Chapitre 4

Fonctions différentiables, fonctions dérivables

Ce chapitre est dans l'exacte continuité du cours sur la dérivabilité exposé en L_0 ; il le complète. Il est donc nécessaire de travailler le cours de L_0 avant de travailler ce chapitre. L'objectif de ce chapitre est de maîtriser pleinement la dérivation des fonctions numériques d'une variable réelle

Le point de vue adopté dans ce chapitre est le point de vue de l'approximation ; point de vue que nous retrouverons dans l'étude des développements limités

Introduction

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x^2$

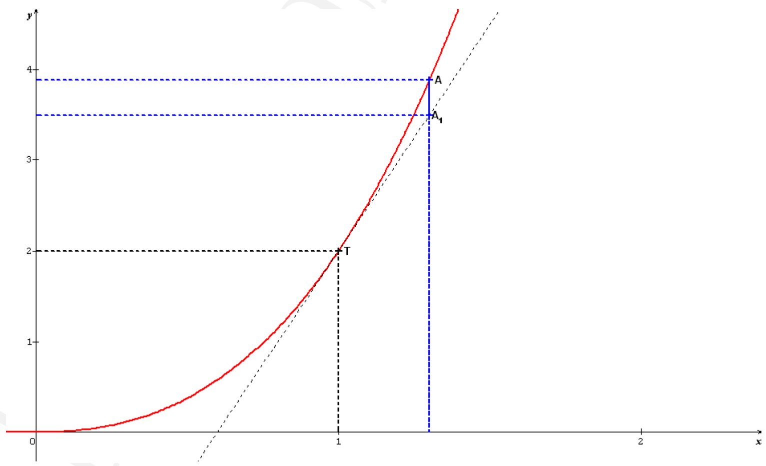

Figure 4.1 – Le graphe de la fonction $f(x) = x^3 + x^2$, le point $A(1,3, f(1,3))$, le point $T(1,2)$ et la tangente au graphe de f en T

Nous souhaitons connaître une valeur approchée de $f(1,3)$ sans calculer $(1,3)^3$ ni $(1,3)^2$, c'est à dire que l'on se place dans un petit intervalle de centre 1.
Pour cela, nous posons $x = 1 + h$ où h est très petit et donc :

$$f(1+h) = (1+h)^3 + (1+h)^2 = 1 + h^3 + 3h^2 + 3h + 1 + h^2 + 2h = 2 + 5h + 4h^2 + h^3$$

Pour h très petit, on **peut négliger** h^2 et h^3 devant h ; on a donc $f(1+h) \simeq 2+5h$; autrement dit,

$$f(1,3) \simeq 2+5\times 0,3 = 3,5$$

Le point $(1,3; f(1,3))$ est le point $A1$ du graphe. En fait, à la calculatrice, $f(1,3) = 3,887$ et l'erreur commise est figurée par le segment $[A; A1]$
Il faut remarquer que l'on peut écrire : $f(1+h) = 2+5h+h\times\left(4h+h^2\right)$
Or comme $f(1) = 2$, on peut, en fait, écrire

$$f(1+h) = f(1)+5h+h\times\varepsilon(h)$$

Avec $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0$
L'application

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mathrm{D}_1 : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ h & \longmapsto & \mathrm{D}_1(h) = 5h \end{array}\right.$$

est l'application linéaire tangente à f en $x_0 = 1$; $2+5h$ **est l'application linéaire affine tangente** en $x_0 = 1$

Remarque 1 :

Bien qu'il y ait un très fort lien entre elles, il ne faut pas confondre *"application linéaire affine tangente"* et *droite tangente à la courbe représentative*

4.1 Fonctions différentiables

Nous allons considérer, *par volonté de généralisation*, les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, s'approchant ainsi du cours sur les fonctions vectorielles ou les courbes paramétrées. L'application aux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ se fera naturellement.

4.1.1 Définition

Soit f une fonction définie sur un domaine $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ et soit $x_0 \in \mathcal{D}_f$
On dit que f est <u>différentiable</u> en x_0 (ou que f admet un développement limité d'ordre 1 en x_0)

- ▷ **S'il existe $I \subset \mathbb{R}$, voisinage de 0**
- ▷ **S'il existe un nombre $\lambda \in \mathbb{C}$**
- ▷ **S'il existe ε, application de I dans $\mathbb{C}$ telle que $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0$**

tels que

$$f(x_0+h) = f(x_0)+\lambda\times h+h\varepsilon(h)$$

Exemple 1 :

Nous avons donc $f(x) = x^3+x^2$ différentiable en $x_0 = 1$

Remarque 2 :

1. Une question va se poser pour connaître la forme du λ
2. On peut donner une autre définition, totalement équivalente de fonction différentiable en x_0 :
   Soit f une fonction définie sur un domaine $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$ et soit $x_0 \in \mathcal{D}_f$
   On dit que f est <u>différentiable</u> en x_0, il existe un nombre $\alpha > 0$ et un nombre $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que, pour tout $x \in]x_0-\alpha; x_0+\alpha[$, on puisse écrire :

   $$f(x) = f(x_0)+\lambda(x-x_0)+(x-x_0)\varepsilon(x)$$

   où $\lim\limits_{x\to x_0}\varepsilon(x) = 0$ et ε une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$

4.1.2 Définition

L'application linéaire L telle que $L(h) = \lambda h$ est appelée application linéaire tangente à f en x_0 ou différentielle de f en x_0, notée $\mathrm{d}f_{x_0}$; nous avons donc $\mathrm{d}f_{x_0}(h) = \lambda h$

4.1.3 Proposition

Soit f une fonction définie sur un domaine $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$
Soient g et g_2, 2 fonctions numériques à valeurs réelles, définies sur $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$ et telles que

$$f(x) = g(x) + ig_2(x)$$

c'est à dire que g et g_2 sont respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de f
f est différentiable en $x_0 \in \mathcal{D}_f$ si et seulement si g et g_2 sont différentiables en $x_0 \in \mathcal{D}_f$

Démonstration

1. Supposons g et g_2 sont différentiables en $x_0 \in \mathcal{D}_f$
   - ▷ Alors, il existe $\alpha_1 > 0$, $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon_1 :]-\alpha_1; +\alpha_1[\longrightarrow \mathbb{R}$ tels que $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon_1(h) = 0$ et tout $h \in]-\alpha_1; +\alpha_1[$:
   $$g(x_0 + h) = g(x_0) + \lambda_1 \times h + h\varepsilon_1(h)$$
   - ▷ De même, il existe $\alpha_2 > 0$, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon_2 :]-\alpha_2; +\alpha_2[\longrightarrow \mathbb{R}$ tels que $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon_2(h) = 0$ et tout $h \in]-\alpha_2; +\alpha_2[$:
   $$g_2(x_0 + h) = g_2(x_0) + \lambda_2 \times h + h\varepsilon_2(h)$$

   Ainsi, pour $\alpha = \inf\{\alpha_1 : \alpha_2\}$ et tout $h \in]-\alpha; +\alpha[$:
   $$g(x_0 + h) + ig_2(x_0 + h) = g(x_0) + ig_2(x_0) + \lambda_1 \times h + i\lambda_2 \times h + h\varepsilon_1(h) + ih\varepsilon_2(h)$$
   C'est à dire, en posant $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$ et $\varepsilon = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2$
   $$f(x_0 + h) = f(x_0) + \lambda \times h + h\varepsilon(h)$$
   D'après les résultats sur les limites de fonctions à valeurs complexes 3.3.4, nous avons $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$ et donc, f est différentiable en $x_0 \in \mathcal{D}_f$
2. Réciproquement, supposons f différntiable en $x_0 \in \mathcal{D}_f$
   Alors, il existe un nombre $\alpha > 0$ et un nombre $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que, pour tout $h \in]-\alpha; +\alpha[$, on puisse écrire :
   $$f(x_0 + h) = f(x_0) + \lambda \times h + h\varepsilon(h)$$
   où $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$ et ε une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$
   On peut écrire, en utilisant parties réelles et imaginaires :
   $$g(x_0 + h) + ig_2(x_0 + h) = (g(x_0) + \lambda_1 \times h + h\varepsilon_1(h)) + i(g_2(x_0) + \lambda_2 \times h + h\varepsilon_2(h))$$
   Où $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$ et $\varepsilon = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2$. En identifiant parties réelles et imaginaires, nous avons, pour tout $h \in]-\alpha; +\alpha[$:
   - ▷ $g(x_0 + h) = g(x_0) + \lambda_1 \times h + h\varepsilon_1(h)$
   - ▷ Et $g_2(x_0 + h) = g_2(x_0) + \lambda_2 \times h + h\varepsilon_2(h)$

   Toujours d'après les limites de fonctions à valeurs complexes 3.3.4, nous avons $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon_1(h) = 0$ et $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon_2(h) = 0$
   Ce qui montre que g et g_2 sont différentiables en x_0

4.1.4 Proposition

Soit f une fonction définie sur un domaine $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$ et différentiable en $x_0 \in \mathcal{D}_f$
Alors le nombre λ est unique

Démonstration

Nous écrivons donc $f(x_0+h) = f(x_0) + \lambda_1 \times h + h\varepsilon(h)$ où $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$
Supposons qu'il existe un second nombre λ_1 tel que $f(x_0+h) = f(x_0)+\lambda_1 \times h + h\beta(h)$ avec $\lim\limits_{h\to 0} \beta(h) = 0$
Alors :

$$f(x_0) + \lambda h + h\varepsilon(h) = f(x_0) + \lambda_1 h + h\beta(h)$$

C'est à dire :

$$\lambda h - \lambda_1 h - h\beta(h) + h\varepsilon(h) = 0 \Longleftrightarrow h(\lambda - \lambda_1) + h(\varepsilon(h) - \beta(h)) = 0$$

Ce qui est équivalent à : $\lambda - \lambda_1 + (\varepsilon(h) - \beta(h)) = 0$
Or, par hypothèse, $\lim\limits_{h\to 0} (\varepsilon(h) - \beta(h)) = 0$, donc, $\lim\limits_{h\to 0} \lambda - \lambda_1 + (\varepsilon(h) - \beta(h)) = \lambda - \lambda_1 = 0$.
Donc, $\lambda = \lambda_1$.

Exemple 2 :

Nous prenons, ici, des exemples de fonctions numériques à valeurs réelles.

1. **Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui à x fait correspondre x^2 ; cette fonction est-elle différentiable en x_0 ?**

   Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et évaluons $f(x_0+h) - f(x_0)$, pour **en trouver une « partie linéaire »** ; nous avons :

   $$f(x_0+h) - f(x_0) = (x_0+h)^2 - x_0^2 = h^2 + 2x_0 h$$

   On a alors, évidemment, $\mathrm{d}f_{x_0}(h) = 2x_0 h$
   Ici, le nombre λ est donc $\lambda = 2x_0$. On peut faire remarquer que cette démonstration est valable pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$

2. **Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui à x fait correspondre x^3 ; cette fonction est-elle différentiable en x_0 ?**

   De la même manière, soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et évaluons $f(x_0+h) - f(x_0)$, pour en trouver une partie linéaire ; nous avons :

   $$f(x_0+h) - f(x_0) = (x_0+h)^3 - x_0^3 = h^3 + 3x_0^2 h + 3x_0 h^2 + h(3x_0 h)$$

   On a alors, évidemment, $\lambda = 3x_0^2$ et $\mathrm{d}f_{x_0}(h) = 3x_0^2 h$ avec $\varepsilon(h) = 3x_0 h + h^2$

4.1.5 Propriété importante

Si f est différentiable en x_0, alors f est continue en x_0. La réciproque est fausse.

Démonstration

Supposons que f soit différentiable en x_0 ; nous avons alors :

$$f(x_0+h) - f(x_0) = h[\lambda + \varepsilon(h)]$$

Comme λ est fini, que $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$, nous avons $\lim\limits_{h\to 0} h[\lambda + \varepsilon(h)] = 0$, c'est à dire que

$$\lim_{h\to 0} (f(x_0+h) - f(x_0)) = 0$$

Donc $\lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$, c'est à dire que f est continue en x_0

Exemple 3 :

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui à x fait correspondre $|x|$; cette fonction est-elle différentiable en 0 ?

Évaluons $f(0+h) - f(0)$, pour en trouver une partie linéaire ; nous avons :

$$f(h) - f(0) = |h|$$

On a alors, évidemment, $f(h) - f(0) = h$ si $h > 0$ et $f(h) - f(0) = -h$ si $h < 0$.
En posant $L(h) = h$ si $h > 0$ et $L(h) = -h$ si $h < 0$, on n'a évidemment pas L linéaire.[1]
Ce qui montre que la valeur absolue n'est pas différentiable en 0. On peut remarque que **la valeur absolue est continue sans être différentiable.**

Remarque 3 :

Il existe donc des fonctions continues sans être différentiables. Qu'apporte la différentiabilité de plus ? Une notion de régularité de la courbe.

1. Pour le démontrer, il suffit de prendre des cas particulier : $L(2+(-1)) = L(1) = 1$, alors que$L(2)+L(-1) = 2+1 = 3$