4.3 Opérations et fonctions dérivées

Nous considérerons toujours les fonctions numériques réelles à valeurs dans $\mathbb{C}$. Beaucoup de résultats présentés ci-après ont une démonstration identique à celles que nous présentons dans le cours de L_0 ; nous les rappelons ici et les démonstrations seront à refaire seuls

4.3.1 Théorème

Soient f, g et h, 3 fonctions définies sur un même domaine $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$ et toutes dérivables en $x_0 \in \mathcal{D}$;. Alors :

1. **$f+g$, fg sont dérivables en $x_0 \in \mathcal{D}$. Si $g(x_0) \neq 0$, alors $\dfrac{f}{g}$ est dérivable en x_0**
2. **Nous avons :**
   (a) $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
   (b) $(f \times g)'(x_0) = f'(x_0) \times g(x_0) + f(x_0) \times g'(x_0)$
   (c) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0) \times g(x_0) - f(x_0) \times g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$ **avec, bien entendu** $g(x_0) \neq 0$

Démonstration

Retrouver la démonstration dans le cours de L_0

4.3.2 Dérivée des fonctions composées

Soit f une fonction numérique d'une variable réelle définie sur $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et dérivable en $x_0 \in \mathcal{D}_f$
Soit g une fonction numérique d'une variable réelle définie sur $\mathcal{D}_g \subset \mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$; on suppose $f(\mathcal{D}_f) \subset \mathcal{D}_g$ et g dérivable en $y_0 = f(x_0)$
Alors, $g \circ f$ est dérivable en x_0 et :

$$(g \circ f)'(x_0) = g' \circ f(x_0) \times f'(x_0) = g'(y_0) \times f'(x_0)$$

Démonstration

Retrouver la démonstration dans le cours de L_0 ; il faut remarquer la cohérence des différents domaines

4.3.3 Définition

Soit f une fonction définie sur un domaine $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$ et soit $\mathcal{U} \subset \mathcal{D}_f$

- **On dit que f est dérivable sur $\mathcal{U}$ si et seulement si, pour tout $x \in \mathcal{U}$, $f'(x)$ existe.**
- **L'application**

$$\begin{cases} f' : \mathcal{U} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \quad x & \longmapsto & f'(x) \end{cases}$$

s'appelle fonction dérivée de f ; cette fonction est parfois notée $f' = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$

4.3.4 Opération sur les dérivées

1. **Somme de deux fonctions**
   Si f et g sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{C}$, alors $f+g$ est dérivable sur I et

$$(f+g)' = f' + g'$$

2. **Produit par un scalaire**
Si f est une fonction dérivable sur intervalle I à valeurs dans $\mathbb{C}$, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, λf est dérivable sur I et
$$(\lambda f)' = \lambda f'$$
3. **Produit de deux fonctions**
Si f et g sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{C}$, alors $f \times g$ est dérivable sur I et
$$(f \times g)' = g \times f' + g' \times f$$
4. **Quotient de deux fonctions**
Si f et g sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{C}$ et si la fonction g ne s'annule pas sur I, alors $\dfrac{f}{g}$ est dérivable sur I et
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' g - g' f}{g^2}$$

Démonstration

C'est une application directe et évidente de 4.3.1

4.3.5 Fonction dérivée des fonctions composées

Soit f une fonction numérique d'une variable réelle définie sur $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$ et dérivable sur un intervalle $I \subset \mathcal{D}_f$
Soit g une fonction numérique d'une variable réelle définie sur $\mathcal{D}_g \subset \mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$ et dérivable sur un intervalle $J \subset \mathcal{D}_g$ on suppose $f(I) \subset J$
Alors, $g \circ f$ est dérivable sur l'intervalle I et :
$$(g \circ f)' = g' \circ f \times f'$$

Démonstration

C'est une application directe et évidente de 4.3.2

Exercice 6 :

1. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle symétrique par rapport à 0, c'est à dire que si $x \in I$, alors $-x \in I$. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, une application dérivable sur I.
Démontrer que si f est paire, alors f' est impaire et que si f est impaire, alors f' est paire.
2. Soit $T \in \mathbb{R}$ tel que $T > 0$ et soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application périodique et de période T, dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que f' est périodique et de période T

4.3.6 Dérivée d'ordre supérieur

1. **On appelle $f^{(0)}$ la dérivée d'ordre 0 de f, c'est à dire $f^{(0)} = f$**
2. **Si $n \geqslant 1$, la dérivée n-ième de f est définie par récurrence, par :**
$$f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'$$
3. **On note aussi, parfois, $f^{(n)}(x) = \dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(f(x))$**

Remarque 7 :

Pour que la dérivée n-ième de f en a $f^{(n)}(a)$ existe, il faut, au moins, que $f^{(n-1)}$ soit continue en a ; c'est une conditionn écessaire, mais pas suffisante

4.3.7 Définition de fonction de classe $\mathcal{C}^n$

Soit f une fonction numérique d'une variable réelle définie sur $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$

- **f est dite de classe $\mathcal{C}^n$ et et seulement si la dérivée n-ième $f^{(n)}$ existe et est continue**
- **Si, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, f est de classe $\mathcal{C}^n$, alors f est dite de classe $\mathcal{C}^\infty$**

Remarque 8 :

1. Pour $n = 0$, les fonctions de classe $\mathcal{C}^0$ sont les fonctions continues
2. Si f est de classe $\mathcal{C}^n$, alors, pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, f est de classe $\mathcal{C}^k$
3. Soit $I \subset \mathbb{R}$; il est évident que l'ensemble $\mathcal{C}^n(I)$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ définies sur I et à valeurs dans $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel pour les opérations classiques d'addition et de multiplication des fonctions par un scalaire.

4.3.8 Formule de Leibniz

Soient f et g, deux fonctions qui admettent des dérivées n-ièmes en a ; alors, fg admet aussi une dérivée n-ième en a et

$$(fg)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k f^{(k)}(a)\, g^{(n-k)}(a)$$

Démonstration

La démonstration se fait par récurrence avec le même principe que celle du binôme de Newton.

- **Vérifions pour le premier terme $n = 0$**
  Alors, $(fg)^{(0)}(a) = (fg)(a) = f(a)\,g(a)$, et

$$\sum_{k=0}^{0} \mathrm{C}_0^k f^{(k)}(a)\, g^{(0-k)}(a) = f^{(0)}(a)\, g^{(0)}(a) = f(a)\, g(a)$$

  La propriété énoncée est donc vraie pour $n = 0$
- **Supposons la propriété vraie à l'ordre n**
  C'est à dire suposons que

$$(fg)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k f^{(k)}(a)\, g^{(n-k)}(a)$$

- **Démontrons la propriété à l'ordre $n+1$**
  Alors :

$$\begin{aligned}(fg)^{(n+1)}(a) &= \left((fg)^{(n)}(a)\right)' \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k f^{(k)}(a)\, g^{(n-k)}(a)\right)' \\ &= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k \left(f^{(k)}(a)\, g^{(n-k)}(a)\right)'\end{aligned}$$

  D'après les formules donnant la dérivée du produit, nous avons :

$$\begin{aligned}\left(f^{(k)}(a)\, g^{(n-k)}(a)\right)' &= \left(f^{(k)}(a)\right)' g^{(n-k)}(a) + f^{(k)}(a)\left(g^{(n-k)}(a)\right)' \\ &= f^{(k+1)}(a)\, g^{(n-k)}(a) + f^{(k)}(a)\, g^{(n+1-k)}(a)\end{aligned}$$

De telle sorte que, en passant à la sommation :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k \left(f^{(k)}(a)\, g^{(n-k)}(a)\right)' &= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k \left(f^{(k+1)}(a)\, g^{(n-k)}(a) + f^{(k)}(a)\, g^{(n+1-k)}(a)\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k f^{(k+1)}(a)\, g^{(n-k)}(a) + \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k f^{(k)}(a)\, g^{(n+1-k)}(a) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \mathrm{C}_n^{k-1} f^{(k)}(a)\, g^{(n-(k-1))}(a) + \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k f^{(k)}(a)\, g^{(n+1-k)}(a) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\mathrm{C}_n^{k-1} + \mathrm{C}_n^k\right) f^{(k)}(a)\, g^{(n+1-k)}(a) + \mathrm{C}_n^n f^{(n+1)}(a)\, g(a) + \mathrm{C}_n^0 f(a)\, g^{(n+1)}(a)\end{aligned}$$

D'après les résultats sur les coefficients binômiaux ; nous avons :

$$\begin{aligned}\mathrm{C}_n^{k-1} + \mathrm{C}_n^k &= \mathrm{C}_{n+1}^k \\ \mathrm{C}_n^n &= \mathrm{C}_{n+1}^{n+1} = 1 \\ \mathrm{C}_n^0 &= \mathrm{C}_{n+1}^0 = 1\end{aligned}$$

D'où nous tirons :

$$\begin{aligned}(fg)^{(n+1)}(a) &= \sum_{k=1}^{n} \left(\mathrm{C}_n^{k-1} + \mathrm{C}_n^k\right) f^{(k)}(a)\, g^{(n+1-k)}(a) + \mathrm{C}_n^n f^{(n+1)}(a)\, g(a) + \mathrm{C}_n^0 f(a)\, g^{(n+1)}(a) \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \mathrm{C}_{n+1}^k f^{(k)}(a)\, g^{(n+1-k)}(a)\end{aligned}$$

Ce que nous voulions

Exercice 7 :

Soit $f(x) = x^n(1+x^n)$; en calculant de 2 manières différentes la dérivée *n-ième* de f, donner une expression simple de $\sum_{k=0}^{n} \left(\mathrm{C}_n^k\right)^2$

4.3.9 Conséquences de la formule de Leibniz

1. **Le produit de deux applications de classe $\mathcal{C}^n$ définies sur le même intervalle $I \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ est aussi une application de classe $\mathcal{C}^n$**
2. **Plus généralement, le produit d'un nombre fini d'applications de classe $\mathcal{C}^n$ définies sur le même intervalle $I \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ est aussi une application de classe $\mathcal{C}^n$**
3. **Le produit d'un nombre fini d'applications de classe $\mathcal{C}^\infty$ définies sur le même intervalle $I \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ est aussi une application de classe $\mathcal{C}^\infty$**

4.3.10 Proposition

Soit f une fonction définie sur $I \subset \mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^n$ sur I
Soit g une fonction définie sur $J \subset \mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$ et de classe $\mathcal{C}^n$ sur I
On suppose $f(I) \subset J$
Alors $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^n$

Démonstration

Nous allons faire une récurrence sur n

1. Pour $n = 0$, si f et g sont de classe $\mathcal{C}^0$, c'est à dire continues, alors $g \circ f$ est continue et donc de classe $\mathcal{C}^0$
2. Supposons que si f et g sont de classe $\mathcal{C}^n$, alors $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^n$
3. Démontrons maintenant que si f et g sont de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, alors $g \circ f$ est aussi de classe $\mathcal{C}^{n+1}$

   Si nous démontrons que $(g \circ f)'$ est de classe $\mathcal{C}^n$, nous aurons alors démontré que $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$

   Tout d'abord, $g \circ f$ est dérivable et $(g \circ f)' = f' \times g' \circ f$
   - f étant de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, alors f' est de classe $\mathcal{C}^n$
   - De même, g' est de classe $\mathcal{C}^n$ et f est de classe $\mathcal{C}^n$ *(puisque f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$)*; donc, **d'après l'hypothèse de récurrence**, $g' \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^n$

   Par produit, $f' \times g' \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^n$ et donc $(g \circ f)'$ est de classe $\mathcal{C}^n$

   Ce que nous voulions

La proposition est ainsi démontrée

4.3.11 Dérivée de la fonction réciproque : Rappels

Nous ne traitons dans cette section que les fonctions à valeurs réelles

Soit f une fonction définie sur un domaine $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit $\mathcal{U} \subset \mathcal{D}_f$. On suppose f continue et strictement monotone sur $\mathcal{U}$, et donc bijective sur $\mathcal{U}$; alors

1. **Si f est dérivable sur $\mathcal{U}$, alors, f^{-1} est dérivable en tout point y_0 de $f(\mathcal{U})$ tel que si $y_0 = f(x_0)$, alors $f^{'}(x_0) \neq 0$ et, alors,**

$$\left(f^{-1}\right)^{'}(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(y_0)}$$

2. **Si f' ne s'annule jamais sur I, alors f^{-1} est dérivable sur $f(I)$, et**

$$\left(f^{-1}\right)^{'} = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

Démonstration

Retrouver la démonstration en L_0

4.3.12 Dérivée des fonctions trigonométriques réciproques

1. **La fonction dérivée de $\arcsin(x)$ définie pour tout $x \in [-1; +1]$ est :**

$$\arcsin^{'}(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

2. **La fonction dérivée de $\arccos(x)$ définie pour tout $x \in [-1; +1]$ est :**

$$\arccos^{'}(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

3. **La fonction dérivée de $\arctan(x)$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ est :**

$$\arctan^{'}(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Démonstration

1. **Montrons que** $\arcsin^{'}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

   Nous avons, bien sûr, d'après 4.3.11, $\arcsin^{'}(x) = \dfrac{1}{\sin^{'}[\arcsin x]} = \dfrac{1}{\cos[\arcsin x]}$.

   Or, si $y = \arcsin x$, alors $y \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$, $x \in [-1;+1]$ et $x = \sin y$.

   Nous cherchons donc une expression de $\sin y$ en fonction de x.

   Comme la dérivée de sin est $\sin^{'}(y) = \cos y = \sqrt{1-\sin^2 y}$ puisque nous avons $\cos y \geq 0$, car $y \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$

   Donc, nous avons $\sin^{'}(y) = \cos y = \sqrt{1-x^2}$, c'est à dire que la dérivée de $\arcsin x$ est donnée par :

$$\arcsin^{'}(x) = \frac{1}{\cos[\arcsin x]} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

2. **Montrons que** $\arccos^{'}(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

   Toujours, d'après 4.3.11, nous avons $\arccos^{'}(x) = \dfrac{1}{\cos^{'}[\arccos x]} = \dfrac{-1}{\sin[\arccos x]}$.

   Or, si $y = \arccos x$, alors $y \in [0;\pi]$, $x \in [-1;+1]$ et $x = \cos y$.

   Nous cherchons donc une expression de $\cos y$ en fonction de x.

   D'après l'identité $\cos^2 y + \sin^2 y = 1$, nous avons $\sin y = \sqrt{1-\cos^2 y}$ puisque nous avons $\sin y \geq 0$, car $y \in [0;\pi]$

   Donc, nous avons $\sin y = \sqrt{1-x^2}$, c'est à dire que la dérivée de $\arccos x$ est donnée par :

$$\arccos^{'}(x) = \frac{-1}{\sin[\arccos x]} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

3. **Montrons que** $\arctan^{'}(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

   Comme pour arcsin et arccos, et toujours d'après 4.3.11, nous avons $\arctan^{'}(x) = \dfrac{1}{\tan^{'}[\arctan x]}$.

   Or, la dérivée de $\tan x$ est donnée par $\tan^{'}(x) = 1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

   Nous avons donc, $\arctan^{'}(x) = \dfrac{1}{1+\tan^2[\arctan x]} = \dfrac{1}{1+x^2}$

4.3.13 Formulaire donnant quelques dérivées usuelles

En plus des dérivées décrites dans le cours, voici quelques fonctions dérivées.

Fonction $f(x)$	Paramètres	Dérivée $f'(x)$	Ensemble de définition de $f'(x)$
$u+v$		$u'+v'$	
$u\times v$		$u'v+v'v$	
$\frac{u}{v}$		$\frac{u'v-v'u}{v^2}$	
x^n	$n\in\mathbb{N}$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
x^n	$n\in\mathbb{Z}^-$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}^*$
x^α	$\alpha\in\mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\mathbb{R}^+$
$e^{u(x)}$		$u'(x)\,e^{u(x)}$	
$\ln\lvert u(x)\rvert$		$\frac{u'(x)}{u(x)}$	
$\log_a\lvert x\rvert$	$a\in\mathbb{R}^*-\{+1\}$	$\frac{1}{x\ln a}$	$\mathbb{R}^*$
a^x	$a\in\mathbb{R}^{*+}$	$a^x\ln a$	
$\tan x$		$1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}\right\}$
$\arctan x$		$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$
$\arcsin x$		$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1;+1[$
$\arccos x$		$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1;+1[$
$\sin u(x)$		$u'(x)\cos u(x)$	$\mathbb{R}$
$\cos u(x)$		$-u'(x)\sin u(x)$	$\mathbb{R}$
$(u(x))^n$		$nu'(x)\,(u(x))^{n-1}$	$\mathbb{R}$

4.3.14 Théorème de prolongement de la dérivée

Soit f une fonction numérique d'une variable réelle définie sur $\mathcal{D}_f$ et soit $[a;b] \subset \mathcal{D}_f$.
On suppose f continue sur $[a;b]$, dérivable sur $]a;b[$ et $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a}} f^{'}(x) = l$

Alors, $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a}} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = l$

Remarque 9 :

1. Ceci veut dire que si $f^{'}$, la fonction dérivée de f admet une limite finie lorsque x tend vers a, à droite de a, alors la fonction f est dérivable à droite de a.
2. Bien évidemment, ceci se généralise à gauche de a et en a globalement.

Démonstration

Soit $\varepsilon > 0$
On va écrire que $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a}} f^{'}(x) = l$.

Il existe $\eta_\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $x \in]a;b[$, $0 < x - a \leq \eta_\varepsilon \Longrightarrow \left| f^{'}(x) - l \right| < \varepsilon$, c'est à dire tel que $l - \varepsilon < f^{'}(x) < l + \varepsilon$
Pour $x \in]a; a + \eta_\varepsilon[$, on applique le théorème des accroissements finis à l'intervalle $[a;x]$.
Il existe donc $c \in]a;x[$ tel que $f^{'}(c) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$
Donc, $l - \varepsilon < \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} < l + \varepsilon$, ce qui est équivalent à :

$$\left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - l \right| \leqslant \varepsilon$$

C'est à dire que $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a}} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = l$, et f est bien dérivable à droite de a, de dérivée $f_d^{'}(a) = l$
Ce que nous voulions.

Remarque 10 :

1. Soit $f(x) = \dfrac{x \ln x - x}{x + 1}$. f n'est définie que sur $\mathbb{R}^{\star +}$; on peut, par contre, prolonger f par continuité car $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$, et on peut donc poser $f(0) = 0$
   $f^{'}(x) = \dfrac{x + \ln x}{(x+1)^2}$, avec $\lim\limits_{x \to 0} f^{'}(x) = -\infty$ et f admet une demie tangente en $x = 0$
2. **La réciproque est fausse.**
   Si on prend comme contre-exemple, la fonction f définie par $f(x) = x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$, on peut donc prolonger f par continuité en 0, en posant $f(0) = 0$
   Nous avons $f'(x) = 2x \sin \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x}$, et cette fonction n'admet pas de limite lorsque x tend vers zéro, alors que f est dérivable en 0, car $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ On a donc :

$$f \text{ dérivable en } x_0 \nRightarrow \lim_{x \to x_0} f'(x) \text{ existe}$$