4.2 Différentiabilité et dérivabilité

Dans cette partie, nous faisons le lien entre la dérivabilité et la différentiabilité. Et on montre que, pour les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$, c'est exactement la même notion.

4.2.1 Définition

Soit f une fonction définie sur un domaine à valeurs dans $\mathbb{C}$ et soit $x_0 \in \mathcal{D}_f$
f est dite dérivable en x_0, si et seulement si : $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ est finie.
Cette limite finie est alors notée $f'(x_0)$ et est appelé nombre dérivé de f en x_0

Remarque 4 :

En posant $h = x - x_0$, cette définition est équivalente à $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ est finie

4.2.2 Proposition

Soit f une fonction définie sur un domaine $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$
Soient g_1 et g_2, 2 fonctions numériques à valeurs réelles, définies sur $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$ et telles que

$$f(x) = g_1(x) + i g_2(x)$$

C'est à dire que g_1 et g_2 sont respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de f
f est dérivable en $x_0 \in \mathcal{D}_f$ si et seulement si g_1 et g_2 sont dérivables en $x_0 \in \mathcal{D}_f$ et :

$$f'(x_0) = g_1'(x_0) + i g_2'(x_0)$$

Démonstration

1. Supposons f dérivable en $x_0 \in \mathcal{D}_f$
   Alors $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$, et, pour simplifier, posons $f'(x_0) = a_0 + i b_0$
   Or, $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \dfrac{g_1(x) - g_1(x_0)}{x - x_0} + i \dfrac{g_2(x) - g_2(x_0)}{x - x_0}$
   D'après les résultats sur les limites de fonctions à valeurs complexes 3.3.4, $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe si et seulement si $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{g_1(x) - g_1(x_0)}{x - x_0}$ et $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{g_2(x) - g_2(x_0)}{x - x_0}$ existent et nous avons alors $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{g_1(x) - g_1(x_0)}{x - x_0} = a_0$ et $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{g_2(x) - g_2(x_0)}{x - x_0} = b_0$, ce qui signifie que g_1 et g_2 sont dérivables en x_0, et nous avons $g_1'(x_0) = a_0$ et $g_2'(x_0) = b_0$
2. La réciproque est évidente et utilise une fois de plus 3.3.4

Exemple 4 :

Ainsi, la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = e^{ix}$ est-elle dérivable pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$ et nous avons $f'(x_0) = i e^{i x_0}$

La démonstration est simple, puisque $f(x) = e^{ix} = \cos x + i \sin x$ et nous avons d'après 4.2.2
$f'(x_0) = -\sin x_0 + i \cos x_0 = i(\cos x_0 + i \sin x_0) = i e^{i x_0}$

4.2.3 Théorème

Soit f une fonction définie sur un domaine $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ et soit $x_0 \in \mathcal{D}_f$
f est dérivable en x_0, si et seulement si f est différentiable en x_0

Démonstration

1. Supposons f différentiable en x_0
   Alors, dans un voisinage $I \subset \mathcal{D}_f$ de x_0, f peut s'écrire :
   $$f(x_0+h) - f(x_0) = \lambda h + h\alpha(h)$$
   Et donc, dans ce voisinage $I \subset \mathcal{D}_f$
   $$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lambda + \alpha(h)$$
   D'où $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \lambda + \alpha(h) = \lambda$.
   f est donc dérivable en x_0, et on a alors $f'(x_0) = \lambda$
2. Supposons, maintenant, f dérivable en x_0
   Nous appelons $A = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$
   On pose alors :
   $$\varepsilon(h) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - A$$
   Alors $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$, et nous avons, clairement :
   $$f(x_0+h) = f(x_0) + Ah + h\varepsilon(h)$$
   Ce qui montre que f est différentiable en x_0

Remarque 5 :

1. Pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, **il y a donc équivalence entre fonction dérivable et fonction différentiable**
2. Ainsi, si f est dérivable en x_0, alors f est continue en x_0
3. La réciproque est fausse : il existe des fonctions qui sont continues sans être dérivables : il suffit de penser à la fonction $|x|$ qui est continue, sans être dérivable.
4. Voilà notre réponse : **nous avons** $\lambda = f'(x_0)$
5. De ce théorème, nous pouvons déduire que, si f est dérivable *(ou différentiable)*, alors il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x \in \left]x_0 - \alpha ; x_0 + \alpha\right[$, on ait :
   $$f(x) = f(x_0) + hf'(x_0) + h\varepsilon(h)$$

Exemple 5 :

La fonction $\sin x$ est-elle dérivable *(ou différentiable)* en $x_0 \in \mathbb{R}$?
Pour ce faire, nous étudions $\sin(x_0+h) - \sin x_0$.
Les formules d'addition montrent que :
$$\sin(x_0+h) - \sin x_0 = 2\sin\left(\frac{h}{2}\right) \times \cos\left(x_0 + \frac{h}{2}\right)$$
Ce qui donne :
$$\frac{\sin(x_0+h) - \sin x_0}{h} = \frac{2}{h}\sin\left(\frac{h}{2}\right) \times \cos\left(x_0 + \frac{h}{2}\right)$$
Or, $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{2}{h}\sin\left(\dfrac{h}{2}\right) = 1$ et $\lim\limits_{h\to 0} \cos\left(x_0 + \dfrac{h}{2}\right) = \cos x_0$ et donc :
$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x_0+h) - \sin x_0}{h} = \cos x_0$$
Ce qui montre que $\sin' x_0 = \cos x_0$

Remarque 6 :

Les notions de dérivées à droite ou de dérivée à gauche sont à retravailler dans le cours de L_0

4.2.4 Quelques exercices

Exercice 1 :

1. On considère la fonction f, définie, pour tout $x \in [-1;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x^3+x^2}$. Etudier la dérivabilité de f en $x_0 = 0$
2. Même question pour la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\left\{ \begin{array}{ccl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \left\{ \begin{array}{l} x^2 \sin \dfrac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Exercice 2 :

On dit qu'une fonction f satisfait à la condition de Lipschitz d'ordre α en x_0 s'il existe un nombre positif $M > 0$ et un intervalle $I =]x_0 - a : x_0 + a[$ *(avec $a > 0$)* tel que, pour tout $x \in I$,

$$|f(x) - f(x_0)| < M |x - x_0|^{\alpha}$$

1. Montrer qu'une fonction qui vérifie une condition de Lipschitz d'ordre $\alpha > 0$ est continue en x_0
2. Montrer qu'une fonction qui vérifie une condition de Lipschitz d'ordre $\alpha > 1$ est dérivable en x_0 et de dérivée nulle

Exercice 3 :

Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et f, une fonction définie dans un voisinage de x_0 à valeurs dans $\mathbb{R}$ et dérivable en x_0. Démontrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $b \in \mathbb{R}$ tels que $a > 0$ et $b > 0$,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + bh) - f(x_0 - ah)}{(a+b)h} = f'(x_0)$$

Exercice 4 :

1. Soit $f :]-1;+1[\longrightarrow \mathbb{R}$ une application dérivable en 0. On considère 2 suites réelles $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui, toutes deux, tendent vers 0 et telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 < a_n < 0 < b_n < 1$.

   Montrer que la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $X_n = \dfrac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n}$ converge vers $f'(0)$
2. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application dérivable en $x_0 \in \mathring{I}$. Démontrer que :

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0 \\ k \to 0 \\ k > 0}} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - k)}{h + k} = f'(x_0)$$

Exercice 5 :

Soit $I \subset \mathbb{R}$, un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction dérivable à gauche et à droite de $x_0 \in I$. Démontrer que f est continue en $x_0 \in I$.