4.4 Formules de Taylor

Nous avons la formule, exacte pour les polynômes de degré n, en fonction des dérivées successives [2] :

$$P(X) = P(0) + XP'(0) + X^2\frac{P''(0)}{2} + \cdots + X^k\frac{P^{(k)}(0)}{k\,!} + \cdots + X^n\frac{P^{(n)}(0)}{n\,!}$$

Cette formule peut-elle se généraliser pour une fonction quelconque ?
L'idée est de construire un polynôme de degré n, ***à partir de** f*, et de déterminer l'erreur commise en substituant ce polynôme à la fonction elle-même.
Exemples d'approximations, non forcément linéaires de $\ln(1+x)$ que nous illustrons dans la figure 4.2 :

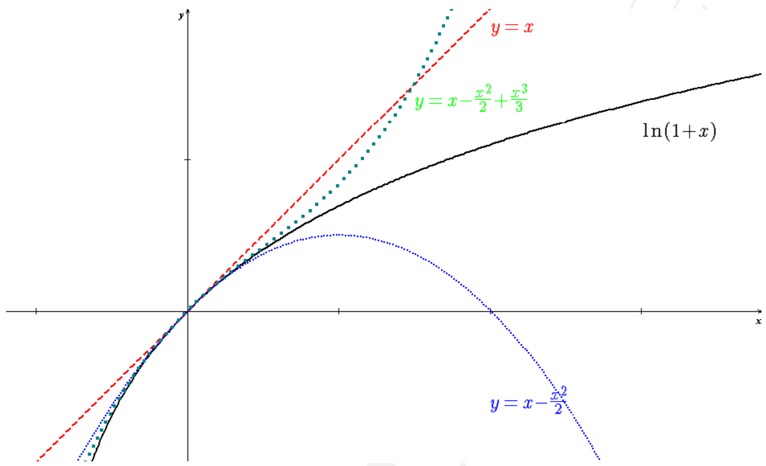

FIGURE 4.2 – Approximation de degré 1 de $\ln(1+x)$ par la droite $y = x$, de degré 2 par la parabole $y = x - \dfrac{x^2}{2}$, de degré 3 par la cubique $y = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$

4.4.1 Théorème : formule de Taylor-Lagrange

Soit $f : [a\ b] \longrightarrow \mathbb{C}$, une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur l'intervalle $[a\ b]$ admettant sur l'intervalle ouvert $]a\ b[$ une dérivée $n+1$-ième.
Soit $\alpha \in [a\ b]$. Nous appelons $P_{n,f}$ le polynôme de Taylor associé à f. Ce polynôme a pour expression, pour tout $x \in [a\ b]$:

$$P_{n,f}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k\,!}(x-\alpha)^k$$

Alors, il existe c compris entre x et α tel que

$$f(x) = P_{n,f}(x) + (x-\alpha)^{n+1}\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)\,!}$$

Démonstration

Sans être difficile, c'est une démonstration particulièrement longue et qui risque, si nous n'y prenons pas garde, de nous embrouiller. C'est le théorème de Rolle appliqué une infinité de fois ; Ce théorème pourrait être regardé comme l'une des généralisations du théorème des accroissements finis.
Soit $\alpha \in [a\ b]$

2. Cette formule est démontrée en exercice

1. On reprend le polynôme de Taylor appliqué à f en α, donc, pour $x \in [a\ b]$:
$$P_{n,f}(x) = f(\alpha) + (x-\alpha) f'(\alpha) + (x-\alpha)^2 \frac{f''(\alpha)}{2} + \cdots + (x-\alpha)^k \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k\,!} + \cdots + (x-\alpha)^n \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n\,!}$$
2. Il faut remarquer que $P_{n,f}(\alpha) = f(\alpha)$, et que, même plus généralement, en tenant compte des formules sur les dérivées successives :
$$P_{n,f}^{(k)}(\alpha) = f^{(k)}(\alpha)$$
3. Soit $\varphi(x) = f(x) - P_{n,f}(x) - M(x-\alpha)^{n+1}$; alors :
$$\varphi(\alpha) = \varphi'(\alpha) = \varphi^{(2)}(\alpha) = \cdots = \varphi^{(k)}(\alpha) = \cdots = \varphi^{(n)}(\alpha) = 0$$
4. Choisissons M tel que $\varphi(x) = 0$; nous avons, bien évidemment :
$$M = \frac{f(x) - P_{n,f}(x)}{(x-\alpha)^{n+1}}$$
5. Comme $\varphi(x) = \varphi(\alpha) = 0$, d'après le théorème de Rolle, il existe c_1 entre x et α, *(c'est à dire $c_1 \in]x;\alpha[$ ou $c_1 \in]\alpha;x[$)* tel que $\varphi'(c_1) = 0$
6. Toujours en appliquant le théorème de Rolle, mais cette fois ci à la fonction φ', il existe $c_2 \in]\alpha\ c_1[$ tel que $\varphi'(c_2) = 0$
7. On crée ainsi une suite de nombres $c_1, c_2, \cdots, c_n$, tels que, pour tout $k = 1, \cdots, n$, $\varphi^{(k)}(c_k) = 0$
8. Comme φ est une fonction $n+1$ fois dérivable et que $\varphi^{(n)}(\alpha) = \varphi^{(n)}(c_n) = 0$, toujours d'après le théorème de Rolle, il existe c_{n+1} entre α et c_n tel que $\varphi^{(n+1)}(c_{n+1}) = 0$
9. Or, la dérivée $n+1$-ième de φ est donnée par :$\varphi^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - (n+1)!M$, d'où nous tirons : $M = \dfrac{f^{(n+1)}(c_{n+1})}{(n+1)!}$
10. En égalisant les deux valeurs de M, nous trouvons : $\dfrac{f^{(n+1)}(c_{n+1})}{(n+1)\,!} = \dfrac{f(x) - P_n(x)}{(x-\alpha)^{(n+1)}}$
11. En posant $c = c_{n+1}$, nous trouvons $f(x) = P_n(x) + \dfrac{(x-\alpha)^{(n+1)} f^{(n+1)}(c)}{(n+1)\,!}$

Ce que nous voulions.

Remarque 11 :

1. Nous avons donc l'écriture classiqie des formules de Taylor : il existe c compris entre x et α tel que
$$\begin{aligned} f(x) = \quad & f(\alpha) + (x-\alpha) f'(\alpha) + \frac{(x-\alpha)^2}{2} f^{(2)}(\alpha) + \cdots \\ & \cdots + \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k\,!}(x-\alpha)^k + \cdots + \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n\,!}(x-\alpha)^n + (x-\alpha)^{n+1} \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)\,!} \end{aligned}$$
2. Pour $n = 0$, comme $P_{0,f}(x) = f(\alpha)$, nous obtenons $f(x) = f(\alpha) + (x-\alpha) f'(c)$; c'est le théorème des accroissements finis.

Remarque 12 :

1. En remplaçant x par $\alpha + h$, nous obtenons :
$$f(\alpha+h) = f(\alpha) + hf'(\alpha) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(\alpha) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\alpha + \theta h)$$
avec $\theta \in]0\ 1[$ *(dans ce cas, nous avons, si $h > 0$: $\alpha < \alpha + \theta h < \alpha + h$ et si $h < 0$, nous avons $\alpha + h < \alpha + \theta h < \alpha$)*

2. Si, cette fois ci, $\alpha = 0$, avec f définie sur un intervalle $]a\ ,b[$ avec $0 \in\ ]a\ ,b[$ nous obtenons alors la formule de Taylor Mac-Laurin :

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)$$

avec $\theta \in\ ]0\ 1[$

4.4.2 Corollaire : évaluation de l'erreur commise

Soit $f : [a\ b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur l'intervalle $[a\ b]$ et $n+1$ fois dérivable sur $]a\ b[$.
On suppose aussi $f^{(n+1)}$ bornée sur $]a\ b[$
Alors, pour tout $x \in\ ]a\ b[$ et tout $\alpha \in\ ]a\ b[$,

$$|f(x) - P_n(x)| \leqslant \frac{|x-\alpha|^{n+1}}{(n+1)\ !} \sup_{c\in]a\ b[} \left|f^{(n+1)}(c)\right|$$

Démonstration

La démonstration est simple.
D'après 4.4.1,il existe il existe c compris entre x et α tel que :

$$f(x) - P_{n,f}(x) = (x-\alpha)^{n+1}\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$$

En passant à la valeur absolue :

$$|f(x) - P_{n,f}(x)| = |x-\alpha|^{n+1}\left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\right|$$

C'est à dire :

$$|f(x) - P_{n,f}(x)| = \frac{|x-\alpha|^{n+1}}{(n+1)!}\left|f^{(n+1)}(c)\right|$$

Comme $f^{(n+1)}$ est bornée sur $]a\ b[$, nous avons bien :

$$|f(x) - P_{n,f}(x)| \leqslant \frac{|x-\alpha|^{n+1}}{(n+1)\ !} \sup_{c\in]a\ b[} \left|f^{(n+1)}(c)\right|$$

Exemple 6 :

Si nous considérons la fonction $f(x) = \sin x$ au voisinage de 0, et $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$, et donc $f^{(n)}(0) = \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$; de plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\left|f^{(n)}(x)\right| \leq 1$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\left|\sin x - \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040}\right)\right| \leq \frac{|x^9|}{362880}$$

4.4.3 Application : convexité

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'intervalle I
Si, pour tout $x \in I$, nous avons $f''(x) \geqslant 0$, alors la courbe représentative de f est toujours au-dessus de ses tangentes

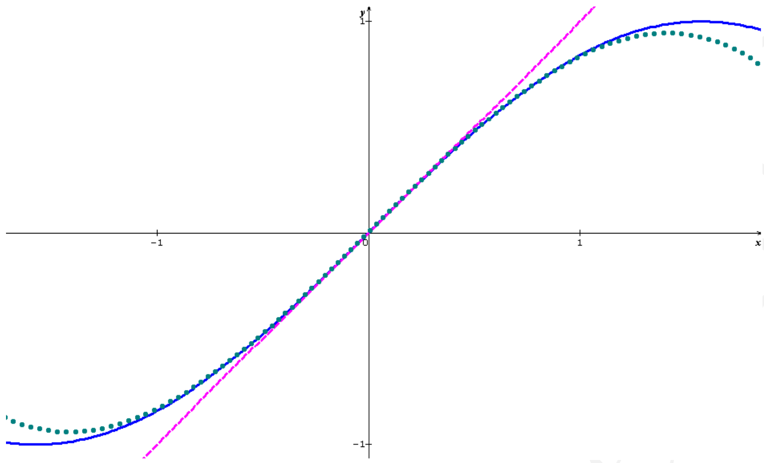

FIGURE 4.3 – Deux fonctions polynômes approchant $\sin x$: $x - \dfrac{x^3}{6}$ et $x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120}$

Démonstration

Soit $x_0 \in I$ et étudions la tangente à f en $x_0 \in I$. Ecrivons la formule de Taylor-Young entre x et x_0
Il existe c compris entre x_0 et x tel que

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2} f^{(2)}(c) \Longleftrightarrow f(x) - (f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0)) = \frac{(x - x_0)^2}{2} f^{(2)}(c)$$

Or, comme $c \in I$, nous avons $f^{(2)}(c) \geqslant 0$ et donc $\dfrac{(x - x_0)^2}{2} f^{(2)}(c) \geqslant 0$.
D'où nous déduisons que $f(x) - (f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0)) \geqslant 0 \Longleftrightarrow f(x) \geqslant (f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0))$.
L'équation de la tangente au graphe de f en x_0 est donnée par $y = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0)$ et l'inégalité $f(x) \geqslant (f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0))$ traduit bien le fait que le graphe de f est audessus de la tangente.

Remarque 13 :

Que, pour tout $x \in I$, nous avons $f''(x) \geqslant 0$ signifie que f est convexe sur I. Ainsi, le graphe d'une fonction convexe est toujours au-dessus de ses tangentes.

4.4.4 Application : Inégalité de Kolmogorov

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f : [a; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction 2 fois dérivable.
On suppose que pour tout $x \in [a; +\infty[$ nous avons $|f(x)| \leqslant M_0$ et $|f''(x)| \leqslant M_2$.
Alors : pour tout $x \geqslant a$, $|f'(x)| \leqslant 2\sqrt{M_0 M_2}$

Démonstration

Soit $x \geqslant a$ et $u > 0$
Nous écrivons la formule de Taylor-Lagrange ente x et $x + u$.
Il existe donc $c_{x,u} \in [x; x+u]$ tel que $f(x+u) = f(x) + uf'(x) + \dfrac{u^2}{2} f''(c_{x,u})$
Alors, nous avons :

$$uf'(x) = f(x+u) - f(x) - \frac{u^2}{2} f''(c_{x,u}) \Longleftrightarrow f'(x) = \frac{1}{u}\left(f(x+u) - f(x) - \frac{u^2}{2} f''(c_{x,u})\right)$$

D'où nous tirons $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{u}\left(|f(x+u)| + |f(x)| + \left|\dfrac{u^2}{2} f''(c_{x,u})\right|\right) \leqslant \dfrac{2M_0}{u} + \dfrac{u}{2} M_2$

▷ On suppose $M_2 = 0$.
Alors l'inégalité devient $|f'(x)| \leqslant \dfrac{2M_0}{u}$.
Cette inégalité est vraie pour tout $u > 0$, en particulier lorsque u tend vers $+\infty$; donc, comme $\lim\limits_{u\to+\infty} \dfrac{2M_0}{u} = 0$, nous avons, pour tout $x \geqslant a$, $|f'(x)| = 0$; l'inégalité $|f'(x)| \leqslant 2\sqrt{M_0M_2}$ est bien vérifiée dans ce cas particulier.

▷ Supposons maintenant que $M_2 \neq 0$.
Etudions la fonction $\varphi(u) = \dfrac{2M_0}{u} + \dfrac{uM_2}{2}$ pour $u > 0$

Nous avons $\varphi'(u) = -\dfrac{2M_0}{u^2} + \dfrac{M_2}{2} = \dfrac{M_2u^2 - 4M_0}{2u^2} = \dfrac{\left(u\sqrt{M_2} + 2\sqrt{M_0}\right)\left(u\sqrt{M_2} - 2\sqrt{M_0}\right)}{2u^2}$

Comme $u\sqrt{M_2} + 2\sqrt{M_0} \geqslant 0$, le signe de $\varphi'(u)$ ne dépend que de $u\sqrt{M_2} - 2\sqrt{M_0}$

- ⋆ Donc, si $u \leqslant 2\sqrt{\dfrac{M_0}{M_2}}$, alors $\varphi'(u) \leqslant 0$ et φ est décroissante sur $\left]0 : 2\sqrt{\dfrac{M_0}{M_2}}\right]$
- ⋆ Et, si $u \geqslant 2\sqrt{\dfrac{M_0}{M_2}}$, alors $\varphi'(u) \geqslant 0$ et φ est croissante sur $\left[2\sqrt{\dfrac{M_0}{M_2}}; +\infty\right[$
- ⋆ Le minimum est atteint en $u = 2\sqrt{\dfrac{M_0}{M_2}}$

Nous avons donc $|f'(x)| \leqslant \varphi\left(2\sqrt{\dfrac{M_0}{M_2}}\right)$

Il faut maintenant calculer $\varphi\left(2\sqrt{\dfrac{M_0}{M_2}}\right)$. Or :

$$\varphi\left(2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}\right) = 2M_0 \times \frac{\sqrt{M_2}}{2\sqrt{M_0}} + 2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}} \times \frac{M_2}{2} = \sqrt{M_0M_2} + \sqrt{M_0M_2} = 2\sqrt{M_0M_2}$$

D'où nous avons bien le résultat $|f'(x)| \leqslant 2\sqrt{M_0M_2}$

4.4.5 Formule de Taylor-Young

On suppose f de classe $\mathcal{C}^n$ sur l'intervalle $[a\,,b]$, et on suppose juste $f^{(n)}$ dérivable en a, c'est à dire que $f^{(n+1)}(a)$ existe
Alors

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} \times f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!} \times f^{(n)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \times f^{(n+1)}(a) + (x-a)^{n+1}\varepsilon(x)$$

Où $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$

Démonstration

Soit $x \in [a\,,b]$, et on va considérer l'intervalle $[a\,,x]$; pour $t \in [a\,,x]$, nous construisons le polynôme de Taylor de f en a

$$\begin{aligned} P_{n,f}(t) &= \sum_{k=0}^{n} (t-a)^k \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \\ &= f(a) + (t-a)f'(a) + (t-a)^2 \frac{f''(a)}{2} + \cdots \\ &\qquad \cdots + (t-a)^k \frac{f^{(k)}(a)}{k!} + \cdots + (t-a)^n \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \end{aligned}$$

La démonstration sera très voisine de celle de 4.4.1 ; on peut d'ores et déjà remarquer que la dérivée n-ième de $P_{n,f}$ est la constante $f^{(n)}(a)$

1. On construit comme précédemment (cf 4.4.1),une fonction φ définie pour tout $t \in [a\,,x]$ par :

$$\varphi(t) = f(t) - P_n(t) - M(t-a)^{n+1}$$

où nous choisissons M de telle sorte que $\varphi(x) = 0$; et nous avons, bien évidemment :

$$M = \frac{f(x) - P_{n,f}(x)}{(x-a)^{n+1}}$$

2. Comme dans 4.4.1 on crée ainsi une suite de nombres $x > c_1 > c_2 > \cdots > c_n > a$, tels que $\varphi^{(k)}(c_k) = 0$
3. Comme φ est une fonction n fois dérivable et que la dérivée n-ième de φ est donnée par :

$$\varphi^{(n)}(t) = f^{(n)}(t) - f^{(n)}(a) - (n+1)!M(t-a)$$

D'où nous tirons :

$$(n+1)! \times M = \frac{f^{(n)}(a) - f^{(n)}(c_n)}{(a - c_n)}$$

4. Puisque $x > c_1 > c_2 > \cdots > c_n > a$, les c_k sont des fonctions de x et de a telles que $\lim\limits_{x \to a} c_k = a$
5. En fait,M est une fonction qui dépend, en fait, de x et nous pouvons donc écrire :

$$(n+1)!M(x) = \frac{f^{(n)}(a) - f^{(n)}(c_n)}{(a - c_n)}$$

Et donc $\lim\limits_{x \to a} (n+1\,!)\,M(x) = \lim\limits_{x \to a} \left(\dfrac{f^{(n)}(a) - f^{(n)}(c_n)}{(a - c_n)} \right) = f^{(n+1)}(a)$.

Il est donc possible d'écrire :

$$(n+1)!M(x) = f^{(n+1)}(a) + \varepsilon(x) \text{ où } \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$$

6. Nous avons donc $\dfrac{f(x) - P_{n,f}(x)}{(x-a)^{n+1}} (n+1)! = f^{(n+1)}(a) + \varepsilon(x)$

Ce que nous voulions

Remarque 14 :

1. Les hypothèses de cette formule sont beaucoup plus légères que celle de 4.4.1
2. La plupart du temps, nous aurons des fonctions qui poseront peu de problèmes au niveau de la dérivabiité
3. **Ce sera la formule la plus utilisée pour construire les développements limités.**
4. Certains livres, plutôt que d'écrire $(x-a)^n \varepsilon(x)$ où $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$, préfèrent écrire $o((x-a)^n)$, sans doute moins explicite, écriture que nous étudierons dans une autre section

4.4.6 Formule de Taylor avec reste intégral

Soit $f : [a\,, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ **de classe** $\mathcal{C}^n$ **sur l'intervalle** $[a\,, b]$.
Alors, pour tout $x \in [a\,, b]$ **et tout** $y \in [a\,, b]$**, nous avons :**

$$f(x) = f(y) + (x-y) f'(y) + \cdots + \frac{(x-y)^{(n-1)} f^{(n-1)}(y)}{(n-1)\,!} + \int_y^x \frac{(x-t)^{(n-1)} f^{(n)}(t)}{(n-1)\,!}\, dt$$

Démonstration

La démonstration se fait par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$; on pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathfrak{P}(n) \ : \begin{cases} \text{Pour } f \text{ de classe } \mathcal{C}^n \\ f(x) = f(y) + (x-y) f'(y) + \cdots + \dfrac{(x-y)^{(n-1)} f^{(n-1)}(y)}{(n-1)\,!} + \displaystyle\int_y^x \frac{(x-t)^{(n-1)} f^{(n)}(t)}{(n-1)\,!}\, dt \end{cases}$$

1. **Vérifions que $\mathfrak{P}(1)$ est vraie**

   Nous avons, en utilisant les primitives : $\displaystyle\int_y^x f'(t)\ dt = f(y) - f(x)$, et donc

   $$f(y) = f(x) + \int_y^x f'(t)\ dt$$

   $\mathfrak{P}(1)$ est donc vraie
2. **Supposons $\mathfrak{P}(n)$ vraie**
3. **Démontrons que $\mathfrak{P}(n+1)$ est vraie**

   Soit f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.

   f étant de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ est en particulier de classe $\mathcal{C}^n$, et en utilisant l'hypothèse de récurrence $\mathfrak{P}(n)$, nous avons, pour tout $x \in [a\ ,b]$ et tout $y \in [a\ ,b]$

   $$f(x) = f(y) + (x-y) f'(y) + \cdots + \frac{(x-y)^{(n-1)} f^{(n-1)}(y)}{(n-1)\,!} + \int_y^x \frac{(x-t)^{(n-1)} f^{(n)}(t)}{(n-1)\,!}\, dt$$

   En intégrant $\displaystyle\int_y^x \frac{(x-t)^{(n-1)} f^{(n)}(t)}{(n-1)\,!}\, dt$ par parties, nous obtenons :

   $$\begin{cases} u' = \dfrac{(x-t)^{(n-1)}}{(n-1)\,!} & u = -\dfrac{(x-t)^{(n)}}{(n)\,!} \\ v = f^{(n)}(t) & v' = f^{(n+1)}(t) \end{cases}$$

   D'où :

   $$\int_y^x \frac{(x-t)^{(n-1)} f^{(n)}(t)}{(n-1)\,!}\, dt = \left[-\frac{(x-t)^{(n)}}{(n)\,!} f^{(n)}(t)\right]_y^x + \int_y^x \frac{(x-t)^n f^{(n+1)}(t)}{n\,!}\, dt$$
   $$= \frac{(x-y)^n}{n\,!} f^{(n)}(y) + \int_y^x \frac{(x-t)^n f^{(n+1)}(t)}{n\,!}\, dt$$

   D'où :

   $$f(x) = f(y) + (x-y) f'(y) + \cdots + \frac{(x-y)^n f^{(n)}(y)}{n\,!} + \int_y^x \frac{(x-t)^n f^{(n)}(t)}{n\,!}\, dt$$

Ce que nous voulions

Exercice 22 :

Formule de Taylor pour les polynômes

$\mathbb{R}_n[X]$ est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n

1. Soit $a \in \mathbb{R}$, et on appelle $E_k(X) = (X-a)^k$

   Montrer que la famille $\{E_0, E_1, \ldots, E_n\}$ forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$
2. Nous pouvons donc écrire tout polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ sous la forme

   $$P(X) = P_0 E_0 + P_1 E_1 + P_2 E_2 + \cdots + P_n E_n$$

   En calculant les dérivées successives de P, montrer que pour tout $k = 0, \ldots, n$, $P_k = \dfrac{P^{(k))}(a)}{k\,!}$

Conclusion

- **Nous obtenons ainsi la formule de Taylor pour les polynômes :** qui est une formule exacte

$$P(X) = P(a)) + (X-a)P'(a) + (X-a)^2 \frac{P''(a)}{2} + \cdots + (X-a)^k \frac{P^k(a)}{k\,!} + \cdots + (X-a)^n \frac{P^n(a)}{n\,!}$$

- En faisant $a = 0$, nous obtenons ainsi la formule de Taylor Mac-Laurin :

$$P(X) = P(0)) + P'(0)X + \frac{P''(0)}{2}X^2 + \cdots \frac{P^k(0)}{k\,!} + X^k + \cdots + \frac{P^n(0)}{n\,!}X^n$$

- Ce qui donne, si $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_nX^n$, une expression explicite des a_k ; nous avons : $a_k = \dfrac{P^{(k)}(0)}{k\,!}$

Exercice 23 :

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $h > 0$. On considère $f : [a-h; a+h] \longrightarrow \mathbb{R}$, continue sur $[a-h; a+h]$ dérivable sur $]a-h; a+h[$

1. Montrer qu'il existe $c \in]0;1[$ tel que :

$$\frac{f(a+h) - f(a-h)}{h} = f'(a+ch) + f'(a-ch)$$

2. Démontrer cette fois ci qu'il existe $\theta \in]0;1[$ tel que :

$$\frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h} = f'(a+\theta h) - f'(a-\theta h)$$

3. On suppose, cette fois-ci que $f''(a)$ existe. Nous posons pour $0 < |u| < h$, c'est à dire $-h < u < h$ et $u \neq 0$:

$$\varphi(u) = \frac{f(a+u) - 2f(a) + f(a-u)}{u^2}$$

   Démontrer que $\lim\limits_{u \to 0} \varphi(u) = f''(a)$

Exercice 24 :

Soit $a > 0$ et $f : [-a; +a] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie et continue sur l'intervalle $[-a; +a]$ et deux fois dérivable sur $]-a; +a[$
On suppose que $f(0) = 0$ et que f'' est bornée sur $]-a; +a[$, c'est à dire qu'il existe $M > 0$ tel que, pour tout $x \in]-a; +a[$, $|f''(x)| \leqslant M$
On construit la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie pur tout $n \in \mathbb{N}^*$ par : $U_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{k}{n^2}\right)$
Il faut démontrer que la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et donner sa limite