faut remarquer que comme, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(P_n(x))^2 + 1 > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est définie sur $\mathbb{R}$ en entier. Remarquons aussi que $(P_n(x))^2 + 1$ est un polynôme de degré $2n$
Nous appellons toujours $\mathcal{O}$ la fonction nulle, c'est à dire celle qui à tout $x \in \mathbb{R}$, fait correspondre $\mathcal{O}(x) = 0$

1. Soit $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, n réels tels que $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \cdots + \lambda_n f_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k = \mathcal{O}$, ce qui signifie que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + \cdots + \lambda_n f_n(x) = 0$, ce qui est équivalent à écrire, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$\lambda_1 \frac{1}{(P_1(x))^2 + 1} + \lambda_2 \frac{1}{(P_2(x))^2 + 1} + \cdots + \lambda_n \frac{1}{(P_n(x))^2 + 1} = 0$$
   - ▷ En multipliant l'expression ci dessus par x^2, nous avons :
$$\begin{cases} \lambda_1 \frac{1}{(P_1(x))^2 + 1} + \lambda_2 \frac{1}{(P_2(x))^2 + 1} + \cdots + \lambda_n \frac{1}{(P_n(x))^2 + 1} = 0 \\ \Longleftrightarrow \\ \lambda_1 \frac{x^2}{(P_1(x))^2 + 1} + \lambda_2 \frac{x^2}{(P_2(x))^2 + 1} + \cdots + \lambda_n \frac{x^2}{(P_n(x))^2 + 1} = 0 \end{cases}$$
   Pour $k \in \mathbb{N}$ et $2 \leqslant k \leqslant n$, nous avons $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{(P_k(x))^2 + 1} = 0$ et donc
$$\lim_{x \to +\infty} \lambda_1 \frac{x^2}{(P_1(x))^2 + 1} + \lambda_2 \frac{x^2}{(P_2(x))^2 + 1} + \cdots + \lambda_n \frac{x^2}{(P_n(x))^2 + 1} = \frac{\lambda_1}{a_1^2} = 0$$
   Et donc, $\lambda_1 = 0$
   - ▷ Nous venons donc de montrer que si $\lambda_1 \frac{1}{(P_1(x))^2 + 1} + \lambda_2 \frac{1}{(P_2(x))^2 + 1} + \cdots + \lambda_n \frac{1}{(P_n(x))^2 + 1} = 0$, alors $\lambda_1 = 0$, c'est à dire :
$$\lambda_2 \frac{1}{(P_2(x))^2 + 1} + \lambda_3 \frac{1}{(P_3(x))^2 + 1} + \cdots + \lambda_n \frac{1}{(P_n(x))^2 + 1} = 0$$
   Multiplions maintenant l'expression ci-dessus par x^4. Nous avons :
$$\begin{cases} \lambda_2 \frac{1}{(P_2(x))^2 + 1} + \lambda_3 \frac{1}{(P_3(x))^2 + 1} + \cdots + \lambda_n \frac{1}{(P_n(x))^2 + 1} = 0 \\ \Longleftrightarrow \\ \lambda_2 \frac{x^4}{(P_2(x))^2 + 1} + \lambda_3 \frac{x^4}{(P_3(x))^2 + 1} + \cdots + \lambda_n \frac{x^4}{(P_n(x))^2 + 1} = 0 \end{cases}$$
   Et de la même manière que ci-dessus, nous montrons que $\lambda_2 = 0$
   - ▷ En itérant ce procédé, nous démontrons que $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$, ce qui montre que la famille $\{f_k; 1 \leqslant k \leqslant n\}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$
2. Mais, la démonstration ci-dessus n'est pas suffisante pour démontrer que la famille $\{f_n; n \in \mathbb{N}^*\}$ est une famille libre dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. La définition précise dit :

   La famille $\{f_n; n \in \mathbb{N}^*\}$ est une famille libre dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ si et seulement si, toute famille finie $\{f_{n_k}; 1 \leqslant k \leqslant p\}$ extraite de la famille $\{f_n; n \in \mathbb{N}^*\}$ est une famille libre dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

   Soit donc $\{f_{n_k}; 1 \leqslant k \leqslant p\}$ une famille finie extraite de $\{f_n; n \in \mathbb{N}^*\}$. Nous supposons, pour simplifier, que $n_1 < n_2 < \cdots < n_p$
   Pour démontrer qu'elle est libre, il faut démontrer que pour tout réel $\lambda_{n_1}, \cdots, \lambda_{n_p}$, l'implication :
$$\lambda_{n_1} f_{n_1} + \lambda_{n_2} f_{n_2} + \cdots + \lambda_{n_p} f_{n_p} = \mathcal{O} \Longrightarrow \lambda_{n_1} = \lambda_{n_2} = \cdots = \lambda_{n_p} = 0$$

La démonstration est semblable à celle que nous avons faite dans le point 1 : nous commençons par multiplier l'expression par x^{2n_1}

$$\begin{cases} \lambda_{n_1} f_{n_1} + \lambda_{n_2} f_{n_2} + \cdots + \lambda_{n_p} f_{n_p} = \mathcal{O} \\ \Longleftrightarrow \\ \lambda_{n_1} \dfrac{1}{(P_{n_1}(x))^2 + 1} + \lambda_{n_2} \dfrac{1}{(P_{n_2}(x))^2 + 1} + \cdots + \lambda_{n_p} \dfrac{1}{(P_{n_p}(x))^2 + 1} = 0 \\ \Longleftrightarrow \\ \lambda_{n_1} \dfrac{x^{2n_1}}{(P_{n_1}(x))^2 + 1} + \lambda_{n_2} \dfrac{x^{2n_1}}{(P_{n_2}(x))^2 + 1} + \cdots + \lambda_{n_p} \dfrac{x^{2n_1}}{(P_{n_p}(x))^2 + 1} = 0 \end{cases}$$

De la même manière, pour $2 \leqslant k \leqslant p$, nous avons $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x^{2n_1}}{(P_{n_k}(x))^2 + 1} = 0$ et donc

$$\lim_{x \to +\infty} \lambda_{n_1} \frac{x^{2n_1}}{(P_{n_1}(x))^2 + 1} + \lambda_{n_2} \frac{x^{2n_1}}{(P_{n_2}(x))^2 + 1} + \cdots + \lambda_{n_p} \frac{x^{2n_1}}{(P_{n_p}(x))^2 + 1} = \frac{\lambda_{n_1}}{a_{n_1}^2} = 0$$

Et donc, $\lambda_{n_1} = 0$

Et comme au-dessus, nous itérons pour obtenir $\lambda_{n_1} = \lambda_{n_2} = \cdots = \lambda_{n_p} = 0$, ce qui montre que la famille $\{f_{n_k}; 1 \leqslant k \leqslant p\}$ extraite de la famille $\{f_n; n \in \mathbb{N}^*\}$ est une famille libre dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

Et donc la famille dénombrable $\{f_n; n \in \mathbb{N}^*\}$ est une famille libre dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

Exercice 27 :

Soit $\alpha > 0$. Soient $f :]0; \alpha[\longrightarrow \mathbb{K}$ et $g :]0; \alpha[\longrightarrow \mathbb{K}$, 2 fonctions numériques. On suppose $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = L$ avec $L \in \mathbb{K}$ et on suppose de plus que pour tout $x \in]0; \alpha[$ et tout $y \in]0; \alpha[$,

$$|g(x) - g(y)| \leqslant |f(x) - f(y)|$$

Démontrer que g admet une limite finie lorsque x tend vers 0 par valeurs positives.

C'est simplement une application du critère de Cauchy pour les fonctions.
Soit $\varepsilon > 0$
f admettant une limite en 0 par valeurs positives, f vérifie donc le critère de Cauchy pour les fonctions. Il existe donc $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in]0; \alpha[$ et tout $y \in]0; \alpha[$ tels que $|x - y| \leqslant \eta$, alors $|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$.
De l'hypothèse, $|g(x) - g(y)| \leqslant |f(x) - f(y)|$, on peut écrire que pour tout $x \in]0; \alpha[$ et tout $y \in]0; \alpha[$ tels que $|x - y| \leqslant \eta$, alors $|g(x) - g(y)| \leqslant \varepsilon$.
Ce qui montre que g vérifie le critère de Cauchy pour les fonctions et que donc, g admet une limite finie lorsque x tend vers 0 par valeurs positives.

Exercice 28 :

Calculez les limites suivantes :

1. (a) $\displaystyle\lim_{x \to 0} x \left[\frac{1}{x}\right]$

   Nous avons, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\left[\dfrac{1}{x}\right] \leqslant \dfrac{1}{x} < \left[\dfrac{1}{x}\right] + 1$

   ▷ Si $x > 0$, nous avons :

   $$\left[\frac{1}{x}\right] \leqslant \frac{1}{x} < \left[\frac{1}{x}\right] + 1 \Longrightarrow x\left[\frac{1}{x}\right] \leqslant 1 < x\left[\frac{1}{x}\right] + x$$

   C'est à dire : $1 - x < x\left[\dfrac{1}{x}\right] \leqslant 1$

   Par le théorème des limites par encadrements, nous déduisons que $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x\left[\frac{1}{x}\right] = +1$

▷ Si $x < 0$, nous avons :

$$\left[\frac{1}{x}\right] \leqslant \frac{1}{x} < \left[\frac{1}{x}\right] + 1 \Longrightarrow x\left[\frac{1}{x}\right] + x < 1 \leqslant x\left[\frac{1}{x}\right]$$

C'est à dire : $1 \leqslant x\left[\frac{1}{x}\right] < 1 - x$

Par le théorème des limites par encadrements, nous déduisons que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} x\left[\frac{1}{x}\right] = +1$

En conclusion, $\lim\limits_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\right] = 1$

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left[\frac{1}{x}\right]$

Si $x > 1$, alors $0 < \frac{1}{x} < 1$ et $\left[\frac{1}{x}\right] = 0$, et donc, pour tout $x > 1$, $x\left[\frac{1}{x}\right] = 0$ d'où nous déduisons que $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left[\frac{1}{x}\right] = 0$

(c) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \sqrt{x}\left[\frac{1}{x}\right]$

Comme toujours, nous avons, pour tout $x > 0$, $\left[\frac{1}{x}\right] \leqslant \frac{1}{x} < \left[\frac{1}{x}\right] + 1$, et en multipliant par $\sqrt{x}$:

$$\sqrt{x}\left[\frac{1}{x}\right] \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}} < \sqrt{x}\left[\frac{1}{x}\right] + \sqrt{x} \Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x} < \sqrt{x}\left[\frac{1}{x}\right]$$

Comme $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x} = +\infty$, nous avons $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \sqrt{x}\left[\frac{1}{x}\right] = +\infty$

(d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{[x]}{x}$

Il y a deux méthodes de résolution pour cette question :

▷ La première qui consiste à utiliser l'encadrement classique et qui nous fait aboutir à l'inégalité :

$$1 - \frac{1}{x} < \frac{[x]}{x} \leqslant 1$$

▷ La seconde méthode consiste à faire le changement de variables $X = \frac{1}{x}$ et nous avons :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{[x]}{x} = \lim_{\substack{X\to 0\\ X>0}} X\left[\frac{1}{X}\right] = +1$$

Donc, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{[x]}{x} = +1$

(e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\left[\frac{1}{x}\right] + x}{\left[\frac{1}{x}\right] - x}$

Nous avons, pour $x \neq 0$: $\dfrac{\left[\frac{1}{x}\right] + x}{\left[\frac{1}{x}\right] - x} = \dfrac{x\left[\frac{1}{x}\right] + x^2}{x\left[\frac{1}{x}\right] - x^2}$

Comme $\lim\limits_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\right] = 1$, nous avons $\lim\limits_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\right] + x^2 = \lim\limits_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\right] - x^2 = 1$, et donc,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left[\frac{1}{x}\right] + x}{\left[\frac{1}{x}\right] - x} = 1$$

(f) $\lim\limits_{x\to 0} x\left[x - \frac{1}{x}\right]$

Nous avons toujours : $\left[x - \frac{1}{x}\right] \leqslant x - \frac{1}{x} < \left[x - \frac{1}{x}\right] + 1$

▷ Si $x > 0$, alors $x\left[x - \frac{1}{x}\right] \leqslant x^2 - 1 < x\left[x - \frac{1}{x}\right] + x$, inégalité qui est équivalente à :

$$x^2 - 1 - x < x\left[x - \frac{1}{x}\right] \leqslant x^2 - 1$$

Ce qui donne $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x\left[x - \frac{1}{x}\right] = -1$

▷ Cette fois ci, si $x < 0$, alors $x\left[x - \frac{1}{x}\right] + x < x^2 - 1 \leqslant x\left[x - \frac{1}{x}\right]$, ce qui donne, de manière équivalente :

$$x^2 - 1 \leqslant x\left[x - \frac{1}{x}\right] < x^2 - 1 - x$$

Et nous avons toujours $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} x\left[x - \frac{1}{x}\right] = -1$

En conclusion, $\lim\limits_{x\to 0} x\left[x - \frac{1}{x}\right] = -1$

2. (a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2+x+1} - (x+1)\right)$

Nous sommes, ici, devant une indétermination qu'il faut lever, de manière classique :

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2+x+1} - (x+1) &= \frac{\left(\sqrt{x^2+x+1} - (x+1)\right)\left(\sqrt{x^2+x+1} + (x+1)\right)}{\sqrt{x^2+x+1} + (x+1)} \\
&= \frac{x^2+x+1-(x+1)^2}{\sqrt{x^2+x+1} + (x+1)} \\
&= \frac{-x}{\sqrt{x^2+x+1} + (x+1)} \\
&= -\frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} + x\left(\frac{1}{x}+1\right)} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} + \left(\frac{1}{x}+1\right)}
\end{aligned}$$

Comme $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = 1$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\frac{1}{x}+1\right) = 1$, nous avons :

$\lim\limits_{x\to +\infty} -\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} + \left(\frac{1}{x}+1\right)} = -\frac{1}{2}$, c'est à dire $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2+x+1} - (x+1)\right) = -\frac{1}{2}$

(b) $\lim\limits_{x\to +\infty} x\left(\sqrt{x+\sqrt{x+1}} - \sqrt{x+\sqrt{x-1}}\right)$

Comme tout à l'heure :

$$\begin{aligned}
x\left(\sqrt{x+\sqrt{x+1}}-\sqrt{x+\sqrt{x-1}}\right) &= x\times\frac{\left(\sqrt{x+\sqrt{x+1}}-\sqrt{x+\sqrt{x-1}}\right)\left(\sqrt{x+\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+\sqrt{x-1}}\right)}{\left(\sqrt{x+\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+\sqrt{x-1}}\right)}\\
&= x\times\frac{x+\sqrt{x+1}-x-\sqrt{x-1}}{\left(\sqrt{x+\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+\sqrt{x-1}}\right)}\\
&= x\times\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\left(\sqrt{x+\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+\sqrt{x-1}}\right)}\\
&= x\times\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)}{\left(\sqrt{x+\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+\sqrt{x-1}}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)}\\
&= x\times\frac{2}{\left(\sqrt{x+\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+\sqrt{x-1}}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)}\\
&= \frac{2x}{\left(\sqrt{x+\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+\sqrt{x-1}}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)}
\end{aligned}$$

Maintenant, nous nous intéressons au dénominateur :

$$\begin{gathered}
\left(\sqrt{x+\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+\sqrt{x-1}}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)\\
=\\
\left(\sqrt{x+x\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}+\sqrt{x+x\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}\right)\left(\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{x}\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)\\
=\\
\left(\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}+\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}\right)\times\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)\\
=\\
x\left(\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}\right)\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)
\end{gathered}$$

De telle sorte que :

$$\begin{aligned}
x\left(\sqrt{x+\sqrt{x+1}}-\sqrt{x+\sqrt{x-1}}\right) &= \frac{2x}{\left(\sqrt{x+\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+\sqrt{x-1}}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)}\\
&= \frac{2x}{x\left(\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}\right)\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)}\\
&= \frac{2}{\left(\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}\right)\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)}
\end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}\right)=2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)=2$, de telle sorte que $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x+\sqrt{x+1}}-\sqrt{x+\sqrt{x-1}}\right)=\frac{1}{2}$

(c) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{4}}\left(\sqrt[4]{x+1}-\sqrt[4]{x-1}\right)$

Nous allons, dans un premier temps, nous intéresser à $\sqrt[4]{x+1}-\sqrt[4]{x-1}$:

$$\begin{aligned}
\sqrt[4]{x+1}-\sqrt[4]{x-1} &= \frac{\left(\sqrt[4]{x+1}-\sqrt[4]{x-1}\right)\left(\sqrt[4]{x+1}+\sqrt[4]{x-1}\right)}{\sqrt[4]{x+1}+\sqrt[4]{x-1}}\\
&= \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt[4]{x+1}+\sqrt[4]{x-1}}\\
&= \frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)}{\left(\sqrt[4]{x+1}+\sqrt[4]{x-1}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)}\\
&= \frac{2}{\left(\sqrt[4]{x+1}+\sqrt[4]{x-1}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)}
\end{aligned}$$

Regardons, maintenant, le dénominateur :

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt[4]{x+1}+\sqrt[4]{x-1}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right) &= x^{\frac{1}{4}}\left(\sqrt[4]{1+\frac{1}{x}}+\sqrt[4]{1-\frac{1}{x}}\right)\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)\\
&= x^{\frac{3}{4}}\left(\sqrt[4]{1+\frac{1}{x}}+\sqrt[4]{1-\frac{1}{x}}\right)\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)
\end{aligned}$$

De telle sorte que :

$$\begin{aligned}
x^{\frac{3}{4}}\left(\sqrt[4]{x+1}-\sqrt[4]{x-1}\right) &= \frac{2x^{\frac{3}{4}}}{x^{\frac{3}{4}}\left(\sqrt[4]{1+\frac{1}{x}}+\sqrt[4]{1-\frac{1}{x}}\right)\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)}\\
&= \frac{2}{\left(\sqrt[4]{1+\frac{1}{x}}+\sqrt[4]{1-\frac{1}{x}}\right)\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)}
\end{aligned}$$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[4]{1+\frac{1}{x}}+\sqrt[4]{1-\frac{1}{x}}\right)\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)=4$,

nous avons $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{4}}\left(\sqrt[4]{x+1}-\sqrt[4]{x-1}\right)=\dfrac{1}{2}$

Exercice 29 :

La fonction $f(x)=\dfrac{x^x}{[x]^{[x]}}$ définie pour $x\geqslant 1$ admet-elle une limite en $+\infty$?

- ▷ Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ par $x_n=n$; alors $f(x_n)=\dfrac{n^n}{n^n}=1$.
  Nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}f(x_n)=1$
- ▷ Soit, maintenant, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ par $y_n=n+\dfrac{1}{2}$.
  Nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty}y_n=+\infty$ et $[y_n]=n$

  Maintenant, $f(y_n)=\dfrac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^{n+\frac{1}{2}}}{n^n}=\dfrac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^n}{n^n}\times\left(n+\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}=\dfrac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^n}{n^n}\times\sqrt{n+\dfrac{1}{2}}$

  - Tout d'abord, $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n+\dfrac{1}{2}}=+\infty$
  - Ensuite, $\dfrac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^n}{n^n}=\left(\dfrac{\left(n+\frac{1}{2}\right)}{n}\right)^n=\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^n$.

  Or, $\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^n=e^{n\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)}=e^{\frac{1}{2}\times 2n\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)}=e^{\frac{1}{2}\times\frac{\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)}{\frac{1}{2n}}}$.

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)}{\frac{1}{2n}}=1$ *(limite remarquable)*, et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^n=\sqrt{e}$

Nous en déduisons donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(y_n)=+\infty$

En conclusion, nous avons trouvé 2 suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui toutes deux tendent vers $+\infty$ et telles que les limites en $+\infty$ de $f(x_n)$ et $f(y_n)$ sont différentes.
La fonction f n'admet donc pas de limite en $+\infty$

Exercice 30 :

Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ définie, pour tout $x\in\mathbb{R}$ par : $f(x)=\lim\limits_{m\to+\infty}\left(\lim\limits_{n\to+\infty}\left((\cos(n!\pi x))^{2m}\right)\right)$ Démontrer que $f=1_{\mathbb{Q}}$ où $1_{\mathbb{Q}}$ désigne la fonction indicatrice de l'ensemble $\mathbb{Q}$

1. Supposons $x\in\mathbb{Q}$; alors, il existe $p\in\mathbb{Z}$ et $q\in\mathbb{N}^*$ tels que $x=\dfrac{p}{q}$. Pour $n\geqslant q$, alors $n!x\in\mathbb{Z}$ et $\cos(n!\pi x)=\pm1$ et $(\cos(n!\pi x))^2=1$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty}(\cos(n!\pi x))^2=1$.

   Comme $(\cos(n!\pi x))^{2m}=\left((\cos(n!\pi x))^2\right)^m$, pour $n\geqslant q$ et tout $m\in\mathbb{N}$, $(\cos(n!\pi x))^{2m}=1$ et donc si $x\in\mathbb{Q}$, $\lim\limits_{m\to+\infty}\left(\lim\limits_{n\to+\infty}\left((\cos(n!\pi x))^{2m}\right)\right)=1$
2. Si $x\notin\mathbb{Q}$, alors, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $0\leqslant(\cos(n!\pi x))^2<1$ et donc $\lim\limits_{m\to+\infty}\left((\cos(n!\pi x))^2\right)^m=0$, c'est à dire $\lim\limits_{m\to+\infty}\left(\lim\limits_{n\to+\infty}\left((\cos(n!\pi x))^{2m}\right)\right)=0$

Vous avons donc bien $f=1_{\mathbb{Q}}$

3.9.2 Fonctions continues

Exercice 31 :

Cet exercice n'est pas typique des fonctions continues, mais a plutôt sa place dans la théorie des ensembles. Mais, je le maintiens ici, parce que, justement, nous l'utilisons.
Soit E et F 2 ensembles quelconques et $f:E\longrightarrow F$ une application.

1. *Soient $A\subset F$ et $B\subset F$. Démontrez que nous avons l'implication :*
$$A\subset B\Longrightarrow f^{-1}(A)\subset f^{-1}(B)$$

   Soit $x\in f^{-1}(A)$
   Alors $f(x)\in A$. Comme $A\subset B$, nous avons $f(x)\in B$, et donc $x\in f^{-1}(B)$
   D'où $f^{-1}(A)\subset f^{-1}(B)$
2. *Soient $I\subset E$ et $J\subset F$. Démontrer que nous avons :*
$$f(I)\subset J\Longleftrightarrow I\subset f^{-1}(J)$$

Tout d'abord, il faut faire remarquer que $f^{-1}(J)=\{x\in E \text{ tels que } f(x)\in J\}$ et que
$$f(I)=\{y\in F \text{ tels que il existe } x\in I \text{ tels que } f(x)=y\}$$
D'autre part, pour tout $y\in F$, $f^{-1}(y)=f^{-1}(\{y\})$ est un ensemble ; c'est l'ensemble :
$$f^{-1}(y)=f^{-1}(\{y\})=\{x\in E \text{ tels que } y=f(x)\}$$
On ne connaît rien de f, ni si elle est surjective, injective ou bijective

1. Supposons $f(I) \subset J$
   Nous allons montrer que $I \subset f^{-1}(J)$
   Soit donc $x \in I$.
   Alors, $y = f(x)$ est tel que $y \in f(I)$ et donc $y \in J$, c'est à dire que $f(x) \in J$, et donc $x \in f^{-1}(J)$
   Donc, $I \subset f^{-1}(J)$
2. Réciproquement, supposons $I \subset f^{-1}(J)$
   Nous allons donc démontrer que $f(I) \subset J$
   Soit donc $y \in f(I)$
   Il existe donc $x \in I$ tel que $y = f(x)$; comme, par hypothèse, $I \subset f^{-1}(J)$, alors $f(x) \in J$ et donc $y \in J$.
   Nous avons bien $f(I) \subset J$

Exercice 32 :

1. *Soit f une fonction continue et positive sur un voisinage V de x_0. Démontrer que la fonction $F(x) = \sqrt{f(x)}$ est continue en x_0*

   Soit $\varepsilon > 0$
   Il faut donc majorer $\left|\sqrt{f(x)} - \sqrt{f(x_0)}\right|$. La démonstration est en tout point semblable à celle faite en 3.4.2
   - ▷ Si $f(x_0) = 0$, alors la quantité $\left|\sqrt{f(x)} - \sqrt{f(x_0)}\right|$ devient $\sqrt{f(x)}$ et $\sqrt{f(x)} \leqslant \varepsilon$ si et seulement si $0 \leqslant f(x) \leqslant \varepsilon^2$
     f étant continue en x_0, pour ε^2, il existe $\eta > 0$ tel que si $|x - x_0| < \eta$ alors $0 \leqslant f(x) \leqslant \varepsilon^2$.
     Ainsi, pour $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que si $|x - x_0| < \eta$ alors $\sqrt{f(x)} \leqslant \varepsilon$
   - ▷ Supposons maintenant $f(x_0) > 0$. Alors,
     $$\left|\sqrt{f(x)} - \sqrt{f(x_0)}\right| = \frac{\left|\sqrt{f(x)} - \sqrt{f(x_0)}\right|\left(\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(x_0)}\right)}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(x_0)}} = \frac{|f(x) - f(x_0)|}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(x_0)}}$$
     Comme $\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(x_0)} \geqslant \sqrt{f(x_0)}$, nous avons $\left|\sqrt{f(x)} - \sqrt{f(x_0)}\right| \leqslant \dfrac{|f(x) - f(x_0)|}{\sqrt{f(x_0)}}$.
     f étant continue en x_0, il existe $\eta > 0$ tel que si $|x - x_0| < \eta$ alors $|f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon \times \sqrt{f(x_0)}$
     Ainsi, si $|x - x_0| < \eta$ alors $\left|\sqrt{f(x)} - \sqrt{f(x_0)}\right| \leqslant \dfrac{|f(x) - f(x_0)|}{\sqrt{f(x_0)}} \leqslant \dfrac{\varepsilon \times \sqrt{f(x_0)}}{\sqrt{f(x_0)}} = \varepsilon$
     Nous avons donc $F(x) = \sqrt{f(x)}$ continue en x_0
2. *Soit g une fonction définie et continue sur un voisinage V de x_0. Démontrer que la fonction $G(x) = |g(x)|$ est continue en x_0*

   Soit $\varepsilon > 0$.
   La démonstration suit toujours celle faite en 3.4.2. Elle est basée sur le fait que :
   $$||g(x)| - |g(x_0)|| \leqslant |g(x) - g(x_0)|$$
   g étant continue en x_0, il existe donc $\eta > 0$ tel que si $|x - x_0| < \eta$ alors $|g(x) - g(x_0)| \leqslant \varepsilon$, et donc, si $|x - x_0| < \eta$ alors $||g(x)| - |g(x_0)|| \leqslant \varepsilon$.
   Ainsi, la fonction $G(x) = |g(x)|$ est elle continue en x_0

Exercice 34 :

Soient $E \subset \mathbb{R}$ et 3 fonctions f, g et h, définies sur E à valeurs dans $\mathbb{R}$ et continues en $x_0 \in E$. Nous définissons la fonction $\mathrm{Mil}(f,g,h)(x)$ par :

$$\mathrm{Mil}(f,g,h)(x) = \mathrm{Mil}(f(x), g(x), h(x))$$

Montrez que la fonction $\mathrm{Mil}(f,g,h)$ est continue en x_0

Il suffit de remarquer que $\text{Mil}(a,b,c) = a+b+c-\sup(a,b,c)-\inf(a,b,c)$ et que donc

$$\text{Mil}(f,g,h) = a+b+c-\sup(f,g,h)-\inf(f,g,h)$$

Nous en déduisons que, puisque $f+g+h$ est continue en x_0, que $\sup(f,g,h)$ et $\inf(f,g,h)$ sont continues en x_0, que $\text{Mil}(f,g,h)$ est continue en x_0

Exercice 35 :

Est-il possible de prolonger par continuité les fonctions suivantes, toutes définies sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

1. $f(x) = \dfrac{1}{2x}\left[(1+x)^n - 1\right]$ *avec* $n \in \mathbb{N}$

   Exercice déjà résolu !!

   Il suffit de voir que $(1+x)^n - 1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^k = nx + \sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}x^k = nx + x^2\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}x^{k-2}$

   Donc, $\dfrac{1}{2x}\left[(1+x)^n - 1\right] = \dfrac{n}{2} + \dfrac{x}{2}\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}x^{k-2}$

   Ainsi, $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{n}{2}$ et nous prolongeons par continuité en 0, en posant $f(0) = \dfrac{n}{2}$

2. $f(x) = x\sin\dfrac{1}{x}$

   Pas grande difficulté, puisque, pour tout $x\in\mathbb{R}$, nous avons $\left|x\sin\dfrac{1}{x}\right| \leqslant |x|$ et donc $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$, et on pose alors $f(0) = 0$

   Le graphe de $f(x) = x\sin\dfrac{1}{x}$ explique bien ce qui se passe au voisinage de 0

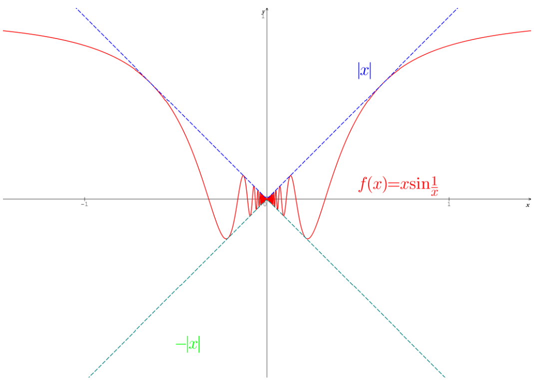

FIGURE 3.34 – Le graphe de $f(x) = x\sin\dfrac{1}{x}$ encadré par les graphe de $|x|$ et $-|x|$

3. $f(x) = \dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$

   Il est clair qu'il est impossible de prolonger cette fonction en 0 puisqu'elle n'y admet pas de limite.

   - Soit $x_n = \dfrac{1}{n\pi}$;
     Alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$ et $f(x_n) = n\pi\sin n\pi = 0$. Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = 0$
   - Soit $y_n = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$;
     Alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} y_n = 0$ et $f(y_n) = \left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right) = \left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)$. Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f(y_n) = +\infty$

   f n'admet donc pas de limite en 0 et ne peut y être continue.

4. $f(x) = x\left[\dfrac{1}{x}\right]$

   On a déjà démontré que $\lim\limits_{x\to 0} x\left[\dfrac{1}{x}\right] = 1$; donc, c'est fini

Exercice 36 :

Etudier la continuité des fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ par :

1. $f(x) = \sqrt{x-[x]}$

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   Si $x \in [n; n+1[$ alors $f(x) = \sqrt{x-n}$ et est continue pour tout $x_0 \in [n; n+1[$
   Le problème se pose essentiellement en $x_0 = n$ où $n \in \mathbb{N}^*$; nous allons étudier f à droite et à gauche de n
   - ▷ Si $x \geqslant n$, c'est à dire si $x \in [n; n+1[$ et donc, comme $f(x) = \sqrt{x-n}$, $\lim\limits_{\substack{x\to n\\ x>n}} f(x) = 0 = f(n)$.
     f est donc continue à droite de n
   - ▷ Maintenant, si $x < n$, c'est à dire si $x \in [n-1; n[$ alors $f(x) = \sqrt{x-(n-1)}$, $\lim\limits_{\substack{x\to n\\ x<n}} f(x) = 1 \neq f(n)$.
     f n'est donc pas continue à gauche de n

   f n'est pas continue en $x = n$. *Il aurait été tout à fait facile de généraliser à $x \in \mathbb{Z}$*

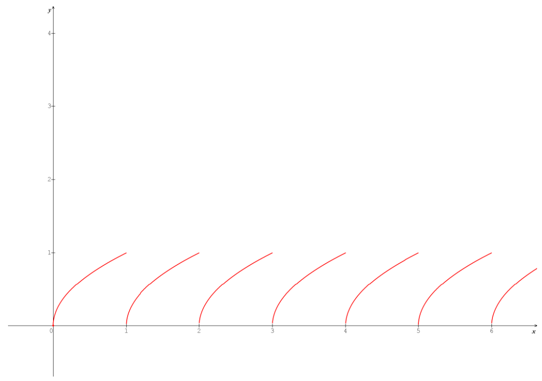

FIGURE 3.35 – Le graphe de $f(x) = \sqrt{x-[x]}$

2. $g(x) = [x] + \sqrt{x-[x]}$

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   Si $x \in [n; n+1[$ alors $g(x) = n + \sqrt{x-n}$ et est continue pour tout $x_0 \in [n; n+1[$
   Le problème se pose essentiellement en $x_0 = n$ où $n \in \mathbb{N}^*$; nous allons étudier g à droite et à gauche de n
   - ▷ Si $x \geqslant n$, c'est à dire si $x \in [n; n+1[$ et donc, comme $g(x) = n+\sqrt{x-n}$, $\lim\limits_{\substack{x\to n\\ x>n}} g(x) = n = g(n)$.
     g est donc continue à droite de n
   - ▷ Maintenant, si $x < n$, c'est à dire si $x \in [n-1; n[$ alors $g(x) = n-1+\sqrt{x-(n-1)}$, $\lim\limits_{\substack{x\to n\\ x<n}} g(x) = n = g(n)$.
     g est donc continue à gauche de n

   g est donc continue en $x = n$ *(Visualisez le graphe de $g(x) = [x] + \sqrt{x-[x]}$ sur la figure 3.36)*

3. $h(x) = [x] + (x-[x])^2$

   Et on recommence!!!!! Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   Si $x \in [n; n+1[$ alors $h(x) = n + (x-n)^2$ et est continue pour tout $x_0 \in [n; n+1[$
   Le problème se pose essentiellement en $x_0 = n$ où $n \in \mathbb{N}^*$; nous allons étudier h à droite et à gauche de n

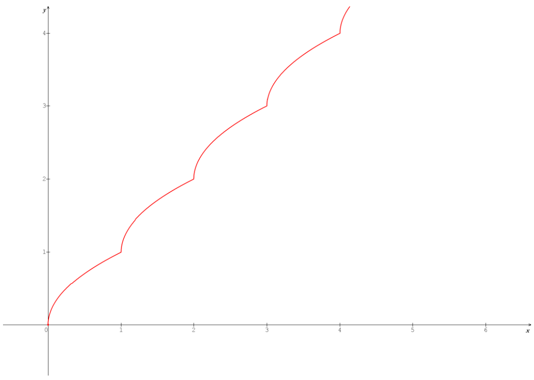

FIGURE 3.36 – Le graphe de $g(x) = [x] + \sqrt{x - [x]}$

- ▷ Si $x \geqslant n$, c'est à dire si $x \in [n; n+1[$ et donc, comme $h(x) = n + (x-n)^2$, $\lim\limits_{\substack{x \to n \\ x > n}} h(x) = n = h(n)$.
  h est donc continue à droite de n
- ▷ Maintenant, si $x < n$, c'est à dire si $x \in [n-1; n[$ alors $h(x) = n - 1 + (x-n+1)^2$, $\lim\limits_{\substack{x \to n \\ x < n}} h(x) = n = h(n)$.
  h est donc continue à gauche de n

h est donc continue en $x = n$

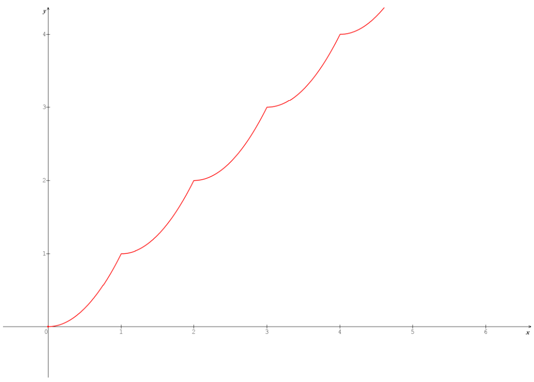

FIGURE 3.37 – Le graphe de $h(x) = [x] + (x - [x])^2$

Exercice 37 :

Soit f une fonction numérique d'une variable réelle définie sur l'intervalle ouvert $]-1; +1[$

1. *On suppose qu'il existe un nombre $k \geqslant 0$ tel que, pour tout $x \in]-1; +1[\setminus \{0\}$ nous ayons $|f(x)| \leqslant k|x|$. Quelle valeur faut-il donner à $f(0)$ pour que f soit continue sur $]-1; +1[$?*

   C'est très simple ; comme, pour tout $x \in]-1; +1[\setminus \{0\}$, nous avons $|f(x)| \leqslant k|x|$ et comme $\lim\limits_{x \to 0} |x| = 0$, nous avons $\lim\limits_{x \to 0} |f(x)| = 0$, c'est à dire $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.
   Pour que f soit continue sur $]-1; +1[$, il faut que $f(0) = 0$
2. *Plus généralement, on suppose qu'il existe 2 fonctions g et h définies et continues sur l'intervalle $]-1; +1[$ et vérifiant :*
   — $h(0) = g(0)$
   — Et, pour tout $x \in]-1; +1[\setminus \{0\}$ nous avons $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$
   Quelle valeur faut-il donner à $f(0)$ pour que f soit continue sur $]-1; +1[$?

De l'inégalité $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$ vraie pour tout $x \in]-1;+1[\setminus \{0\}$, nous tirons :

$$0 \leqslant f(x) - g(x) \leqslant h(x) - g(x)$$

Comme g et h sont continues sur $]-1;+1[$, nous avons $\lim\limits_{x \to 0} (h(x) - g(x)) = h(0) - g(0) = 0$, et donc, par encadrement, $\lim\limits_{x \to 0} (f(x) - g(x)) = 0$.
Ainsi, pour que f soit continue sur $]-1;+1[$, il faut que $f(0) = g(0) = h(0)$

Exercice 38 :

On considère la fonction f définie par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \left\{\begin{array}{l} x^2 \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ x \text{ si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Montrer que f n'est pas continue pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
$\mathbb{Q}$ étant dense dans $\mathbb{R}$, il existe une suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de rationnels tels que $\lim\limits_{n \to +\infty} r_n = x$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $f(r_n) = r_n^2$
Si f est continue, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} f(r_n) = f(x) \Longleftrightarrow x^2 = f(x)$, c'est à dire, si f est continue, $x^2 = x$, ce qui est impossible, sauf si $x = 0$ ou $x = 1$
f n'est donc pas continue pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Exercice 39 :

La fonction de Thomae est ainsi définie :

$$\left\{\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{q} \text{ si } x \in \mathbb{Q}^* \text{ et } x = \dfrac{p}{q} \text{ avec } p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^* \text{ et } \operatorname{pgcd}(p,q) = 1 \\ 1 \text{ si } x = 00 \text{ si } x \notin \mathbb{Q} \end{array}\right. \end{array}\right.$$

1. *Montrer que f est périodique et de période 1*
   - ▷ Si $x \notin \mathbb{Q}$, alors, nous avons aussi $x + 1 \notin \mathbb{Q}$, et donc $f(x) = f(x+1) = 0$
   - ▷ Si $x \in \mathbb{Q}$, alors $x = \dfrac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$ et $\operatorname{pgcd}(p,q) = 1$. Donc $f(x) = \dfrac{1}{q}$

     Or, $x + 1 = \dfrac{p}{q} + 1 = \dfrac{p+q}{q}$. Si, $\operatorname{pgcd}(p,q) = 1$, alors $\operatorname{pgcd}(p+1,q) = 1$ [7] et donc

$$f(x+1) = \frac{1}{q} = f(x)$$

   f est bien périodique et de période 1
2. *Montrer que f n'est pas continue sur $\mathbb{Q}$*

   De la périodicité de f, nous allons étudier la continuité de f sur $[0;1] \cap \mathbb{Q}$
   On utilise le fait que si $\mathbb{Q}$ est dense dans $[0;1]$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est aussi dense dans $[0;1]$.
   - ▷ Si $x \in \mathbb{Q}$, $f(x) = \dfrac{1}{q}$ avec $\dfrac{1}{q} > 0$

     Il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x$ et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x_n) = 0$, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut donc converger vers $f(x)$.
     f est donc discontinue si $x \in \mathbb{Q}$

7. Revoir le cours d'arithmétique

- ▷ Si $x = 0$, alors $f(x) = 1$. De la même manière, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$ et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x_n) = 0$, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut donc converger vers 1.
  f n'est donc pas continue en $x = 0$

Donc, de manière générale f n'est pas continue sur $\mathbb{Q}$

3. *Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$*

Nous travaillons toujours sur l'intervalle $[0;1]$
Soit $x_0 \in [0;1]\setminus\mathbb{Q}$, alors $f(x_0) = 0$.
Soit $\varepsilon > 0$.
Nous appelons S_ε l'ensemble suivant :

$$S_\varepsilon = \left\{ r \in \mathbb{Q} \text{ tels que } r \in [0;1]\ ,\ r = \frac{p}{q} \text{ avec } \operatorname{pgcd}(p,q) = 1\ ,\ q \in \left\{1, 2, \cdots, \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]\right\} \text{ et } |r - x_0| \leqslant 1 \right\}$$

$\mathbb{Q}$ est dénombrable et S_ε est fini.
S_ε étant fini, il existe $\delta > 0$ tel que $]x_0 - \delta; x_0 + \delta[\, \cap S_\varepsilon = \emptyset$

- ▷ Soit $y \in\,]x_0 - \delta; x_0 + \delta[\, \setminus \mathbb{Q}$; alors $f(y) = 0$ et $|f(y) - f(x_0)| = 0$
  Ainsi, dans ce cas, si $|y - x_0| < \delta$ alors $|f(y) - f(x_0)| < \varepsilon$
- ▷ Soit maintenant, $y \in\,]x_0 - \delta; x_0 + \delta[\, \cap \mathbb{Q}$, c'est à dire $y = \dfrac{p}{q}$ avec $\operatorname{pgcd}(p,q) = 1$.
  Comme $]x_0 - \delta; x_0 + \delta[\, \cap S_\varepsilon = \emptyset$, nous avons $q > \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$, c'est à dire $q \geqslant \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1 > \dfrac{1}{\varepsilon}$, et donc, $q > \dfrac{1}{\varepsilon} \Longleftrightarrow \dfrac{1}{q} < \varepsilon$
  Nous avons, alors $|f(y) - f(x_0)| = \dfrac{1}{q}$
  Dans notre cas, si $|y - x_0| < \delta$ alors $|f(y) - f(x_0)| = \dfrac{1}{q} < \varepsilon$

Nous venons donc de montrer que f est continue sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

Exercice 40 :

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$. Montrer que f est continue si et seulement si l'image réciproque de tout fermé est un fermé.

Pour ne pas confondre avec l'adhérence d'ensembles, pour tout ensemble E et tout sous-ensemble $X \subset E$, X^C est le complémentaire de X dans E

1. Nous allons démontrer le résultat auxilaire suivant :
   Pour toute application $f : E \longrightarrow F$ et tout sous ensemble $X \subset F$, nous avons
   $$f^{-1}\left(X^C\right) = \left(f^{-1}(X)\right)^C$$
   — Soit $x \in f^{-1}\left(X^C\right)$; alors $f(x) \in X^C$, c'est à dire
   $$f(x) \notin X \Longleftrightarrow x \notin f^{-1}(X) \Longleftrightarrow x \in \left(f^{-1}(X)\right)^C$$
   Dnc, si $x \in f^{-1}\left(X^C\right)$ alors $x \in \left(f^{-1}(X)\right)^C$ et nous avons $f^{-1}\left(X^C\right) \subset \left(f^{-1}(X)\right)^C$
   — Réciproquement, supposons $x \in \left(f^{-1}(X)\right)^C$. Nous avons alors $x \notin f^{-1}(X)$ c'est à dire $f(x) \notin X$, donc $f(x) \in X^C$ et $x \in f^{-1}\left(X^C\right)$
   Ainsi, si $x \in \left(f^{-1}(X)\right)^C$, alors $x \in f^{-1}\left(X^C\right)$. Donc $\left(f^{-1}(X)\right)^C \subset f^{-1}\left(X^C\right)$
   En conclusion, $f^{-1}\left(X^C\right) = \left(f^{-1}(X)\right)^C$
2. Supposons f continue sur $\mathbb{R}$
   Soit $F \subset \mathbb{K}$ un fermé de $\mathbb{K}$; alors F^C est un ouvert de $\mathbb{K}$, et comme f est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$, $f^{-1}\left(F^C\right)$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.
   Or, $f^{-1}\left(F^C\right) = \left(f^{-1}(F)\right)^C$, donc, $\left(f^{-1}(F)\right)^C$ est un ouvert, ce qui montre que $f^{-1}(F)$ est un fermé de $\mathbb{R}$

3. Réciproquement, supposons que l'image réciproque de tout fermé de $\mathbb{K}$ est un fermé de $\mathbb{R}$
   Montrons que f est continue
   Soit O un ouvert de $\mathbb{K}$; alors, O^C est un fermé de $\mathbb{K}$ et donc $f^{-1}\left(O^C\right)$ est un fermé de $\mathbb{R}$.
   Comme $f^{-1}\left(O^C\right) = \left(f^{-1}(O)\right)^C$, $f^{-1}(O)$ est un ouvert de $\mathbb{R}$, et f est donc continue sur $\mathbb{R}$

Nous venons donc de démontrer l'équivalence demandée.

- $\triangleright$ Cette démonstration peut se transposer dans n'importe quel espace topologique
- $\triangleright$ Si la théorie de la continuité s'appuie sur les ouverts, elle aurait très bien pu le faire sur les fermés.

Exercice 41 :

Dans tout cet exercice, f est une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$

1. *Soit $A \subset \mathbb{R}$, une partie de $\mathbb{R}$. Montrer que si x est un point adhérent à A (c'est à dire $x \in \overline{A}$) alors $f(x)$ est adhérent à $f(A)$*

   Soit $x \in \overline{A}$. Il existe alors une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A *(c'est à dire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in A$)* tels que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$.
   Par continuité de f, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x)$; or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $f(x_n) \in f(A)$. Il existe donc une suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $f(A)$ tels que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x)$, et donc $f(x) \in \overline{f(A)}$, c'est à dire que $f(x)$ est adhérent à $f(A)$
2. *Démontrer que, pour toute partie $A \subset \mathbb{R}$, nous avons $f\left(\overline{A}\right) \subset \overline{f(A)}$*

   Soit $y \in f\left(\overline{A}\right)$. Il existe donc $x \in \overline{A}$ tel que $y = f(x)$. Comme $x \in \overline{A}$, il existe alors une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A tels que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$.
   Par continuité de f, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x) = y$; or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $f(x_n) \in f(A)$. Il existe donc une suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $f(A)$ tels que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = y$, et donc $y \in \overline{f(A)}$, c'est à dire que $f\left(\overline{A}\right) \subset \overline{f(A)}$

Exercice 42 :

Exercice 43 :

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, nous notons φ_n l'application :

$$\begin{cases} \varphi_n : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \quad x & \longmapsto & \varphi_n(x) = \begin{cases} -n & \text{si } x \leqslant -n \\ x & \text{si } -n \leqslant x \leqslant n \\ +n & \text{si } x \geqslant +n \end{cases} \end{cases}$$

Démontrer que, pour toute application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, f est continue siet seulement si $\varphi_n \circ f$ est continue

Rigoureusement, voilà un exercice qui ne porte pas très haut!!!...Admettons que ce soit un exercice d'entraînement

1. Pour commencer, φ_n est trivialement continue sur $\mathbb{R}$
2. Ensuite, si f est continue, par le théorème de composition des fonctions, $\varphi_n \circ f$ est continue
3. Maintenant, supposons que $\varphi_n \circ f$ soit continue et démontrons que f est continue.
   Soit $]a;b[\subset \mathbb{R}$ un ouvert de $\mathbb{R}$, et nous allons montrer que $f^{-1}(]a;b[)$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.
   Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $]a;b[\subset [-n_0;n_0]$ *(Il suffit de choisir $n_0 \geqslant \max\{|a|;|b|\}$)* et alors, $f^{-1}(]a;b[) = (\varphi_n \circ f)^{-1}(]a;b[)$.
   $\varphi_n \circ f$ étant continue, $(\varphi_n \circ f)^{-1}(]a;b[)$ est un ouvet de $\mathbb{R}$; donc $f^{-1}(]a;b[)$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.
   Donc, f est continue sur $\mathbb{R}$

Exercice 44 :

1. *Ecrire la négation de la définition de fonction uniformément continue.*

   C'est une classique question de logique élémentaire.

$$(\exists \varepsilon > 0)\,(\forall \eta > 0)\,(\exists x \in I)\,(\exists y \in I)\,(|x-y| < \eta \text{ et } |f(x) - f(y)| \geqslant \varepsilon)$$

2. *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) = x^2$. Montrer que f n'est pas uniformément continue sur $[0; +\infty[$*

   Le problème se pose en $+\infty$. Soit $\varepsilon = 1$ et $\alpha > 0$ quelconque. On peut donc trouver $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n} < \alpha$.

   En posant $x_n = n + \frac{1}{n}$ et $y_n = n$, nous avons $|x_n - y_n| = \frac{1}{n} < \alpha$ et

$$\left|x_n^2 - y_n^2\right| = \left|n^2 - \left(n + \frac{1}{n}\right)^2\right| = 2 + \frac{1}{n^2} > 1$$

   Il existe donc $\varepsilon = 1$ tel que, pour tout $\alpha > 0$, il existe $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ tel que $|x - y| < \alpha$ et $|f(x) - f(y)| \geqslant \varepsilon$

3. *Démontrer que, par contre, $f(x) = x^2$ est uniformément continue sur tout intervalle $[a, b]$ où $a < b$*

   Pour tout $x \in [a, b]$ et tout $y \in [a, b]$, nous avons :

$$\left|x^2 - y^2\right| = |x + y| \times |x - y| \leqslant (|x| + |y|) \times |x - y|$$

   Comme nous avons $a \leqslant x \leqslant b$, nous avons $|x| \leqslant \max(|a|, |b|)$.
   De même,$|y| \leqslant \max(|a|, |b|)$, et donc,$\left|x^2 - y^2\right| \leqslant 2\max(|a|, |b|) \times |x - y|$
   Soit donc $\varepsilon > 0$. Il existe donc $\eta_\varepsilon > 0$, choisi comme $\eta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2\max(|a|, |b|)}$, tels que si $|x - y| < \eta_\varepsilon$, nous avons $\left|x^2 - y^2\right| \leqslant 2\max(|a|, |b|) \times \frac{\varepsilon}{2\max(|a|, |b|)} = \varepsilon$

Exercice 44 :

Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$ n'est pas uniformément continue sur l'intervalle ouvert $]0, 1]$

Soit $\varepsilon = \frac{1}{2}$; pour $\alpha > 0$, il est possible de trouver $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n} < \alpha$. En posant $x_n = \frac{1}{2n}$ et $y_n \frac{1}{n}$, nous avons : $|x_n - y_n| = \left|\frac{1}{2n} - \frac{1}{n}\right| = \frac{1}{2n} < \alpha$ et $|f(x_n) - f(y_n)| = n > \frac{1}{2}$
Il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $\alpha > 0$, il existe $x \in]0, 1]$ et $y \in]0, 1]$ tels que $|x - y| < \alpha$ et $|f(x) - f(y)| \geqslant \varepsilon$

Exercice 45 :

1. *Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ et tout $y \in \mathbb{R}^+$, nous avons $\left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| \leqslant \sqrt{|x - y|}$*

   Supposons, dans un premier temps $y \geqslant x \geqslant 0$. Nous allons montrer que $\sqrt{y} - \sqrt{x} \leqslant \sqrt{y - x}$
   — Nous avons dans un premier temps, $\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 = x + y - 2\sqrt{xy}$
   — Dans un second temps, $x + y - 2\sqrt{xy} - (y - x) = 2x - 2\sqrt{xy} = 2\sqrt{x}\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right) \leqslant 0$
   — Ce qui montre que $\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 \leqslant y - x$, c'est à dire $\sqrt{y} - \sqrt{x} \leqslant \sqrt{y - x}$
   De la même manière, si $x \geqslant y \geqslant 0$, nous aurions $\sqrt{x} - \sqrt{y} \leqslant \sqrt{x - y}$
   Donc, en synthèse, , pour tout $x \geqslant 0$ et tout $y \geqslant 0$, nous avons $\left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| \leqslant \sqrt{|x - y|}$

2. *Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$*

   Soit $\varepsilon > 0$. En posant $\eta_\varepsilon = \varepsilon^2$, pour tout $x \geqslant 0$ et tout $y \geqslant 0$ tels que $|x - y| < \eta_\varepsilon$, nous avons $\left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| \leqslant \sqrt{|x - y|} \leqslant \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon$
   Donc, $f(x) = \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$

Exercice 46 :

Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \ln x$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}^{+*}$

Soit $\varepsilon = 1$; pour $\alpha > 0$, il est possible de trouver $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{1}{n} < \alpha$. En posant $x_n = \dfrac{1}{n}$ et $y_n \dfrac{1}{3n}$, nous avons : $|x_n - y_n| = \left|\dfrac{1}{3n} - \dfrac{1}{n}\right| = \dfrac{2}{3n} < \alpha$.
D'autre part, $|f(x_n) - f(y_n)| = |\ln x_n - \ln y_n| = \left|\ln \dfrac{x_n}{y_n}\right| = \ln 3 > 1$
Il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $\alpha > 0$, il existe $x \in \mathbb{R}^{+*}$ et $y \in \mathbb{R}^{+*}$ tels que $|x - y| < \alpha$ et $|f(x) - f(y)| \geqslant \varepsilon$
$\ln x$ n'est donc pas uniformément continue sur $\mathbb{R}^{+*}$

Exercice 47 :

La fonction $\sin \dfrac{1}{x}$ est-elle uniformément continue sur $]0, 1]$?

Cet exercice est la répétition (volontaire) de celui qui le précède.
Si nous choisissons $x_n = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$, et $y_n = \dfrac{1}{\frac{-\pi}{2} + 2n\pi}$ alors $\sin \dfrac{1}{x_n} = 1$ et $\sin \dfrac{1}{y_n} = -1$, de telle sorte que $\left|\sin \dfrac{1}{x_n} - \sin \sin \dfrac{1}{y_n}\right| = 2$ et que cette différence ne pourra jamais être rendue aussi petite que l'on souhaite.
D'autre part, $|x_n - y_n| = \dfrac{4}{\pi} \times \dfrac{1}{16n^2 - 1}$ *(Calculs élémentaires)* et donc, pour tout $\alpha > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{4}{\pi} \times \dfrac{1}{16n^2 - 1} < \alpha$
Ainsi, pour $\varepsilon = 1$, pour tout $\alpha > 0$, il existe $x \in]0, 1]$ et $y \in]0, 1]$ tels que $|x - y| < \alpha$ et $\left|\sin \dfrac{1}{x} - \sin \dfrac{1}{y}\right| = 2 > 1$

Exercice 48 :

Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$. Montrer qu'il existe $a > 0$, $b > 0$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leqslant ax + b$

Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$. Alors,
pour $\varepsilon = 1$, il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ et tout $y \in \mathbb{R}^+$, nous ayons l'implication

$$|x - y| \leqslant \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant 1$$

Soit $x > 0$. On subdivise le segment $[0, x]$ en sous-segments de longueur α. Soit donc $n = \left[\dfrac{x}{\alpha}\right]$. Nous avons :

$$\begin{array}{rl}
|f(0) - f(\alpha)| & \leqslant 1 \\
|f(\alpha) - f(2\alpha)| & \leqslant 1 \\
|f(2\alpha) - f(3\alpha)| & \leqslant 1 \\
\vdots & \vdots \\
|f((n-1)\alpha) - f(n\alpha)| & \leqslant 1
\end{array}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(0)| = & \quad |(f(x) - f(n\alpha)) + (f(n\alpha) - f((n-1)\alpha)) + \cdots + (f(2\alpha) - f(\alpha)) + (f(\alpha) - f(0))| \\
\leqslant & \quad |f(x) - f(n\alpha)| + \sum_{k=0}^{n-1} |f(k\alpha) - f((k+1)\alpha)| \\
\leqslant & \quad 1 + \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n + 1
\end{aligned}$$

En résumé, nous venons de prouver que, pour tout $x > 0$, $|f(x) - f(0)| \leqslant n + 1$

En utilisant l'inégalité vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}$ $||x| - |y|| \leqslant |x - y|$ qui implique que $|x| \leqslant |x - y| + |y|$, nous avons :

$$|f(x)| \leqslant |f(x) - f(0)| + |f(0)| \leqslant n + 1 + |f(0)|$$

Or, $n + 1 + |f(0)| = \left[\dfrac{x}{\alpha}\right] + 1 + |f(0)| \leqslant \dfrac{x}{\alpha} + 1 + |f(0)|$

En posant $a = \dfrac{1}{\alpha}$ et $b = 1 + |f(0)|$, nous avons le résultat

Exercice 49 :

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}$:

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

On appelle, pour simplifier, $a = f(1)$.

1. *Donner $f(0)$; en déduire que f est une fonction impaire*

   En fait, f est un homomorphisme du groupe additif $(\mathbb{R}, +)$ dans le groupe additif $(\mathbb{K}, +)$. Aussi :
   - ▷ L'image de l'ément neutre de $(\mathbb{R}, +)$ est l'élément neutre de $(\mathbb{K}, +)$, et donc $f(0) = 0$
   - ▷ L'image du symétrique de x est le symétrique de l'image, et donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = -f(x)$

2. *Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, $f(nx) = nf(x)$*

   Soit $x \in \mathbb{R}$
   - ▷ Pour $n \in \mathbb{N}$, nous allons démontrer, par récurrence sur n que $f(nx) = nf(x)$

     C'est vrai pour $n = 0$ En effet, $f(0 \times x) = 0 = 0 \times f(x)$

     Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, $f(nx) = nf(x)$

     Démontrons à l'ordre $n + 1$

     $$f((n+1)x) = f(nx + x) = f(nx) + f(x) = nf(x) + f(x) = (n+1) f(x)$$

     Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(nx) = nf(x)$
   - ▷ Si n est un entier négatif, c'est à dire si $n \in \mathbb{Z}^-$, alors $f(nx) = f((-n) \times -x) = (-n) f(-x)$ car $-n \in \mathbb{N}$.

     f étant impaire, $f(-x) = -f(x)$ et donc $(-n) f(-x) = nf(x)$.

     Ce que nous voulions

   Donc, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $f(nx) = nf(x)$

3. *En déduire que :*

   (a) *Pour tout entier $q > 0$, $f\left(\dfrac{1}{q}\right) = \dfrac{a}{q}$*

   Soit q, entier, tel que $q > 0$.

   Alors : $f(1) = f\left(q \times \dfrac{1}{q}\right) = qf\left(\dfrac{1}{q}\right)$

   Donc $a = qf\left(\dfrac{1}{q}\right) \Longleftrightarrow f\left(\dfrac{1}{q}\right) = \dfrac{a}{q}$

   (b) *Pour tout rationnel $r \in \mathbb{Q}$, $f(r) = ar$*

   Soit $r \in \mathbb{Q}$; alors $r = \dfrac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q > 0$.

   Donc

   $$f(r) = f\left(\frac{p}{q}\right) = f\left(p \times \frac{1}{q}\right) = p \times f\left(\frac{1}{q}\right) = p \times \frac{a}{q} = a \times \frac{p}{q} = ar$$

(c) *Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax$*

Soit $x \in \mathbb{R}$.
$\mathbb{Q}$ étant dense dans $\mathbb{R}$, il existe une suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de rationnels tels que $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = x$
f étant une fonction continue sur $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(r_n) = f(x)$, c'est à dire $\lim\limits_{n\to+\infty} ar_n = f(x)$.
Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} ar_n = a \lim\limits_{n\to+\infty} r_n = ax$, et donc $f(x) = ax$

On pourrait conclure que le seul homomorphisme f du groupe additif $(\mathbb{R}, +)$ dans le groupe additif $(\mathbb{K}, +)$ qui soit continu est du type $f(x) = ax$ avec $a \in \mathbb{K}$

Exercice 50 :

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}$:

$$f(x-y) = f(x) - f(y)$$

Comme tout à l'heure, on appelle, pour simplifier, $a = f(1)$.

1. *Donner $f(0)$; en déduire que f est une fonction impaire*

   Très simple :
   - ▷ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(0) = f(x-x) = f(x) - f(x) = 0$, et donc $f(0) = 0$
   - ▷ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = f(0-x) = f(0) - f(x) = 0 - f(x)$, et donc $f(-x) = -f(x)$ et f est donc impaire

2. *Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, $f(nx) = nf(x)$*

   Nous allons utiliser l'imparité de f.
   - ▷ Nous commençons par le démontrer pour $n \in \mathbb{N}$, et nous allons le faire par récurrence :

     C'est vrai pour $n = 0$ En effet, $f(0 \times x) = f(0) = 0 = 0 \times f(x)$

     Supposons que la propriété vraie jusque l'ordre n

     Démontrons qu'elle est vraie à l'ordre $n+1$ Nous avons :

     $$f(nx) = f((n+1)x - x) = f((n+1)x) - f(x)$$

     C'est à dire que nous avons :

     $$f(nx) = nf(x) = f((n+1)x) - f(x) \Longleftrightarrow f((n+1)x) = nf(x) + f(x) = (n+1)f(x)$$

     Ce que nous voulions

     Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $f(nx) = nf(x)$
   - ▷ Maintenant, si n est un entier négatif, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $n = -n_1$. Ainsi :

     $$f(nx) = f((-n_1)x) = f(n_1(-x)) = n_1 f(-x) = -n_1 f(x) = nf(x)$$

   Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, nous avons $f(nx) = nf(x)$

3. *En déduire que pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax$*

   La démonstration est semblable à l'exercice précédent :
   - ▷ On démontre que pour tout entier $q > 0$, $f\left(\dfrac{1}{q}\right) = \dfrac{a}{q}$
   - ▷ Puis, que pour tout rationnel $r \in \mathbb{Q}$, $f(r) = ar$
   - ▷ Et pour terminer, que pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax$

Exercice 51 :

1. *Nous appelons $\mathcal{A}_1$, l'ensemble des fonctions continues $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}$ telles que :*

   $$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(\forall \lambda \in \mathbb{R})(f(\lambda x + (1-\lambda)y) = \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y))$$

(a) *Montrer que $\mathcal{A}_1$, muni de l'addition des fonctions est un groupe abélien*

C'est très simple!! Nous allons démontrer que $\mathcal{A}_1$ est un sous groupe additif du groupe des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$

- ▷ Premièrement, $\mathcal{A}_1 \neq \emptyset$ puisque la fonction nulle $\mathcal{O}_{\mathbb{R}}$ est bien un élément de $\mathcal{A}_1$
- ▷ Soient $f \in \mathcal{A}_1$ et $g \in \mathcal{A}_1$. Alors, pour $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}(f-g)(\lambda x+(1-\lambda)y) &= f(\lambda x+(1-\lambda)y) - g(\lambda x+(1-\lambda)y)\\ &= \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)-\lambda g(x)-(1-\lambda)g(y)\\ &= \lambda f(x)-\lambda g(x)+(1-\lambda)f(y)-(1-\lambda)g(y)\\ &= \lambda(f(x)-g(x))+(1-\lambda)(f(y)-g(y))\\ &= \lambda(f-g)(x)+(1-\lambda)(f-g)(y)\end{aligned}$$

Donc, $f-g \in \mathcal{A}_1$

Ainsi, $\mathcal{A}_1$, muni de l'addition des fonctions est un groupe abélien

(b) *Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$ et $f(x) = f(y) = 0$. Démontrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = 0$, c'est à dire que f est la fonction nulle sur $\mathbb{R}$*

Soit $t \in \mathbb{R}$; alors, il existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que $t = \lambda_0 x + (1-\lambda_0)y$ (il suffit de prendre $\lambda_0 = \dfrac{t-y}{x-y}$), et donc :

$$f(t) = f(\lambda_0 x+(1-\lambda_0)y) = \lambda_0 f(x)+(1-\lambda_0)f(y) = 0$$

Ainsi, f est bien la fonction nulle sur $\mathbb{R}$

(c) *Soit $h(x) = ax+b$. Démontrer que $h \in \mathcal{A}_1$*

Réponse simple : juste calculatoire!!

(d) *Soit $g \in \mathcal{A}_1$ et $f \in \mathcal{A}_1$ tel que $f(x) = g(x)+(g(0)-g(1))x-g(0)$. Démontrer que f est la fonction nulle sur $\mathbb{R}$*

Il suffit de vérifier que $f(0) = f(1) = 0$, et d'après la question ci-dessus, f est la fonction nulle sur $\mathbb{R}$

(e) *En déduire que les seuls éléments de $\mathcal{A}_1$ sont les applications affines du type $g(x) = ax+b$ avec $a \in \mathbb{K}$ et $b \in \mathbb{K}$*

Cette question est la réciproque de la question 1-c : l'ensemble des fonctions affine est inclus dans $\mathcal{A}_1$

Nous venons de montrer que si $g \in \mathcal{A}_1$, alors g est affine. Donc, les éléments de $\mathcal{A}_1$ sont les seules applications affines.

2. *Nous appelons $\mathcal{A}_2$, l'ensemble des fonctions continues $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}$ telles que :*

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(\forall \lambda \in [0;1])(f(\lambda x+(1-\lambda)y) = \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y))$$

(a) *Montrer que $\mathcal{A}_2$, muni de l'addition des fonctions est un groupe abélien*

Il n'y a rien à ajouter par rapport à la question 1-a

(b) *Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$ et $f(x) = f(y) = 0$. Démontrer que pour tout $t \in [x;y]$, $f(t) = 0$.*

Tout élément $t \in [x;y]$ s'écrit $t = \lambda x+(1-\lambda)y$ avec $\lambda \in [0;1]$. Donc,

$$f(t) = \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y) = 0$$

Donc, f est nulle sur l'intervalle $[x;y]$

(c) *Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout $t \in [x;y]$, $f(t+n(y-x)) = 0$* Nous allons le démontrer en 2 temps : le premier pour les entiers n positifs, c'est à dire tels que $n \in \mathbb{N}$, le second pour les entiers négatifs, c'est à dire les entiers n tels que $n \in \mathbb{Z}^-$

▷ **Nous allons démontrer, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que, pour tout $t \in [x;y]$ et tout k entier tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, nous avons** $f(t + k(y-x)) = 0$

C'est trivialement vrai pour $n = 0$

Supposons vraie la propriété jusque l'ordre n

Démontrons cette propriété à l'ordre $n+1$ Comme $y > x$, nous avons

$$(n-1)(y-x) < n(y-x) < (n+1)(y-x)$$

et donc

$$t + (n-1)(y-x) < t + n(y-x) < t + (n+1)(y-x)$$

Il existe donc $\lambda \in]0;1[$ tel que

$$t + n(y-x) = \lambda(t + (n-1)(y-x)) + (1-\lambda)(t + (n+1)(y-x))$$

Donc :

$$\begin{array}{rl} f(t + n(y-x)) = & \lambda f(t + (n-1)(y-x)) + (1-\lambda) f(t + (n+1)(y-x)) \\ 0 & 0 + (1-\lambda) f(t + (n+1)(y-x)) \end{array}$$

Et donc,$f(t + (n+1)(y-x)) = 0$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout $t \in [x;y]$, $f(t + n(y-x)) = 0$

▷ Soit, maintenant n entier négatif, c'est à dire $n \in \mathbb{Z}^-$. Il existe un entier $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $n = -n_1$.

Une récurrence semblable à celle que nous venons d'effectuer montrerait que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout tout $t \in [x;y]$, $f(t - n(y-x)) = 0$

Nous venons donc de démontrer que f est périodique et de période $y - x$

(d) *En déduire que f est nulle sur $\mathbb{R}$*

Nous avons $\mathbb{R} = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} [x + n(y-x); y + n(y-x)]$.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$; il existe $n_0 \in \mathbb{Z}$ tel que $\alpha \in [x + n_0(y-x); y + n_0(y-x)]$.

Il existe donc $\lambda \in [0;1]$ tel que $\alpha = \lambda(x + n_0(y-x)) + (1-\lambda)(y + n_0(y-x))$, et alors :

$$f(\alpha) = \lambda f(x + n_0(y-x)) + (1-\lambda) f(y + n_0(y-x)) = 0$$

par la périodicité de f. f est donc la fonction nulle sur $\mathbb{R}$

(e) *En déduire que les seuls éléments de $\mathcal{A}_2$ sont les applications affines du type $g(x) = ax + b$ avec $a \in \mathbb{K}$ et $b \in \mathbb{K}$*

Il suffit de recopier ce qui a été fait dans la question 1.

Exercice 52 :

Soit $f : [0;+1] \longrightarrow [0;+1]$, une fonction numérique d'une variable réelle, définie et continue sur $[0;+1]$ et à valeurs dans $[0;+1]$. On suppose que $f(0) = 0$ et que pour tout $x \in [0;+1]$ et tout $y \in [0;+1]$, nous avons $|f(x) - f(y)| \geqslant |x - y|$

1. *Soit $x \in [0;+1]$. On construit une suite numérique $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $x_0 = x$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ Montrer que cette suite est convergente.*

   Tout d'abord, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $x_n \in [0;+1]$ *(démonstration simple, par récurrence, en utiisant le fait que f est à valeurs dans $[0;+1]$)*

   ▷ Montrons que cette suite est croissante

   Toujours pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f(x_n) - f(0)| \geqslant |x_n - 0|$. De $f(0) = 0$ et de $x_{n+1} = f(x_n)$, nous avons $|x_{n+1}| \geqslant |x_n|$ et de $x_n \in [0;+1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous tirons $x_{n+1} \geqslant x_n$

   ▷ Cette suite est majorée

   En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in [0;+1]$, et donc, en particulier, $x_n \leqslant 1$

   ▷ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant une suite croissante et majorée est donc convergente

2. *On appelle l la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Démontrer que $f(l) = l$*

   Nous avons donc $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = l$. Comme f est continue, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(l)$.
   Comme $x_{n+1} = f(x_n)$, alors, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)$ et donc $l = f(l)$

3. *Déduire de tout ce qui précède que, pour tout $x \in [0;+1]$, $f(x) = x$*

   Soit $x \in [0;+1]$
   - De $|f(x) - f(y)| \geqslant |x - y|$, nous déduisons $|f(x) - f(0)| \geqslant |x - 0|$. Comme $f(0) = 0$, nous avons $|f(x)| \geqslant |x-|$, et comme $x \in [0;+1]$ et $f(x) \in [0;+1]$, nous avons $f(x) \geqslant x$
   - Démontrons que $f(x) \leqslant x$
     Supposons le contraire, c'est à dire $f(x) > x$
     On construit la suite numérique $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $x_0 = x$ et $x_{n+1} = f(x_n)$. Cette suite est croissante, majorée donc convergente et admet pour limite l telle que $f(l) = l$
     De $f(x) > x$ et $f(l) = l$, nous avons $f(l) - f(x) < l - x$
     De $x_0 = x$, nous avons $x_1 = f(x) \geqslant x_0 = x$ et $l \geqslant f(x)$ d'où :
     — $f(l) - f(x) = |f(l) - f(x)|$
     — $l - x = |l - x|$
     Il y a contradiction avec l'hypothèse faite sur f, à savoir que $|f(x) - f(y)| \geqslant |x - y|$ pour tout $x \in [0;+1]$ et tout $y \in [0;+1]$
     Et donc, $f(x) \leqslant x$
   - Donc, de $f(x) \leqslant x$ et $f(x) \geqslant x$, nous déduisons $f(x) = x$

   Ainsi, la fonction identité $f(x) = x$ est la seule fonction contininue sur $[0;+1]$ telle que pour tout $x \in [0;+1]$ et tout $y \in [0;+1]$, nous avons $|f(x) - f(y)| \geqslant |x - y|$

Exercice 53 :

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe un réel $0 < k < 1$ tel que pour tout nombre $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ nous ayions :

$$|f(x) - f(y)| \leqslant k\,|x - y|$$

Soita $\in \mathbb{R}$ et une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $x_0 = a$ et $x_{n+1} = f(x_n)$. Démontrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et que sa limite l vérifie $l = f(l)$

1. f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$, donc continue sur $\mathbb{R}$
2. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, donc convergente
   En effet, nous avons $|f(x_{n+1} - f(x_n))| \leqslant k\,|x_{n+1} - x_n|$ avec $0 < k < 1$, c'est à dire :
   $$|x_{n+2} - x_{n+1}| \leqslant k\,|x_{n+2} - x_{n+1}|$$
   Et nous avons démontré qu'un suite de ce type est une suite de Cauchy donc convergente dans $\mathbb{R}$
3. Soit l la limite de cette suite
   f étant continue, nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(l)$
   De $x_{n+1} = f(x_n)$, nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)$, c'est à dire $l = f(l)$

Cet exercice détermine un algorithme de résolution de l'équation $x = f(x)$, ou du moins d'une approximation de la solution de l'équation $x = f(x)$
QUESTION : *Que se passe-t-il si, au lieu d'être une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, nous avons une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$?*

Exercice 54 :

Soient $a \in \mathbb{R}^+$ un nombre réel positif et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels définie par :

$$u_0 = a \text{ et } u_{n+1} = 1 + \sqrt{u_n}$$

Démontrer que cette suite est convergente et calculer sa limite

1. Il nous est impossible d'avoir $a < 0$ puisque si $a < 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas définie à partir de $n = 1$
2. D'autre part, pour $n \geqslant 1$, nous avons $u_n \geqslant 1$ puisque $u_n = 1 + \sqrt{u_{n-1}} \geqslant 1$
3. Etudions les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

(a) Les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dépendent du signe de $u_{n+1} - u_n$. Nous avons : $u_{n+1} - u_n = 1 + \sqrt{u_n} - u_n$
Faisons le changement de variables $T = \sqrt{u_n}$. Nous avons alors $1 + \sqrt{u_n} - u_n = 1 + T - T^2$.
La factorisation de $-T^2 + T + 1$ est facile :

$$-T^2 + T + 1 = -\left(T - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(T - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = \left(T - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(-T - \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\right)$$

Et donc :

$$u_{n+1} - u_n = \left(\sqrt{u_n} - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(-\sqrt{u_n} - \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\right)$$

Comme nous avons $-\sqrt{u_n} - \left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) < 0$, le signe de $u_{n+1} - u_n$ ne dépend que du signe de $\sqrt{u_n} - \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Ainsi :

▷ Si $\sqrt{u_n} - \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \geqslant 0$, alors la suite est décroissante.
Or, $\sqrt{u_n} - \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \geqslant 0 \iff \sqrt{u_n} \geqslant \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \iff u_n \geqslant \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

▷ Si $\sqrt{u_n} - \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \leqslant 0$, alors la suite est croissante
De même, $\sqrt{u_n} - \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \leqslant 0 \iff \sqrt{u_n} \leqslant \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \iff u_n \leqslant \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

Posons $(T_0)^2 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$; d'après l'étude ci-dessus, nous avons $(T_0)^2 = 1 + T_0$

(b) Démontrons que si $a \leqslant \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$, alors , pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $u_n \leqslant \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$
Nous le faisons par récurrence.
C'est évidemment vrai pour $n = 0$
Supposons qu'au rang n**, nous ayions** $u_n \leqslant \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$
Démontrons le à l'ordre $n + 1$ Nous avons :

$$u_{n+1} = 1 + \sqrt{u_n} \leqslant 1 + \sqrt{u_n} \leqslant 1 + \sqrt{(T_0)^2} = 1 + T_0 = (T_0)^2$$

Et donc, $u_{n+1} \leqslant (T_0)^2 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$
Ce que nous voulions

Donc, si $a \leqslant \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$, alors , pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $u_n \leqslant \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$
Ainsi, nous démontrons que si $a \leqslant \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ et est donc convergente.

(c) Démontrons que si $a \geqslant \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $u_n \geqslant \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$
La démonstration de ce résultat est donc la jumelle de la démonstration ci-dessus. Ainsi, si $a \geqslant \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$, alors , pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $u_n \geqslant \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

Ainsi, nous démontrons que si $a \geqslant \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ et est donc convergente.

4. Soit l la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Considérons la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = 1+\sqrt{x}$. Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}^+$ et nous avons $u_{n+1} = f(u_n)$. f étant continue, nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(l)$.
D'autre part, de la définition de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la limite l vérifie l'équation $l = f(l)$.
Résolvons l'équation $x = 1+\sqrt{x}$.

$$\begin{aligned} x = 1+\sqrt{x} &\iff x-1 = \sqrt{x} \\ &\iff (x-1)^2 = x \text{ et } x > 0 \\ &\iff x^2 - 3x + 1 = 0 \text{ et } x > 0 \end{aligned}$$

Les solutions de l'équation $x^2 - 3x + 1 = 0$ sont $x_1 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ qui, toutes deux sont positives.
La limite l est donc l'une des deux valeurs x_1 ou x_2. Or, nous avons montré que, pour tout $n \geqslant 1$, nous avons $u_n \geqslant 1$, et donc, en utilisant les relations d'ordre et limites, nous avons $l \geqslant 1$.
Seule $x_2 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} = (T_0)^2$ est supérieure à 1.
Donc, $l = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

Exercice 55 :

Soit $a \in \mathbb{R}^*$ un nombre réel non nul et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels définie par :

$$u_0 = a \text{ et } u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n} - 1$$

Etudier la convergence de cette suite et calculer son éventuelle limite

1. **Supposons** $a < 0$
   (a) Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $u_n < 0$
   La démonstration se fait par une récurrence simple
   (b) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante
   En effet, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{u_n} - 1$. Comme $u_n < 0$, alors $\dfrac{1}{u_n} - 1 < 0$ et donc $u_{n+1} - u_n < 0$, ce qui montre que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante
   (c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $u_n \leqslant -n$
   ▷ Commençons par les premiers termes :
   — $u_1 - (-1) = u_1 + 1 = a + \dfrac{1}{a} < 0$ et donc $u_1 \leqslant -1$
   — $u_2 - (-2) = u_2 + 2 = u_1 + \dfrac{1}{u_1} + 1$. Nous avons $u_1 + 1 \leqslant 0$ et $\dfrac{1}{u_1} < 0$ et donc $u_2 - (-2) \leqslant 0$.
   Ainsi, $u_2 \leqslant -2$
   ▷ Supposons qu'à l'ordre n, nous ayions $u_n \leqslant -n$
   ▷ Démontrons le à l'ordre $n+1$

$$u_{n+1} - (-n-1) = u_{n+1} + n + 1 = u_n + \frac{1}{u_n} - 1 + n + 1 = u_n + n + \frac{1}{u_n}$$

   Par hypothèse de récurrence, $u_n + n \leqslant 0$ et, comme $u_n \leqslant 0$, nous avons $\dfrac{1}{u_n} \leqslant 0$ et donc $u_{n+1} - (-n-1) \leqslant 0$, c'est à dire $u_{n+1} \leqslant -n-1$

Donc, si $a < 0$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant -n$

(d) De l'inégalité $u_n \leqslant -n$, nous tirons que si $a < 0$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

2. **Supposons** $a > 0$

(a) Etudions la différence $u_{n+1} - u_n$.

Nous avons : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{u_n} - 1$, montrant ainsi la valeur importante qu'est 1

(b) Montrons que si $a > 0$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $u_n > 0$

Nous allons faire cette démonstration par récurrence.

- ▷ C'est trivialement vrai pour $n = 0$
- ▷ Supposons donc que si $a > 0$, alors $u_n > 0$
- ▷ Démontrons le à l'ordre $n + 1$

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n} - 1 = \frac{u_n^2 + 1 - u_n}{u_n} = \frac{\left(u_n - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}{u_n}$$

On remarque que $\left(u_n - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}$ est une expression positive et que le signe de u_{n+1} ne dépend que de celui de u_n, lequel est positif, par hypothèse de récurrence.

Donc, $u_{n+1} > 0$

Ainsi, si $a > 0$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $u_n > 0$

(c) Démontrons que si $a > 0$, alors pour $n \geqslant 1$ $u_n \geqslant 1$

En effet, nous devons regarder à partir de $n = 1$, puisque a peut prendre n'importe quelle valeur strictement positive.

Pour $n \geqslant 0$, $u_{n+1} - 1 = u_n + \dfrac{1}{u_n} - 1 - 1 = u_n + \dfrac{1}{u_n} - 2 = \dfrac{u_n^2 + 1 - 2u_n}{u_n} = \dfrac{(u_n - 1)^2}{u_n}$

Or, $\dfrac{(u_n - 1)^2}{u_n} \geqslant 0$ et donc $u_{n+1} - 1 \geqslant 0$, c'est à dire $u_{n+1} \geqslant 1$

(d) Si $a > 0$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc décroissante à partir de $n = 1$

En effet, de $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{u_n} - 1$, nous tirons $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ puisque $\dfrac{1}{u_n} \leqslant 1$. Ainsi $u_{n+1} \leqslant u_n$ et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante à partir de $n = 1$

(e) Si $a > 0$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente

En effet, elle est décroissante et minorée par 1 ; donc convergente

(f) La fonction $f(x) = x + \dfrac{1}{x} - 1$ est continue sur $\mathbb{R}^{*+}$ et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admettant pour définition $u_{n+1} = f(u_n)$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant convegente, sa limite l vérifie $l = f(l)$.

Résolvons donc l'équation $x = f(x)$ avec $x > 0$

$$x = f(x) \Longleftrightarrow x = x + \frac{1}{x} - 1 \Longleftrightarrow \frac{1}{x} - 1 = 0 \Longleftrightarrow x = 1$$

La seule limite possible est donc $l = +1$

3. **Conclusion :**

- ⊗ Si $a < 0$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$
- ⊗ Si $a > 0$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$

3.9.3 Fonctions continues sur un intervalle

Exercice 58 :

Soient a et b 2 nombres réels tels que $a < b$. Soit f une fonction uniformément continue sur $]a; b[$. Démontrer qu'il est possible de prolonger f en une fonction $\tilde{f}$ continue sur $[a; b]$. En déduire qu'elle est bornée sur $]a; b[$

1. **Nous allons montrer que f admet une limite à droite de a notée l_a**
   Nous allons démontrer que f vérifie les conditions du critère de Cauchy pour les fonctions à droite du point a *(c.f. 3.3.14)*
   Soit $\varepsilon > 0$
   Comme f est uniformément continue sur $]a;b[$, il existe $\eta_\varepsilon > 0$ tel que $(\forall x \in]a;b[)$ et $(\forall y \in]a;b[)$, nous avons l'implication $|x-y| < \eta_\varepsilon \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$
   Soient $x \in]a;b[$ et $y \in]a;b[$ tels que $0 < |x-a| < \eta_\varepsilon$ et $0 < |y-a| < \eta_\varepsilon$. Alors, dans ce cas, ces inégalités sont équivalentes à $0 < x-a < \eta_\varepsilon$ et $0 < y-a < \eta_\varepsilon$ et donc à $-\eta_\varepsilon < x-y < \eta_\varepsilon \Longleftrightarrow |x-y| < \eta_\varepsilon$, d'où nous déduisons que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$
   f vérifie donc bien le critère de Cauchy pour les fonctions à droite de a et donc $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$ existe.
   Nous notons $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = l_a$.
2. **De la même manière, on démontre que f admet une limite à gauche de b notée l_b**
3. **f se prolonge en une fonction $\tilde{f}$ continue sur $[a;b]$**
   Soit $\tilde{f} : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :
   $$\tilde{f}(a) = l_a \qquad \tilde{f}(b) = l_b \text{ et } (\forall x \in]a;b[) \left(\tilde{f}(x) = f(x)\right)$$
   $\tilde{f}$ est donc continue sur $[a;b]$ et apparaît donc comme le prolongement par continuité de f en a et en b. $\tilde{f}$ est donc bornée sur $[a;b]$, et donc f est bornée sur $]a;b[$
4. **$\tilde{f}$, continue sur $[a;b]$ est donc uniformément continue sur $[a;b]$ (théorème de Heine)**
   f, uniformément continue sur $]a;b[$ peut donc être prolongée en une fonction uniformément continue $\tilde{f}$ sur $[a;b]$

Exercice 59 :

Soit $f(x) = x^2 \cos x + x \sin x + 1$. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$

C'est très facile !! Il suffit de vérifier qu'il existe $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$ tels que $f(x_1) = f(x_2) = 0$. Or :
- ▷ $f(0) = 1$
- ▷ $f(\pi) = \pi^2 \cos \pi + \pi \sin \pi + 1 = -\pi^2 + 1 < 0$

Il existe donc $x_0 \in]0;\pi[$ tel que $f(x_0) = 0$

En fait, il existe une infinité de solutions à cette équation ; il suffit de remarquer que :
- ⋆ $f\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1 + \frac{\pi}{2} + 2n\pi > 0$
- ⋆ $f(\pi + 2n\pi) = -(\pi + 2n\pi)^2 + 1 < 0$

Et il y en a d'autres !!

Exercice 60 :

Soient $f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continues et telles que $(f(0) - g(0))(f(1) - g(1)) < 0$ Montrer qu'il existe $c \in]0;1[$ tel que $f(c) = g(c)$

Nous construisons, comme toujours *(ou souvent !!)* la fonction auxiliaire $h(x) = f(x) - g(x)$ et nous avons, bêtement $h(1) \times h(0) < 0$, et donc, d'après 3.6.6 , il existe $c \in]0;+1[$ tel que $h(c) = 0$, c'est à dire tel que $f(c) = g(c)$

Exercice 61 :

Soient $p > 0$ et $q > 0$ et $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(a) \neq f(b)$. Démontrer qu'il existe $c \in [a;b]$ tel que : $pf(a) + qf(b) = (p+q) f(c)$

Comme $f(a) \neq f(b)$, nous supposons $f(a) < f(b)$.
f étant continue, f prend toutes les valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$. Or

$$f(a) < \frac{pf(a) + qf(b)}{p+q} < f(b)$$

Il existe donc $c \in [a;b]$ tel que $f(c) = \dfrac{pf(a) + qf(b)}{p+q}$, c'est à dire tel que $pf(a) + qf(b) = (p+q) f(c)$

Exercice 62 :

Soit $f : [0;1] \longrightarrow [0;1]$ *telle que :*

$$\left\{\begin{array}{rcl} f : [0;1] & \longrightarrow & [0;1] \\ x & \longmapsto & f(x) = \left\{\begin{array}{l} 1-x \text{ si } x \notin \mathbb{Q} \\ x \text{ si } x \in \mathbb{Q} \end{array}\right. \end{array}\right.$$

1. *La fonction* f *est-elle continue sur* $[0;1]$

   Nous allons étudier cette continuité dans deux cas : $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $x \in \mathbb{Q}$

   ▷ Supposons $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
   Alors, il existe une suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres rationnels *(c'est à dire que, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $q_n \in \mathbb{N}$*)* tels que $\lim\limits_{n\to+\infty} q_n = x$
   Si f est continue, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(q_n) = f(x)$.
   Or, $f(q_n) = q_n$ et $f(x) = 1 - x$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} q_n = x$, nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} f(q_n) \neq f(x)$ [8]
   Donc, f n'est pas continue si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

   ▷ Supposons maintenant que $x \in \mathbb{Q}$
   Si $\mathbb{Q}$ est dense dans $[0;1]$, il en est de même de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Il existe donc une suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *(c'est à dire que, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $r_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$*)* tels que $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = x$
   Si f est continue, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(r_n) = f(x)$.
   Or, $f(r_n) = 1 - r_n$ et $f(x) = x$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = x$, nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} f(r_n) = 1 - x \neq f(x)$
   Donc, f n'est pas continue si $x \in \mathbb{Q}$

   Donc, f n'est pas continue sur $[0;1]$

2. *Montrer que* f *prend toutes les valeurs comprises entre* 0 *et* 1

   Soit $y \in [0;1]$
   ▷ Si $y \in \mathbb{Q}$, alors $f(y) = y$
   ▷ Si $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, alors si $x = 1 - y$, alors $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $f(x) = 1 - x = 1 - (1 - y) = y$
   Ainsi, tout $y \in [0;1]$ admet un antécédent dans $[0;1]$

Ainsi, f n'est pas continue mais atteint toutes les valeurs de $[0;1]$

Exercice 63 :

Soit $f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$, *une application continue telle que* $f(0) = f(1)$. *Démontrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, *il existe un nombre* $\alpha_n \in [0;1]$ *tel que* $f(\alpha_n) = f\left(\alpha_n + \dfrac{1}{n}\right)$

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$
Considérons la fonction $g : \left[0; 1 - \dfrac{1}{n}\right] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \left[0; 1 - \dfrac{1}{n}\right]$, par : $g(x) = f\left(x + \dfrac{1}{n}\right) - f(x)$; g est, par construction, continue.

8. Sauf si $x = \dfrac{1}{2}$, mais $\dfrac{1}{2} \in \mathbb{Q}$

Supposons que,pour tout $x \in \left[0; 1-\dfrac{1}{n}\right]$, nous ayions $g(x) > 0$; alors :

$$\begin{aligned} g(0)+g\left(\frac{1}{n}\right)+g\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+g\left(\frac{n-1}{n}\right) &= \sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\left(f\left(\frac{k}{n}+\frac{1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\left(f\left(\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)-\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \\ &= f(1)-f(0) \\ &= 0 \text{ puisque } f(0)=f(1) \end{aligned}$$

Or, ceci est en contradiction avec avec le fait que nous avons supposé que,pour tout $x \in \left[0; 1-\dfrac{1}{n}\right]$, nous ayions $g(x) > 0$, et nous aurions dû avoir $g(0)+g\left(\dfrac{1}{n}\right)+g\left(\dfrac{2}{n}\right)+\cdots+g\left(\dfrac{n-1}{n}\right) > 0$

Il existe donc $\alpha_n \in \left[0; 1-\dfrac{1}{n}\right]$ tel que $g(\alpha_n) = 0$. Ainsi, il existe un nombre $\alpha_n \in [0;1]$ tel que $f(\alpha_n) = f\left(\alpha_n + \dfrac{1}{n}\right)$

Exercice 64 :

Soient a et b 2 réels tels que $a \leqslant b$ Soient $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ toutes deux continues et telles que, pour tout $x \in [a;b]$, nous avons $f(x) > g(x)$ Démontrer qu'il existe $\lambda > 0$ tel que, pour tout $x \in [a;b]$, nous ayions $f(x) \geqslant g(x) + \lambda$

Soit h, la fonction définie sur l'intervalle $[a;b]$ par $h(x) = f(x) - g(x)$.
Alors h est continue sur $[a;b]$ et, pour tout $x \in [a;b]$, nous avons $h(x) > 0$
h est bornée sur $[a;b]$ et y atteint ses bornes. Si $\lambda = \inf\limits_{x\in[a;b]} h(x)$, il existe $c \in [a;b]$ tel que $h(c) = \lambda$, et d'après l'hypothèse, $\lambda > 0$.
Donc, pour tout $x \in [a;b]$, nous avons $f(x) \geqslant g(x) + \lambda$

Exercice 65 :

Démontrer que toute fonction continue et périodique est bornée

Nous appelons T, avec $T > 0$ la période de f.
Alors, f est bornée sur l'intervalle $[0;T]$.
Posons : $m = \inf\limits_{x\in[0;T]} f(x)$ et $M = \sup\limits_{x\in[0;T]} f(x)$; donc, pour tout $x \in [0;T]$, nous avons $m \leqslant f(x) \leqslant M$
Soit $x \in \mathbb{R}$; alors, il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $x \in [nT; (n+1)T]$

En effet, si nous prenons $n = \left[\dfrac{x}{T}\right]$, nous avons :

$$\left[\frac{x}{T}\right] \leqslant \frac{x}{T} < \left[\frac{x}{T}\right]+1 \Longleftrightarrow T\left[\frac{x}{T}\right] \leqslant x < T\left[\frac{x}{T}\right]+T \Longleftrightarrow nT \leqslant x < nT+T$$

Et donc : $nT \leqslant x < nT + T \Longleftrightarrow 0 \leqslant x - nT < T$
De telle sorte que $m \leqslant f(x - nT) \leqslant M$.
De la périodicité de f, nous avons $f(x - nT) = f(x)$ et donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $m \leqslant f(x) \leqslant M$
Ainsi, toute fonction périodique et continue est-elle bornée.

Exercice 66 :

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leqslant b$. Soit $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que f admette des maxima locaux en x_1 et x_2 avec $x_1 < x_2$. Démontrer que f admet un minimum local en un point $c \in]x_1; x_2[$

Pour tout dire, ce n'est pas un exercice très facile

Tout d'abord, visualisons la situation :*(figure 3.38)*

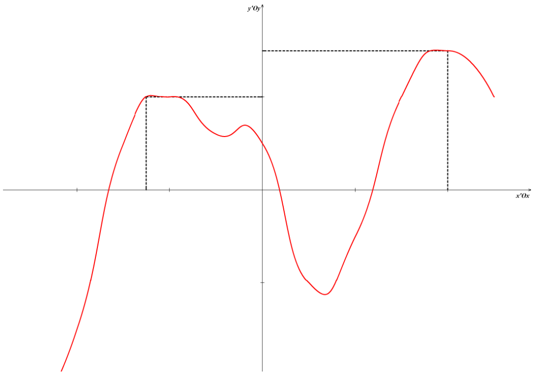

Figure 3.38 – Visualisation, par un graphe de deux maxima locaux

f étant continue sur l'intervalle $[a;b]$, l'est, en particulier sur l'intervalle $[x_1;x_2] \subset [a;b]$. Il existe donc $c \in [x_1;x_2]$ tel que $f(c) = \inf\limits_{x \in [x_1;x_2]} f(x)$

- ▷ Supposons que $c = x_1$ ou $c = x_2$

  x_1 *(donc c)* étant un maximum local, il existe un nombre $\eta > 0$ tel que $|x - x_1| \leqslant \eta \Longrightarrow f(x) \leqslant f(x_1)$, en particulier, $x_1 \leqslant x \leqslant x_1 + \eta \Longrightarrow f(x) \leqslant f(x_1)$

  Comme $c = x_1$, x_1 est aussi la borne inférieure de f sur l'intervalle $[x_1;x_2]$, c'est à dire que, pour tout x tel que $x_1 \leqslant x \leqslant x_1 + \eta$, alors $f(x) \geqslant f(x_1)$, ce qui signifie que f est constante sur $[x_1; x_1 + \eta]$, et qu'en choisissant $c = x_1 + \dfrac{\eta}{2}$, c est bien un minimum local tel que $c \in]x_1;x_2[$

  La démonstration est la même si nous supposons $c = x_2$

- ▷ Supposons que $c \neq x_1$ et $c \neq x_2$

  Alors $f(c) < \inf(f(x_1), f(x_2))$ *(sinon, $f(c)$ ne serait pas la borne inférieure sur l'intervalle $]x_1;x_2[$)* et donc $c \in]x_1;x_2[$

  Soit $\eta > 0$ tel que $\eta = \inf(c - x_1, x_2 - c)$. Alors, pour tout $x \in]c - \eta; c + \eta[$, nous avons $f(x) \geqslant f(c)$ *(puisque $f(c)$ est l'inf sur $[x_1;x_2]$)*

  f admet donc un minimum local en $c \in]x_1;x_2[$

Exercice 67 :

Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction continue telle que pour tout $x \geqslant 0$, nous ayions $f(x) < x$

1. *Démontrer que $f(0) = 0$*

   f est continue sur $\mathbb{R}^+$ et donc, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = f(0)$

   D'autre part, f est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, et donc, pour tout $x \geqslant 0$, nous avons $f(x) \geqslant 0$. De l'inégalité $f(x) < x$, nous déduisons que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = 0$

   Donc $f(0) = 0$

2. *Soient $a \in \mathbb{R}^+$ et $b \in \mathbb{R}^+$ tels que $0 < a < b$. Montrer qu'il existe $M \in [0;1[$ tel que pour tout $x \in [a;b]$, nous ayions $f(x) \leqslant Mx$*

   Soit la fonction g, définie sur l'intervalle $[a;b]$, par : $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$

   La fonction g est continue sur $[a;b]$ et est telle que pour tout $x \in [a;b]$, $0 \leqslant g(x) < 1$

Soit $M = \sup_{x\in[a;b]} g(x)$; il existe $c \in [a;b]$ tel que $g(c) = M$, et de l'inégalité $f(c) < c$, nous déduisons $M < 1$.

Donc, pour tout $x \in [a;b]$, nous avons $0 \leqslant g(x) \leqslant M < +1$, c'est à dire que, pour tout $x \in [a;b]$, nous avons $0 \leqslant \dfrac{f(x)}{x} \leqslant M \Longleftrightarrow 0 \leqslant f(x) \leqslant Mx$

Exercice 68 :

Pour résoudre cette question, il suffit de revenir aux définitions et de bien connaître les formules trigonométriques

1. *Montrer que* $\arcsin(-x) = -\arcsin x$

$$\begin{aligned} y = \arcsin(-x) &\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -x = \sin y \\ -x \in [-1,+1] \\ y \in \left[-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right] \end{array}\right. \\ &\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \sin -y \\ x \in [-1,+1] \\ -y \in \left[-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right] \end{array}\right. \\ &\Longleftrightarrow -y = \arcsin x \\ &\Longleftrightarrow y = -\arcsin x \end{aligned}$$

   Nous avons bien $\arcsin(-x) = -\arcsin x$

2. *Montrer que* $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$

   Nous itérons :

$$\begin{aligned} y = \arccos(-x) &\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -x = \cos y \\ -x \in [-1,+1] \\ y \in [0,+\pi] \end{array}\right. \\ &\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -\cos y = \cos(\pi - y) \\ x \in [-1,+1] \\ \pi - y \in [0,+\pi] \end{array}\right. \\ &\Longleftrightarrow \pi - y = \arccos x \\ &\Longleftrightarrow y = \pi - \arccos x \end{aligned}$$

   Nous avons donc $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$

3. *Montrer que* $\arcsin x + \arccos x = +\dfrac{\pi}{2}$

   Comme d'habitude, posons $y = \arcsin x$. Alors :

$$y = \arcsin x \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \sin y \\ x \in [-1,+1] \\ y \in \left[-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right] \end{array}\right.$$

   Or, $\sin y = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - y\right)$ et donc, nous avons :

$$y = \arcsin x \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right) \\ x \in [-1,+1] \\ \frac{\pi}{2} - y \in [0,\pi] \end{array}\right.$$

   Et donc $\dfrac{\pi}{2} - y = \arccos x \Longleftrightarrow \dfrac{\pi}{2} = \arccos x + y \Longleftrightarrow \arcsin x + \arccos x = +\dfrac{\pi}{2}$

Exercice 69 :

1. *Calculer, pour $ab \neq 1$, $\arctan a + \arctan b$*

   ⋆ Premièrement rappelons que, pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$ tels que $\tan\alpha \tan\beta \neq 1$:
   $$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$
   Et comme la fonction tan est périodique et de période π, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$
   $$\tan(\alpha+\pi) = \tan\alpha$$

   ⋆ D'autre part :
   $$y = \arctan a \Longleftrightarrow \begin{cases} a = \tan y \\ a \in \mathbb{R} \\ y \in \left]-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right[\end{cases} \quad \text{et} \quad z = \arctan b \Longleftrightarrow \begin{cases} b = \tan z \\ b \in \mathbb{R} \\ z \in \left]-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right[\end{cases}$$
   Des équivalences précédentes, nous avons $-\pi < y + z < \pi$

   ⋆ <u>Supposons $-\pi < y + z < -\frac{\pi}{2}$</u>
   Alors $0 < y + z + \pi < \frac{\pi}{2}$
   Et $U = \tan(y + z + \pi) \Longleftrightarrow y + z + \pi = \arctan U$
   Or,$\tan(y+z+\pi) = \tan(y+z) = \dfrac{\tan y + \tan z}{1 - \tan z \tan y} = \dfrac{a+b}{1-ab}$ D'où, si $-\pi < y + z < -\frac{\pi}{2}$ alors $y + z + \pi = \arctan U = \arctan\left(\dfrac{a+b}{1-ab}\right) \Longleftrightarrow y + z = \arctan\left(\dfrac{a+b}{1-ab}\right) - \pi$
   Donc, si $-\pi < \arctan a + \arctan b < -\frac{\pi}{2}$, alors $\arctan a + \arctan b = \arctan\left(\dfrac{a+b}{1-ab}\right) - \pi$

   ⋆ <u>Supposons $-\frac{\pi}{2} < y + z < +\frac{\pi}{2}$</u>
   Alors, plus simplement, $U = \tan(y+z) \Longleftrightarrow y + z = \arctan U$, et en utilisant les résultats ci-dessus, nous avons donc si $-\frac{\pi}{2} < y + z < +\frac{\pi}{2}$, alors $\arctan a + \arctan b = \arctan\left(\dfrac{a+b}{1-ab}\right)$

   ⋆ <u>Supposons $\frac{\pi}{2} < y + z < \pi$</u>
   Alors $-\frac{\pi}{2} < y + z - \pi < 0$
   Et $U = \tan(y + z - \pi) \Longleftrightarrow y + z - \pi = \arctan U$
   Or,$\tan(y+z-\pi) = \tan(y+z) = \dfrac{\tan y + \tan z}{1 - \tan z \tan y} = \dfrac{a+b}{1-ab}$ D'où, si $-\frac{\pi}{2} < y + z - \pi < 0$ alors $y + z - \pi = \arctan U = \arctan\left(\dfrac{a+b}{1-ab}\right) \Longleftrightarrow y + z = \arctan\left(\dfrac{a+b}{1-ab}\right) + \pi$
   Donc, si $-\frac{\pi}{2} < \arctan a + \arctan b < \pi$, alors $\arctan a + \arctan b = \arctan\left(\dfrac{a+b}{1-ab}\right) + \pi$

2. *Calculer, pour $x \neq 0$, $\arctan x + \arctan \dfrac{1}{x}$*

   Nous voulons résoudre, ici, le cas où $ab = 1$
   Comme d'habitude, nous posons $y = \arctan x$. Aors,
   $$y = \arctan x \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \tan y \\ x \in \mathbb{R} \\ y \in \left]-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right[\end{cases}$$
   Donc, $\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{\tan y} = \dfrac{\cos y}{\sin y} = \dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right)} = \tan\left(\dfrac{\pi}{2} - y\right)$

   ⋆ De $y \in \left]-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right[$, c'est à dire $-\frac{\pi}{2} < y < +\frac{\pi}{2}$, nous tirons $0 < \frac{\pi}{2} - y < \pi$

⋆ Supposons pour commencer que $0 < \dfrac{\pi}{2} - y < \dfrac{\pi}{2}$, c'est à dire $0 < y < \dfrac{\pi}{2}$ et donc $x > 0$, alors :

$$\frac{1}{x} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - y\right) \Longleftrightarrow \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - y \Longleftrightarrow y + \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$$

Donc, si $x > 0$, alors $\arctan x + \arctan\dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$

⋆ Supposons maintenant $\dfrac{\pi}{2} < \dfrac{\pi}{2} - y < \pi$, c'est à dire $-\dfrac{\pi}{2} < y < 0$ et donc $x < 0$

De la périodicité de la fonction tan, nous avons $\tan(\alpha - \pi) = \tan\alpha$ et donc :

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - y - \pi\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{2} - y\right)$$

Or, de $-\dfrac{\pi}{2} < y < 0$, nous tirons que $-\dfrac{\pi}{2} < -\dfrac{\pi}{2} - y < 0$ et alors de $\dfrac{1}{x} = \tan\left(-\dfrac{\pi}{2} - y\right)$, nous tirons :

$$\frac{1}{x} = \tan\left(-\frac{\pi}{2} - y\right) \Longleftrightarrow \arctan\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2} - y \Longleftrightarrow y + \arctan\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$$

Ainsi, si $x < 0$, alors $\arctan x + \arctan\dfrac{1}{x} = -\dfrac{\pi}{2}$

Exercice 70 :

Démontrer les égalités :

1. $\cos(\arctan x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

   Comme d'habitude, nous posons $y = \arctan x$; remarquons que $y \in \left]-\dfrac{\pi}{2}; +\dfrac{\pi}{2}\right[$ et que donc $\cos y > 0$

   De $y = \arctan x$, nous tirons $x = \tan y = \dfrac{\sin y}{\cos y}$; en élevant au carré, $x^2 = \dfrac{\sin^2 y}{\cos^2 y} = \sin^2 y\left(1 + \tan^2 y\right)$.

   Or :

   $$x^2 = \sin^2 y\left(1+\tan^2 y\right) \Longleftrightarrow x^2 = \left(1 - \cos^2 y\right)\left(1 + x^2\right) \Longleftrightarrow \cos^2 y = \frac{1}{1+x^2}$$

   D'où nous tirons $\cos y = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ ou $\cos y = \dfrac{-1}{\sqrt{1+x^2}}$. Comme nous savons que $\cos y > 0$, nous avons $\cos y = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

   Et donc, $\cos(\arctan x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

2. $\sin(\arctan x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

   De $x = \tan y = \dfrac{\sin y}{\cos y}$, nous tirons, en utilisant le résultat précédent :

   $$x\cos y = \sin y \Longleftrightarrow \sin y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Exercice 71 :

Pour $x \in \mathbb{R}$ *tel que* $-\dfrac{\pi}{4} < x < \dfrac{3\pi}{4}$, *simplifier* $\arcsin(2\sin x\cos x)$

Comme $2\sin x\cos x = \sin 2x$ il est très tentant de répondre tout de suite !! Or, ce n'est pas possible !!
Il suffit de revenir à la définition de $\arcsin x$:

$$Z = \arcsin U \Longleftrightarrow \begin{cases} U = \sin Z \\ U \in [-1, +1] \\ Z \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, +\dfrac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

- ▷ Si $-\dfrac{\pi}{4} < x < \dfrac{3\pi}{4}$, alors $-\dfrac{\pi}{2} < 2x < \dfrac{3\pi}{2}$
- ▷ <u>Supposons $-\dfrac{\pi}{4} < x \leqslant \dfrac{\pi}{4}$</u>

  Alors, sans souci, $-\dfrac{\pi}{2} < 2x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ et $\arcsin(2\sin x\cos x) = 2x$; c'est tout ! !
- ▷ <u>Supposons $\dfrac{\pi}{4} \leqslant x < \dfrac{3\pi}{4}$</u>

  Alors, $\dfrac{\pi}{2} \leqslant 2x < \dfrac{3\pi}{2}$, et cette fois ci, il est impossible d'utiliser la définition de l'arcsin x.

  Par contre, si $\dfrac{\pi}{4} \leqslant x < \dfrac{3\pi}{4}$, alors $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant 2x - \pi < \dfrac{\pi}{2}$

  D'autre part, $\sin(\alpha - \pi) = -\sin\alpha$; D'où, si $\dfrac{\pi}{4} \leqslant x < \dfrac{3\pi}{4}$,

$$2x - \pi = \arcsin\sin(2x - \pi) = \arcsin(-\sin 2x) = -\arcsin(\sin 2x)$$

  D'où, $\dfrac{\pi}{4} \leqslant x < \dfrac{3\pi}{4}$, alors $\arcsin(\sin 2x) = \pi - 2x$

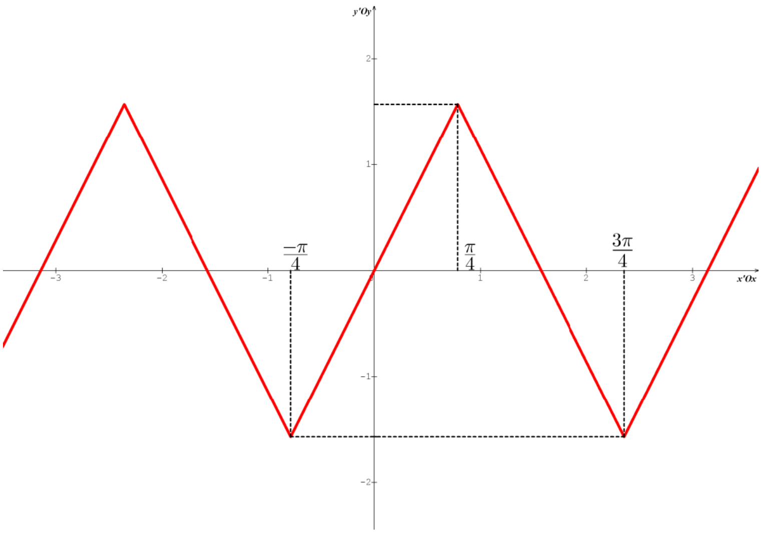

FIGURE 3.39 – Le graphe de la fonction $\arcsin(2\sin x\cos x)$ sur $\mathbb{R}$ en entier

3.9.4 Suites de fonctions

Exercice 72 :

Etudier la convergence simple et la convergence uniforme des suites de fonctions définies sur l'intervalle fermé borné $[0; 1]$

1. $f_n(x) = \dfrac{x}{1 + nx}$

   Nous pouvons remarquer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \geqslant 0$, et que, toujours pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(0) = 0$

   D'autre part, pour tout x tel que $0 < x \leqslant 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + nx = +\infty$ et donc, pour $x \in]0; 1]$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x}{1 + nx} = 0$, de telle sorte que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convege simplement, sur $[0; 1]$ vers la fonction nulle $\mathcal{O}$ sur l'intervalle $]0; 1]$.

   Y-a-t-il convergence uniforme ?

   Remarquons que, pour tout $x \in [0; 1]$, nous avons $0 \leqslant f_n(x) \leqslant f_n(1) \Longleftrightarrow 0 \leqslant f_n(x) \leqslant \dfrac{1}{1 + n}$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{1+n} = 0$, c'est à dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sup\limits_{x\in[0;1]} f_n(x) \right) = 0$, nous avons bien la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers la fonction nulle $\mathcal{O}$ sur l'intervalle $]0;1]$

2. $g_n(x) = \dfrac{1}{1+nx}$

Cette fois ci, encore, nous pouvons remarquer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g_n(x) \geqslant 0$, et que, toujours pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g_n(0) = 1$

D'autre part, pour tout x tel que $0 < x \leqslant 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + nx = +\infty$ et donc, pour $x \in]0;1]$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{1+nx} = 0$, de telle sorte que la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convege simplement, sur $[0;1]$ vers la fonction G définie par :

$$\begin{cases} G(x) = 0 \text{ si } 0 < x \leqslant 1 \\ G(0) = 1 \end{cases}$$

Y-a-t-il convergence uniforme ?

Remarquons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions g_n sont continues sur $[0;1]$.

S'il y avait convergence uniforme de la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers la fonction G, G serait continue.

Or, G n'est pas une fonction continue

Donc, la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers G

Exercice 73 :

Soit $E \subset \mathbb{R}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de E dans $\mathbb{R}$ qui converge simplement vers une fonction f. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, chaque fonction f_n est croissante. Démontrer que f est croissante

Soient $x \in E$ et $y \in E$ tels que $x \leqslant y$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, comme la fonction f_n est croissante, $f_n(x) \leqslant f_n(y)$. D'autre part, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant une suite de fonctions convergeant simplement vers une fonction f, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(y) = f(y)$, en utilisant les résultats sur les suites et les relations d'ordre, nous avons $f(x) \leqslant f(y)$

La fonction f est donc croissante sur E

Exercice 74 :

Etudier la convergence simple et la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{x^{2n}}{1+x^{2n}}$

1. **Faisons une étude générale ; voir figure 3.40**
   - ▷ Tout d'abord, remarquons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est une fonction paire ; nous n'allons donc l'étudier sur $\mathbb{R}^+$
   - ▷ Nous avons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(0) = 0$ et $f_n(1) = \dfrac{1}{2}$
   - ▷ Supposons $0 < x < 1$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} x^{2n} = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$
   - ▷ Supposons maintenant que $x > 1$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} x^{2n} = +\infty$; nous sommes devant une indétermination ; mais $f_n(x)$ est un rapport de polynômes qui tend vers l'infini comme le rapport des ses termes de plus haut degré. Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 1$

   Ainsi, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle simplement, sur $\mathbb{R}$ vers la fonction F définie par :

$$\begin{cases} F(x) = 1 \text{ si } |x| > 1 \\ F(1) = F(-1) = \dfrac{1}{2} \\ F(x) = 0 \text{ si } |x| < 1 \end{cases}$$

   F n'est évidemment pas contine ; la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge donc pas uniformément vers F sur $\mathbb{R}$

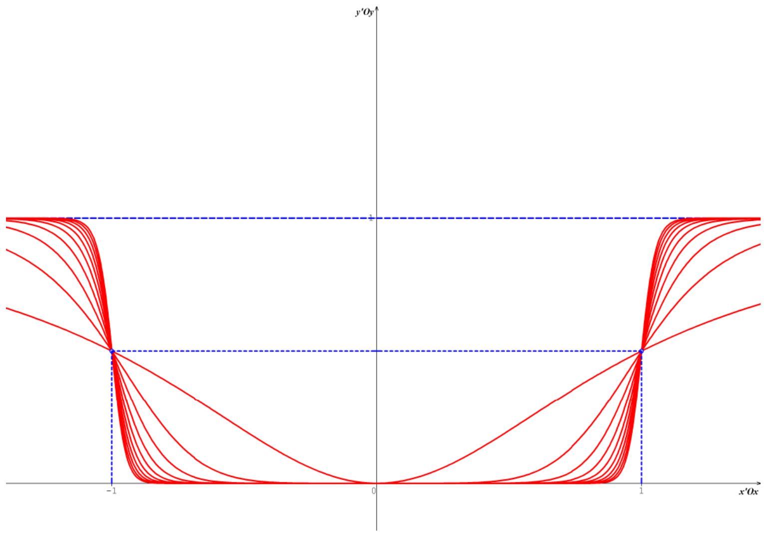

FIGURE 3.40 – Une visualisation, par les graphes, de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$

2. **Etude de quelques cas particuliers**
   (a) Supposons $|x| \geqslant h > +1$
   De la parité, nous n'étudions que sur $[h;+\infty[$.
   Il faut donc évaluer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\sup_{x\in[h;+\infty[}|f_n(x)-1|\right)$.
   Or, pour tout $x\in[h;+\infty[$, $|f_n(x)-1| = \left|\dfrac{x^{2n}}{1+x^{2n}}-1\right| = \left|\dfrac{-1}{1+x^{2n}}\right| = \dfrac{1}{1+x^{2n}}$.
   Pour tout $x\in[h;+\infty[$, nous avons $1+x^{2n}\geqslant 1+h^{2n} \Longleftrightarrow \dfrac{1}{1+x^{2n}}\leqslant\dfrac{1}{1+h^{2n}}$. En particulier, $\displaystyle\sup_{x\in[h;+\infty[}|f_n(x)-1| = \frac{1}{1+h^{2n}}$.
   Comme $h>1$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}h^{2n}=+\infty$ et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{1+h^{2n}}=0$
   On vient donc de démontrer la converge uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers la fonction constante égale à 1 sur les intervalles $]-\infty;-h]\cup[h;+\infty[$ avec $h>1$
   (b) Supposons $|x|\leqslant\alpha<+1$
   Comme $\alpha<+1$, si $|x|\leqslant\alpha$, alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}x^{2n}=0$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}f_n(x)=0$
   La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc uniformément vers la fonction constante égale à 0 sur l'intervalle $[-\alpha;+\alpha]$ avec $\alpha<1$

En conclusion, la convergence uniforme dépend beaucoup du domaine dans lequel ontravaille.

Exercice 76 :

Etudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout $x\in[0;1]$ par $f_n(x)=x^n(1-x)$

- ▷ **Convergence simple**
  Remarquons tout d'abord que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, nous avons $f_n(0)=f_n(1)=0$
  Supposons $0<x<1$, alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}x^n=0$;, et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}f_n(x)=0$ et donc la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la fonction nulle $\mathcal{O}$ sur $[0;1]$
- ▷ **Convergence uniforme**

Comme tout à l'heure, il faut évaluer $\lim_{n\to+\infty}\left(\sup_{x\in[0;+1]}|f_n(x)|\right)$. Or, pour tout $x\in[0;1]$, nous avons $f_n(x)\geqslant 0$ et donc $\sup_{x\in[0;+1]}|f_n(x)| = \sup_{x\in[0;+1]} f_n(x)$

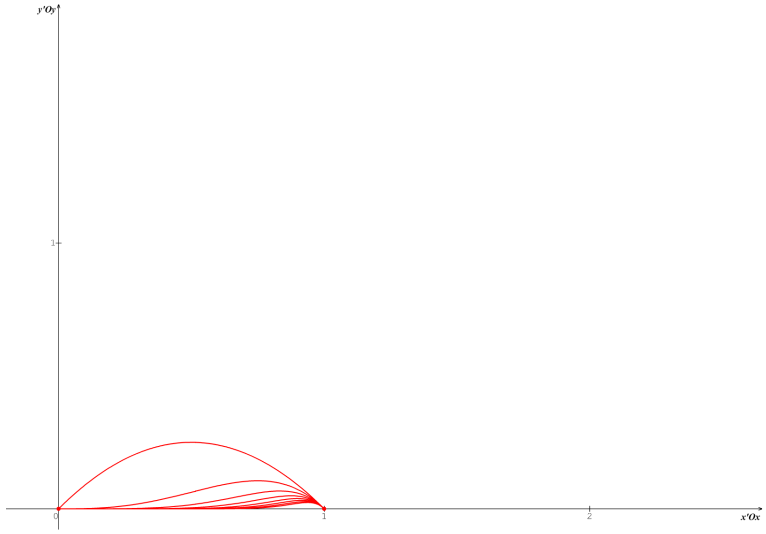

FIGURE 3.41 – Une visualisation, par les graphes, de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$

La borne supérieure des fonctions f_n est atteinte en $x_0=\dfrac{n}{n+1}$ et donc pour tout $x\in[0;+1]$, nous avons $f_n(x)\leqslant f_n\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$

Or, $f_n\left(\dfrac{n}{n+1}\right)=\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n\left(1-\dfrac{n}{n+1}\right)=\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{-n}\left(\dfrac{1}{n+1}\right)$

Et nous avons : $\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{-n}=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-n}=e^{-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$

Or, $\lim_{n\to+\infty}-n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=\lim_{n\to+\infty}\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{-1}{n}}=-1$ et donc $\lim_{n\to+\infty}e^{-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}=\dfrac{1}{e}$

Comme $\lim_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}\right)=0$, nous avons $\lim_{n\to+\infty}f_n\left(\dfrac{n}{n+1}\right)=0$ et donc la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers la fonction nulle $\mathcal{O}$ sur $[0;1]$

Exercice 77 :

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définires sur l'intervalle fermé borné $[0;1]$ par :

$$\begin{cases} f_n(x)= & n^2x(1-nx)\ \text{si } 0\leqslant x\leqslant \dfrac{1}{n}\\ f_n(x)= & 0\ \text{si } \dfrac{1}{n}\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$$

Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction f. La convergence est-elle uniforme ?

Tout d'abord, commençons par visualiser sur la figure 3.42 cette suite de fonctions :
En voyant ces représentations, il y a une chose qui doit nous sauter aux yeux : le maximum de f_n a plutôt tendance à grandir !!

▷ **Convergence simple**

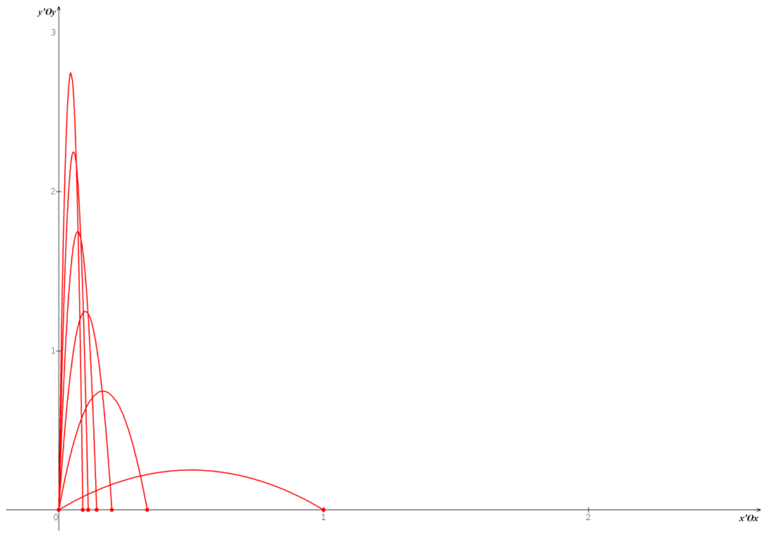

FIGURE 3.42 – Une visualisation, par les graphes, de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Soit $x \in [0;1]$; il existe alors $N \in \mathbb{N}$ tel que $\dfrac{1}{N} < x$, et pour tout $n \geqslant N$, nous avons $\dfrac{1}{n} < x$ et alors $f_n(x) = 0$. Nous avons donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge donc simplement vers la fonction nulle $\mathcal{O}$ sur $[0;1]$

- **Convergence uniforme**

  Remarquons, comme précédemment que, pour tout $x \in [0;1]$, nous avons $f_n(x) \geqslant 0$ et donc que, sur $[0;1]$, $|f_n(x)| = f_n(x)$

  Une petite étude de variations montre que le maximum de f_n est atteint en $x_n = \dfrac{1}{2n}$ et $f_n(x_n) = \dfrac{n}{4}$. Nous avons donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{4} = +\infty$

  La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne peut donc converger uniformément sur $[0;1]$

Exercice 78 :

Etudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\begin{cases} f_n(x) = & \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^n \text{ si } 0 \leqslant x \leqslant n \\ f_n(x) = & 0 \text{ si } x > n \end{cases}$$

Comme tout à l'heure, nous allons d'abord visualiser cette suite *(figure 3.43)* :

- **Convergence simple**

  Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Il existe alors $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant N$, $n > x$, et alors, $f_n(x) = \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^n$.

  Il faut donc calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^n$

  Nous avons $\left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1-\frac{x}{n}\right)}$. Or, $n\ln\left(1 - \dfrac{x}{n}\right) = -x \times \dfrac{\ln\left(1-\frac{x}{n}\right)}{-\frac{x}{n}}$.

  Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln\left(1-\frac{x}{n}\right)}{-\frac{x}{n}} = 1$, nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} -x \times \dfrac{\ln\left(1-\frac{x}{n}\right)}{-\frac{x}{n}} = -x$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{n\ln\left(1-\frac{x}{n}\right)} = e^{-x}$

  Ainsi, la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la fonction $f(x) = e^{-x}$

- **Y-a-t-il convergence uniforme ?**

  S'il y a convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, cette convergence ne peut se faire que vers $f(x) = e^{-x}$

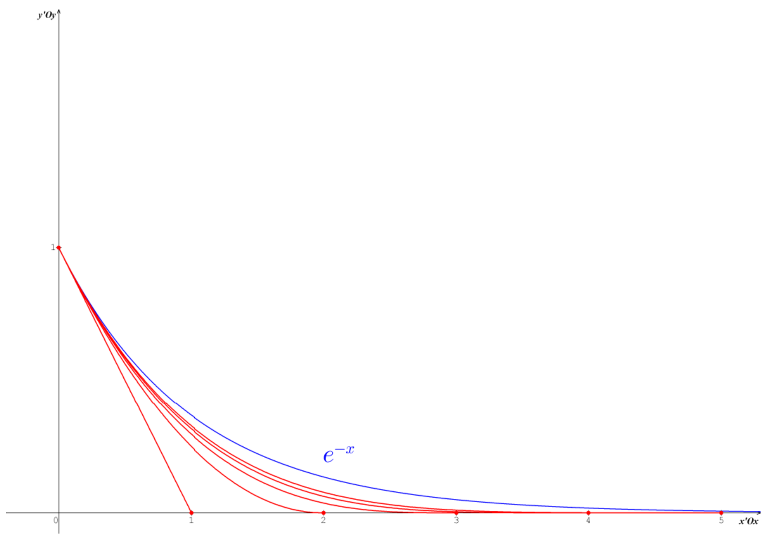

FIGURE 3.43 – Une visualisation, par les graphes, de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et de sa limite e^{-x}

⋆ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on construit $g_n(x) = f_n(x) - e^{-x}$. Alors :

$$\begin{cases} \text{Pour } x \in [0;n] & g_n(x) = \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^n - e^{-x} \\ \text{Pour } x \geqslant n & g_n(x) = -e^{-x} \end{cases}$$

L'objet de cette question est de montrer que, pour tout $x \geqslant 0$ $\lim\limits_{n\to+\infty} |g_n(x)| = 0$

On peut d'ores et déjà dire que, si $x \geqslant n$, alors $|g_n(x)| = e^{-x} \leqslant e^{-n}$

⋆ Supposons $x \in [0;n]$

Calculons, pour $x \in [0;n]$, la dérivée de g_n :

$$g_n'(x) = n \times \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-1} \times \frac{-1}{n} + e^{-x} = e^{-x} - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-1}$$

L'étude du signe de g_n' est malaisée, et nous allons utiliser le fait que si $m \leqslant g_n(x) \leqslant M$, alors $|g_n(x)| \leqslant \sup\{|m|;|M|\}$

⋆ Appelons $Z(g_n')$ l'ensemble des valeurs réelles de $[0;n]$ qui annulent g_n', c'est à dire :

$$Z(g_n') = \{z \in [0;n] \text{ tels que } g_n'(z) = 0\}$$

- Tout d'abord, $Z(g_n') \neq \emptyset$ puisque $0 \in Z(g_n')$
- Si z_1 est un maximum local de g_n, alors $g_n'(z_1) = 0$ et $z_1 \in Z(g_n')$
- De même si z_2 est un minimmum local de g_n, alors $g_n'(z_2) = 0$ et $z_2 \in Z(g_n')$
- Donc, $|g_n(x)| \leqslant \sup\limits_{z\in Z(g_n')} |g_n(z)|$

⋆ Que vérifient les éléments $z \in Z(g_n')$?

Tout d'abord,

$$z \in Z(g_n') \iff g_n'(z) = 0 \iff e^{-z} - \left(1 - \frac{z}{n}\right)^{n-1} = 0 \iff e^{-z} = \left(1 - \frac{z}{n}\right)^{n-1}$$

Donc, pour tout $z \in Z(g_n')$:

$$\begin{aligned} g_n(z) = & \left(1 - \frac{z}{n}\right)^n - e^{-z} \\ = & \left(1 - \frac{z}{n}\right) \times \left(1 - \frac{z}{n}\right)^{n-1} - e^{-z} \\ = & \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{-z} - e^{-z} \\ = & \frac{-z}{n} e^{-z} \end{aligned}$$

C'est à dire $|g_n(z)| = \frac{z}{n}e^{-z}$

⋆ Majorons $\varphi(z) = \frac{z}{n}e^{-z}$

Nous avons : $\varphi'(z) = \frac{1}{n}e^{-z} - \frac{z}{n}e^{-z} = \frac{e^{-z}}{n}(1-z)$

Ainsi, pour tout $z \in [0; n]$, nous avons $0 \leqslant \varphi(z) \leqslant \varphi(1) \leqslant \frac{e^{-1}}{n}$ et donc, $\sup_{z\in Z(g'_n)} |g_n(z)| \leqslant \frac{e^{-1}}{n}$

⋆ En conclusion, comme pour tout $x \geqslant n$, $|g_n(x)| \leqslant e^{-n}$, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, nous avons $|g_n(x)| \leqslant \max\left\{\frac{e^{-1}}{n}; e^{-n}\right\}$ [9]

Comme $\lim_{n\to+\infty} \max\left\{\frac{e^{-1}}{n}; e^{-n}\right\} = 0$, nous avons $\lim_{n\to+\infty} |g_n(x)| = 0$

Ainsi, la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction $f(x) = e^{-x}$

Exercice 79 :

1. *Soient $E \subset \mathbb{R}$, $F \subset \mathbb{R}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions défnies sur E et à valeurs dans F qui converge uniformément vers une fonction f. Soit $g : F \longrightarrow \mathbb{K}$ une application uniformément continue. Démontrer que la suite de fonctions $(g \circ f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $g \circ f$*

   Il faut donc montrer que, pour tout $x \in E$, $\lim_{n\to+\infty} |g \circ f_n(x) - g \circ f(x)| = 0$

   Soit $\varepsilon > 0$
   - ▷ La fonction g étant uniformément continue, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $x \in F$ et tout $y \in F$, $|x-y| < \eta \Longrightarrow |g(x) - g(y)| < \varepsilon$
   - ▷ La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant uniformément vers f, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N_\varepsilon$, alors, pour tout $x \in E$, $|f_n(x) - f(x)| < \eta$
   - ▷ Ainsi, si $n \geqslant N_\varepsilon$, alors $|f_n(x) - f(x)| < \eta$ et donc $|g(f_n(x)) - g(f(x))| < \epsilon$

   La suite $(g \circ f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc uniformément vers la fonction $g \circ f$

2. *Soit $E \subset \mathbb{R}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions défnies sur E et à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui converge uniformément vers une fonction f. Démontrez que la suite de fonctions $\left(\frac{f_n}{1+f_n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction $\frac{f}{1+f^2}$*

   Nous sommes, ici, dans la situation de la question précédente où g est la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $g(x) = \frac{x}{1+x^2}$ et donc $g \circ f_n(x) = \frac{f_n(x)}{1+(f_n(x))^2}$.

   Si nous réussissons à montrer que g est uniformément continue, alors le résultat demandé est démontré.

   L'étude des dérivées premières et secondes de g montre que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|g'(x)| \leqslant 1$, et donc, d'après le théorème des accroissements finis, nous avons $|g(x) - g(y)| \leqslant |x-y|$, ce qui suffit pour conclure que g est uniformément continue.

   Donc, la suite de fonctions $\left(\frac{f_n}{1+f_n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction $\frac{f}{1+f^2}$

Exercice 80 :

Soient $E \subset \mathbb{R}$ On considère $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur E et à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui converge uniformément vers une fonction f,bornée et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une autre suite de fonctions définies sur E et à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui converge uniformément vers une fonction g, bornée elle aussi. Démontrer que la suite de fonctions $(g_n \times f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $g \times f$

Pour nous simplifier la vie, nous posons :

---

9. On peut remarquer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons $e^{-n} \leqslant \frac{e^{-1}}{n}$ et donc que $\max\left\{\frac{e^{-1}}{n}; e^{-n}\right\} = \frac{e^{-1}}{n}$, de telle sorte que, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, nous ayions $|g_n(x)| \leqslant \frac{e^{-1}}{n}$

⋆ M_f le majorant de f sur E, c'est à dire tel que, pour tout $x \in E$, $|f(x)| \leqslant M_f$
⋆ M_g le majorant de g sur E, c'est à dire tel que, pour tout $x \in E$, $|g(x)| \leqslant M_g$

Nous devons donc montrer que, pour tout $x \in E$, $\lim\limits_{n \to +\infty} |f_n(x) g_n(x) - f(x) g(x)| = 0$

Nous avons :

$$\begin{aligned}
|f_n(x) g_n(x) - f(x) g(x)| = &\ |f_n(x) g_n(x) - f(x) g_n(x) + f(x) g_n(x) - f(x) g(x)| \\
\leqslant &\ |f_n(x) g_n(x) - f(x) g_n(x)| + |f(x) g_n(x) - f(x) g(x)| \\
\leqslant &\ |g_n(x)| |f_n(x) - f(x)| + |f(x)| |g_n(x) - g(x)| \\
\leqslant &\ |g_n(x)| |f_n(x) - f(x)| + M_f |g_n(x) - g(x)|
\end{aligned}$$

Reste à traiter le cas $|g_n(x)|$.
Nous avons : $|g_n(x)| = |g_n(x) - g(x) + g(x)| \leqslant |g_n(x) - g(x)| + |g(x)| \leqslant |g_n(x) - g(x)| + M_g$.
Donc :

$$|f_n(x) g_n(x) - f(x) g(x)| \leqslant |f_n(x) - f(x)| (|g_n(x) - g(x)| + M_g) + M_f |g_n(x) - g(x)|$$

Comme la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction f, que la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction g, nous avons $\lim\limits_{n \to +\infty} |f_n(x) - f(x)| = \lim\limits_{n \to +\infty} |g_n(x) - g(x)| = 0$ et donc

$$\lim_{n \to +\infty} |f_n(x) - f(x)| (|g_n(x) - g(x)| + M_g) + M_f |g_n(x) - g(x)| = 0$$

C'est à dire : pour tout $x \in E$, $\lim\limits_{n \to +\infty} |f_n(x) g_n(x) - f(x) g(x)| = 0$

La suite de fonctions $(g_n \times f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc uniformément vers $g \times f$