4.3.15 Quelques exercices

Exercice 8 :

Voici une autre méthode pour résoudre une question déjà posée dans le chapitre sur la continuité

Soit $f(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$ définie pour $x \neq 0$.

1. Calculez la dérivée de f.
2. En déduire que si $x > 0$, alors $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$, et que si $x < 0$ alors $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$

Exercice 9 :

Soit f, la fonction définie par :

$$f(x) = x + x^2 \sin \frac{1}{x^2} \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = 0$$

1. Montrer que f est dérivable en 0 et donner $f'(0)$
2. Montrer que f n'est monotone sur aucun des voisinages de 0

Exercice 10 :

Calculer les dérivées des fonctions suivantes, en précisant les domaines de définition de f et de f'

1. $f(x) = \arctan \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$
2. $f(x) = \arctan \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$
3. $f(x) = \arcsin \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) - 2\arctan x$
4. $f(x) = \arccos \left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$

Exercice 11 :

Calculer les dérivées n-ièmes des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = \frac{x^5}{1+x}$
2. $f_2(x) = \frac{x^4}{(1+x)^3}$
3. $f_3(x) = \arctan x$
4. $f_4(x) = \ln\left(x^2+1\right) - \arctan x$
5. $f_5(x) = x^{n-1} \ln x$
6. $f_6(x) = x^2 (1+x)^n$

Exercice 12 :

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   Soit $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction n fois dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $g_n : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ une autre fonction définie, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ par $g_n(x) = x^{n-1} f\left(\frac{1}{x}\right)$
   Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $g_n^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}} f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right)$
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f_\alpha :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_\alpha(x) = x^\alpha \ln x$.
   Montrer qu'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et une suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $f_\alpha^{(n)}(x) = x^{\alpha-n}(a_n \ln x + b_n)$

Exercice 13 :

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $I \subset \mathbb{R}$. On considère une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et s'annulant en $n+1$ points de I tous distincts

1. Démontrer que la dérivée n-ième de f s'annule au moins une fois sur I
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Démontrer que la dérivée $n-1$-ième de $\varphi = f' + \alpha f$ s'annule au moins une fois sur I

Exercice 14 :

Première généralisation du théorème de Rolle
Soit $a \geqslant 0$ et $f : [a; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, continue sur $[a; +\infty[$, dérivable sur $]a; +\infty[$ et telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = f(a)$. Montrer qu'il existe $c \in]a; +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$

Exercice 15 :

Seconde généralisation du théorème de Rolle
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$ et telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$
Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$

Exercice 16 :

Troisième généralisation du théorème de Rolle
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$ et telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = k$ où k est fini
Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$

Exercice 17 :

Règle de L'Hospital

1. Soient f et g 2 fonctions continues sur l'intervalle $[a; b]$ et dérivables sur l'intervalle $]a; b[$. Soit $x_0 \in [a; b]$; on suppose que g' ne s'annule pas sur $]a; b[$ et que $f(x_0) = g(x_0) = 0$
   Montrer que $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l \Longrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$
2. <u>Applications</u>
   Donner :

   (a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x) - x}{x^2}$

   (b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \sin x}{x^3}$

Exercice 18 :

Démontrer les inégalités suivantes :

1. Si $0 < x < 1$, alors $\arcsin x < \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$
2. Si $x > 0$, alors $\arctan x > \dfrac{x}{1 + x^2}$

Exercice 19 :

<u>Théorème de Darboux</u>
Soit $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction dérivable sur l'intervalle $[a; b]$. On suppose $f'(a) < f'(b)$.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f'(a) < \lambda < f'(b)$. Démontrer qu'il existe $c \in]a; b[$ tel que $f'(c) = \lambda$

Exercice 20 :

Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et dérivable sur $\mathbb{R}^+$. On suppose que la fonction dérivée f' est strictement décroissante et positive sur $\mathbb{R}^+$

1. Démontrer que pour tout $x \geqslant 1$, nous avons :
$$f(x+1) - f(x) < f'(x) < f(x) - f(x)$$
2. En déduire que si f admet une limite finie A en $+\infty$, c'est à dire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$ où A est finie, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 0$

3. On définit la suite $(S_p)_{p\geqslant 1}$ par :

$$S_p = f'(1) + f'(2) + \cdots + f'(p) = \sum_{k=1}^{p} f'(k)$$

Démontrer que la suite $(S_p)_{p\geqslant 1}$ est convergente si et seulement si f admet une limite finie A lorsque A tend vers $+\infty$

4. Applications : Quelle est la nature des suites $(a_p)_{p\geqslant 1}$ et $(b_p)_{p\geqslant 1}$ suivantes :

(a) $a_p = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{1+k^2}$ (b) $b_p = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{\sqrt{1+k}}$ (c) $c_p = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k}$

5. Nous définissons les suites $(\sigma_p)_{p\geqslant 1}$ et $\left(\sigma'_p\right)_{p\geqslant 1}$ par :

$$\sigma_p = S_p - f(p+1) \qquad \text{et} \qquad \sigma'_p = S_p - f(p)$$

   (a) Démontrer que les suites $(\sigma_p)_{p\geqslant 1}$ et $\left(\sigma'_p\right)_{p\geqslant 1}$ sont monotones
   (b) Démontrer que, pour tout $p \geqslant 1$, $\sigma_p < \sigma'_p$
   (c) Trouver une condition nécessaire et suffisante sur la fonction f' pour que les suites $(\sigma_p)_{p\geqslant 1}$ et $\left(\sigma'_p\right)_{p\geqslant 1}$ soient adjacentes

Exercice 21 :

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f : [a; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, définie, continue et dérivable sur $[a; +\infty[$.

1. On suppose que $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$. Démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
2. On suppose, cette fois ci, que $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$. Démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$
3. On suppose que $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = l$ où $l > 0$. Démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = l$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$