4.4 Les fonctions convexes

Dans cette section, toutes les fonctions sont à valeurs réelles

4.4.1 Définition de la convexité

Soit f une fonction définie sur un domaine $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$. Soit un intervalle $I \subset \mathcal{D}_f$

1. **f est dite convexe sur I si et seulement si**
$$(\forall x \in I)\,(\forall y \in I)\,(\forall t \in [0;1])\,(f\,(tf\,(x) + (1-)\,f\,(y)) \leqslant tf\,(x) + (1-)\,f\,(y))$$
2. **Elle est strictement convexe si l'inégalité est stricte, c'est à dire**
$$(\forall x \in I)\,(\forall y \in I)\,(\forall t \in [0;1])\,(f\,(tf\,(x) + (1-)\,f\,(y)) < tf\,(x) + (1-)\,f\,(y))$$

Remarque 11 :

1. Une fonction f est dite concave si et seulement si
$$(\forall x \in I)\,(\forall y \in I)\,(\forall t \in [0;1])\,(f\,(tf\,(x) + (1-)\,f\,(y)) \geqslant tf\,(x) + (1-)\,f\,(y))$$
2. Une fonction f est concave si la fonction $-f$ est convexe. C'est pourquoi, l'étude ci-après ne se fera que pour les fonctions convexes.

Exemple 6 :

1. **La fonction $f\,(x) = |x|$ est convexe**
Soient $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ et $t \in [0;1]$. Alors,
$$|tx + (1-t)\,y| \leqslant t\,|x| + (1-t)\,|y|$$
Nous avons bien $f\,(tf\,(x) + (1-)\,f\,(y)) \leqslant tf\,(x) + (1-)\,f\,(y)$. Ce qui montre que la valeur absolue est convexe.
2. **La fonction $f\,(x) = x^2$ est convexe**
De la même manière, soient $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ et $t \in [0;1]$. Alors,
$$(tx + (1-t)\,y)^2 - tx^2 - (1-t)\,y^2 = \left(t^2 - t\right)x^2 + \left(t^2 - t\right)y^2 + 2t\,(1-t)\,xy = \left(t^2 - t\right)(x-y)^2$$
Comme $t \in [0;1]$, nous avons $\left(t^2 - t\right) \leqslant 0$, et donc $(tx + (1-t)\,y)^2 - tx^2 - (1-t)\,y^2 \leqslant 0$, c'est à dire $(tx + (1-t)\,y)^2 \leqslant tx^2 + (1-t)\,y^2$, ce qui veut dire que $f\,(x) = x^2$ est convexe

Exercice 22 :

1. Montrer que la somme de 2 fonctions convexes est convexe
2. Démontrer que si la fonction f est croissante et convexe et que si la fonction g est convexe, alors la fonction $f \circ g$ est convexe.

Exercice 23 :

1. Démontrer qu'une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$, pour tout choix de points $x_1 \in I \ldots x_n \in I$, et de coefficients $\lambda_1 \in \mathbb{R}^+ \ldots \lambda_n \in \mathbb{R}^+$ tels que, pour tout $i = 1, \ldots, n$ $\lambda_i \geqslant 0$ et $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ nous avons $f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f\,(x_i)$
2. Soit une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe ; démontrer que pour $x_1 \in I, \ldots, x_n \in I$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ n nombres réels positifs, nous avons :
$$f\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i}\right) \leqslant \frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f\,(x_i)}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i}$$

4.4.2 Interprétation géométrique

Soient $x \in I$ et $y \in I$ tels que $x \leqslant y$; considérons l'intervalle $[x; y] \subset I$. Soient M le point de coordonnées $(x, f(x))$ et N le point de coordonnées $(y, f(y))$.
Alors, tout point $T \in [M; N]$ a pour coordonnées :

$$x_1 = tx + (1-t)\,y \qquad y_1 = tf(x) + (1-t)\,f(y) \text{ avec } t \in [0;1]$$

Et la propriété d'« **inégalité de convexité** » se traduit par « **La courbe représentative de f se situe sous le segment** $[M; N]$ »

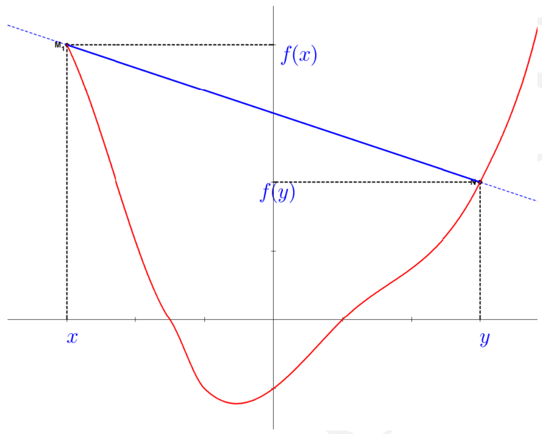

FIGURE 4.2 – La courbe représentative de f est sous le segment $[M; N]$

Remarque 12 :

Quelle est l'équation d'une corde $[M; N]$? En supposant $M = (a, f(a))$ et $M = (b, f(b))$, l'équation de la droite (MN) est donnée par :

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$$

Une autre façon de présenter cette équation est d'utiliser le calcul d'un déterminant :

$$\begin{vmatrix} x - a & b - a \\ y - f(a) & f(b) - f(a) \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow (f(b) - f(a))(x - a) - (b - a)(y - f(a)) = 0$$

4.4.3 Caractérisation d'une fonction convexe

Soit f une fonction définie sur un domaine $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$. Soit un intervalle $I \subset \mathcal{D}_f$.
Les 3 propriétés suivantes sont équivalentes :

1. **f est convexe sur I**
2. **Pour tout $x \in I$, tout $y \in I$ et tout $z \in I$ avec $x < z < y$, nous avons :**

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leqslant \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leqslant \frac{f(y) - f(z)}{y - z}$$

3. **Pour tout $a \in I$, la fonction $h_a(t) = \dfrac{f(t) - f(a)}{t - a}$ définie sur $I \setminus \{a\}$ est croissante**

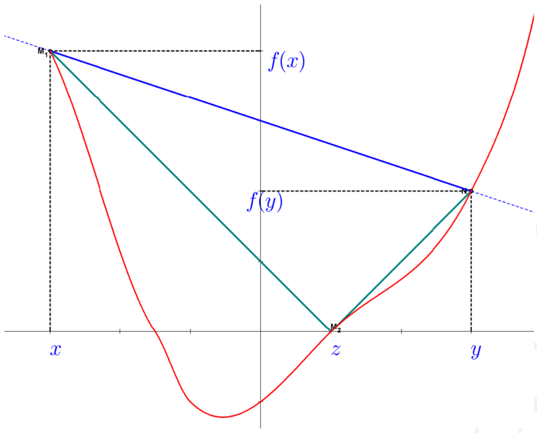

FIGURE 4.3 –

Démonstration

1. **Supposons f convexe sur I**

   Nous allons démontrer que $\dfrac{f(z)-f(x)}{z-x} \leqslant \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \dfrac{f(y)-f(z)}{y-z}$

   Soit g la fonction affine qui passe par les points $M(x, f(x))$ et $N(y, f(y))$. g a pour expression :

   $$g(T) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}(T-x)+f(x)$$

   Nous remarquons que $g(x) = f(x)$, $g(y) = f(y)$ et, pour tout z tel que $x < z < y$ nous avons $f(z) \leqslant g(z)$

   ▷ De $f(z) \leqslant g(z)$, nous tirons $f(z)-f(x) \leqslant g(z)-f(x)$ et de $z > x$ et donc $\dfrac{1}{z-x} > 0$, nous tirons :

   $$\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leqslant \frac{g(z)-f(x)}{z-x}$$

   De $g(x) = f(x)$, nous déduisons $\dfrac{g(z)-f(x)}{z-x} = \dfrac{g(z)-g(x)}{z-x}$

   Le rapport $\dfrac{g(z)-g(x)}{z-x}$ est le coefficient directeur de la droite représentant g et donc

   $$\frac{g(z)-g(x)}{z-x} = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$

   Il est possible de démontrer autrement que $\dfrac{g(z)-g(x)}{z-x} = \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}$. En effet :

   $$g(z) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}(z-x)+f(x) \Longleftrightarrow g(z)-f(x) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}(z-x)$$

   De l'égalité $g(x) = f(x)$, nous tirons :

   $$g(z)-f(x) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}(z-x) \Longleftrightarrow g(z)-g(x) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}(z-x) \Longleftrightarrow \frac{g(z)-g(x)}{z-x} = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$

   Et nous avons démontré, dans un premier temps $\dfrac{f(z)-f(x)}{z-x} \leqslant \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}$

   ▷ Nous repartons de $f(z) \leqslant g(z)$. Nous avons, puisque $g(x) = f(x)$ et $g(y) = f(y)$:

   $$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = \frac{g(y)-g(x)}{y-x}$$

   Nous avons aussi, et l'avons déjà démontré, que : $\dfrac{g(y)-g(x)}{y-x} = \dfrac{g(y)-g(z)}{y-z}$

De $f(z) \leqslant g(z) \Longleftrightarrow -f(z) \geqslant -g(z)$, et de $y > z \Longleftrightarrow y - z > 0$, nous tirons :

$$\frac{g(y) - g(z)}{y - z} \leqslant \frac{g(y) - f(z)}{y - z} = \frac{f(y) - f(z)}{y - z}$$

D'où nous tirons la seconde inégalité : $\dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} \leqslant \dfrac{f(y) - f(z)}{y - z}$

Nous venons de démontrer la double inégalité : $\dfrac{f(z) - f(x)}{z - x} \leqslant \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} \leqslant \dfrac{f(y) - f(z)}{y - z}$

2. **Supposons f vérifie $\dfrac{f(z) - f(x)}{z - x} \leqslant \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} \leqslant \dfrac{f(y) - f(z)}{y - z}$**

   Nous allons démontrer que l'application $h_a(t) = \dfrac{f(t) - f(a)}{t - a}$ est croissante.

   Supposons que $t_1 < t_2$; il faut donc montrer que $h_a(t_1) \leqslant h_a(t_2)$

   ▷ Supposons $t_1 < t_2 < a$

   D'après l'hypothèse, nous avons : $\dfrac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} \leqslant \dfrac{f(a) - f(t_1)}{a - t_1} \leqslant \dfrac{f(a) - f(t_2)}{a - t_2}$, c'est à dire que nous avons $h_a(t_1) \leqslant h_a(t_2)$

   ▷ Supposons $t_1 < a < t_2$

   Nous avons à nouveau : $\dfrac{f(a) - f(t_1)}{a - t_1} \leqslant \dfrac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} \leqslant \dfrac{f(t_1) - f(a)}{t_1 - a}$, c'est à dire que nous avons $h_a(t_1) \leqslant h_a(t_2)$

   ▷ Supposons $a < t_1 < t_2$

   Nous avons : $\dfrac{f(t_1) - f(a)}{t_1 - a} \leqslant \dfrac{f(t_2) - f(a)}{t_2 - a} \leqslant \dfrac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$, c'est à dire que nous avons $h_a(t_1) \leqslant h_a(t_2)$

   Ainsi, dans tous les cas, nous avons $t_1 < t_2 \Longrightarrow h_a(t_1) \leqslant h_a(t_2)$

3. **Supposons $h_a(t) = \dfrac{f(t) - f(a)}{t - a}$ croissante**

   Démontrons que f est convexe sur I.

   Soient $x \in I$, $y \in I$ tels que $x < y$. Il nous faudra montrer que le segment reliant les points $M(x, f(x))$ et $N(y, f(y))$ se situe « au-dessus » du graphe de f, c'est à dire si g est la fonction affine dont la représentation est la droite (MN), pour tout $z \in I$ tel que $x < z < y$, $f(z) \leqslant g(z)$

   Nous considérons $h_x(t) = \dfrac{f(t) - f(x)}{t - x}$; par hypothèse, h_x est croissante, et donc $h_x(z) \leqslant h_x(y)$, c'est à dire $\dfrac{f(z) - f(x)}{z - x} \leqslant \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x}$.

   Soit g est la fonction affine dont la représentation passe par les points $M(x, f(x))$ et $N(y, f(y))$; alors :

   $$g(T) = \left(\frac{f(y) - f(x)}{y - x}\right)(T - x) + f(x)$$

   Nous avons toujours $g(x) = f(x)$ et $g(y) = f(y)$

   Alors :

   $$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \frac{g(y) - g(x)}{y - x}$$

   En considérant la pente de la droite (MN), nous avons :

   $$\frac{g(y) - g(x)}{y - x} = \frac{g(z) - g(x)}{z - x}$$

   Et

   $$\frac{g(z) - g(x)}{z - x} = \frac{g(z) - f(x)}{z - x}$$

   Comme $h_x(z) \leqslant h_x(y)$, et que $h_x(y) = \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x}$, nous avons :

   $$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leqslant \frac{g(z) - f(x)}{z - x}$$

C'est à dire $f(z) \leqslant g(z)$
Ce que nous voulions

4.4.4 Dérivabilité des fonctions convexes

Soit f une fonction définie sur un domaine $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$. Soit un intervalle $I \subset \mathcal{D}_f$ ouvert. On suppose f convexe sur I
Alors, pour tout $a \in I$, f admet une dérivée à droite $f'_d(a)$ et une dérivée à gauche $f'_g(a)$.
De plus, nous avons $f'_g(a) \leqslant f'_d(a)$

Démonstration

Soit $a \in I$. I étant un intervalle ouvert, il existe $r > 0$ tel que $]a-r; a+r[\subset I$
Soient $t_1 \in I$ et $t_2 \in I$ tels que $a - r < t_1 < a < t_2 < a + r$

1. En reconsidérant $h_a(t) = \dfrac{f(t) - f(a)}{t - a}$, nous avons h_a croissante, et donc $h_a(t_1) \leqslant h_a(t_2)$
2. Ainsi la fonction :
$$\left\{\begin{array}{rcl} h_a :]t_1; a[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & h_a(t) = \dfrac{f(t) - f(a)}{t - a} \end{array}\right.$$
est-elle majorée sur l'intervalle $]t_1; a[$ *(par $h_a(t_2)$, par exemple).*
La fonction h_a étant croissante, elle admet une limite de à gauche de a :
$$\lim_{\substack{t \to a \\ t < a}} h_a(t) = \lim_{\substack{t \to a \\ t < a}} \frac{f(t) - f(a)}{t - a} = f'_g(a)$$
D'autre part, pour tout $t_2 > a$, nous avons $f'_g(a) \leqslant h_a(t_2)$
3. De la même manière, la fonction
$$\left\{\begin{array}{rcl} h_a :]a; t_2[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & h_a(t) = \dfrac{f(t) - f(a)}{t - a} \end{array}\right.$$
est-elle minorée sur l'intervalle $]a; t_2[$ *(par $h_a(t_1)$, par exemple).* et ainsi :
$$\lim_{\substack{t \to a \\ t > a}} h_a(t) = \lim_{\substack{t \to a \\ t > a}} \frac{f(t) - f(a)}{t - a} = f'_d(a)$$
De même, pour tout $t_1 < a$, nous avons $f'_d(a) \geqslant h_a(t_1)$
4. Ainsi, f admet-elle en $a \in I$, une dérivée à droite et une dérivée à gauche telles que $f'_g(a) \leqslant f'_d(a)$

Remarque 13 :

1. Le raisonnement précédent nous permet d'ajouter les précisions suivantes :
$$(\forall x_1 \in I)\,(\forall x_2 \in I)\,\big((x_1 \leqslant x_2) \Longrightarrow \big(f'_g(x_1) \leqslant f'_d(x_1)\big) \leqslant f'_g(x_2) \leqslant f'_d(x_2)\big)$$
2. Le fait que I soit un intervalle ouvert est important.
En effet, si nous posons $I = [0; 1]$ et considérons f définie par :
$$\left\{\begin{array}{rcl} f : [0;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ 0 & \longmapsto & f(0) = 1 \\ x & \longmapsto & f(x) = 0 \text{ si } x \neq 0 \end{array}\right.$$
f est donc la fonction nulle sur $]0; 1]$; elle est convexe sur $[0; 1]$, mais la continuité n'est pas assurée. Elle est, par contre, assurée dans le plus grand ouvert inclus dans $[0; 1]$ qui est, ici, $]0; 1[$
3. Une fonction convexe n'est pas forcément dérivable. Il suffit de penser à $f(x) = |x|$ qui est convexe sur $\mathbb{R}$, mais non dérivable sur $\mathbb{R}$; elle est, par contre, toujours dérivable à droite et toujours dérivable à gauche *(mais la dérivée à droite n'est pas toujours égale à la dérivée à gauche)*

4.4.5 Corollaire

Soit f une fonction définie sur un domaine $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$. Soit un intervalle $I \subset \mathcal{D}_f$.
Si f est convexe sur I, alors f est continue sur I

Démonstration

La démonstration a déjà été faite en exercice.
Soit f convexe sur l'intervalle I et soit $x_0 \in I$.
D'après 4.4.4, f est dérivable à droite et à gauche de x_0. Nous pouvons alors écrire :

- Pour $x > x_0$:

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'_d(x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x)$$

  où $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \varepsilon(x) = 0$
  Nous avons clairement $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0)$, et donc f est continue à droite de x_0
- De la même manière, pour $x < x_0$, nous avons $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = f(x_0)$, et donc f est continue à gauche de x_0
- Comme $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0)$ nous avons donc f continue en x_0

Remarque 14 :

Nous savons qu'une fonction convexe est continue. Mais, à quelle condition une fonction continue est-elle convexe ?

4.4.6 Critère pour qu'une fonction continue soit convexe

Soit f une fonction définie sur un domaine $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$ et continue sur un intervalle $[a;b] \subset \mathcal{D}_f$
On suppose que, pour tout $x \in [a;b]$ et tout $y \in [a;b]$, nous avons :

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

Alors, f est convexe sur l'intervalle $[a;b]$

Démonstration

Nous devons montrer que pour tout $x \in [a;b]$, tout $y \in [a;b]$ et tout $\lambda \in [0;1]$:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

Nous allons, d'abord, montrer un résultat complémentaire

1. Démontrons, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, que, pour tout $k \in \{0, \cdots, 2^n\}$:

$$f\left(\frac{k}{2^n}x + \left(1 - \frac{k}{2^n}\right)y\right) \leqslant \frac{k}{2^n} f(x) + \left(1 - \frac{k}{2^n}\right) f(y)$$

   ▷ C'est vrai pour $n = 1$
   Nous vérifions donc pour $k = 0$, $k = 1$ et $k = 2$
   - Pour $k = 0$, nous avons $f(y) \leqslant f(y)$
   - Pour $k = 1$, nous avons

$$f\left(\frac{1}{2}x + \left(1 - \frac{1}{2}\right)y\right) \leqslant \frac{1}{2} f(x) + \left(1 - \frac{1}{2}\right) f(y) \Longleftrightarrow f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

     C'est l'hypothèse que nous avons faite sur f.
   - Pour $k = 2$, nous avons cette fois-ci $f(x) \leqslant f(x)$

L'hypothèse de récurrence est donc vérifiée pour $n = 1$

▷ Supposons maintenant que, jusqu'au rang n, pour tout $k \in \{0, \cdots, 2^n\}$:

$$f\left(\frac{k}{2^n}x + \left(1 - \frac{k}{2^n}\right)y\right) \leqslant \frac{k}{2^n}f(x) + \left(1 - \frac{k}{2^n}\right)f(y)$$

▷ Démontrons la propriété à l'ordre $n+1$

Et, c'est ici que ça de corse ! !

Remarquons, avant de commencer que $\left(1 - \frac{k}{2^{n+1}}\right)y = y - \frac{k}{2^{n+1}}y = \frac{1}{2}y - \frac{k}{2^{n+1}}y + \frac{1}{2}y = \left(\frac{2^n - k}{2^{n+1}}\right)y + \frac{1}{2}y$

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{k}{2^{n+1}}x + \left(1 - \frac{k}{2^{n+1}}\right)y\right) &= f\left(\frac{k}{2^{n+1}}x + \left(\frac{2^n - k}{2^{n+1}}\right)y + \frac{1}{2}y\right) \\
&= f\left(\frac{1}{2}\left(\frac{k}{2^n}x + \left(\frac{2^n - k}{2^n}\right)y\right) + \frac{1}{2}y\right) \\
&\leqslant \frac{1}{2}f\left(\frac{k}{2^n}x + \left(\frac{2^n - k}{2^n}\right)y\right) + \frac{1}{2}f(y) \text{ par hypothèses faites sur } f \\
&\leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{k}{2^n}f(x) + \left(1 - \frac{k}{2^n}\right)f(y)\right) + \frac{1}{2}f(y) \text{ par hypothèse de récurrence} \\
&\leqslant \frac{k}{2^{n+1}}f(x) + \left(\frac{1}{2}\left(1 - \frac{k}{2^n}\right) + \frac{1}{2}\right)f(y) \\
&\leqslant \frac{k}{2^{n+1}}f(x) + \left(1 - \frac{k}{2^{n+1}}\right)f(y)
\end{aligned}$$

Ce que nous voulions

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \{0, \cdots, 2^n\}$:

$$f\left(\frac{k}{2^n}x + \left(1 - \frac{k}{2^n}\right)y\right) \leqslant \frac{k}{2^n}f(x) + \left(1 - \frac{k}{2^n}\right)f(y)$$

2. Soit maintenant $\lambda \in [0; 1]$. Alors, il existe une suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ du type $\lambda_n = \frac{p_n}{2^n}$ avec $p_n \in \mathbb{N}$ et $0 \leqslant p_n \leqslant 2^n$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n = \lambda$

Comment construire une telle suite ?

En utilisant le développement dyadique *(le développemment en base 2)*[2], il existe une suite $\lambda_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon_k}{2^k}$ avec $\varepsilon_k \in \{0; 1\}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n = \lambda$. En réduisant au même dénominateur, nous avons $p_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \varepsilon_k 2^{n-k}$.

D'autre part, nous avons $p_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \varepsilon_k 2^{n-k} \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} 2^{n-k} = \sum\limits_{k=0}^{n-1} 2^k = 2^n - 1 < 2^n$.

Nous avons donc, à ce moment là, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f(\lambda_n x + (1 - \lambda_n)y) \leqslant \lambda_n f(x) + (1 - \lambda_n)f(y)$$

Or :

▷ $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n x + (1 - \lambda_n)y = \lambda x + (1 - \lambda)y$

▷ $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n f(x) + (1 - \lambda_n)f(y) = \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$

▷ De la continuité de f nous avons :

$$\lim_{n\to+\infty} f(\lambda_n x + (1 - \lambda_n)y) = f(\lambda x + (1 - \lambda)y)$$

La limite respectant la relation d'ordre, nous avons donc

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

La fonction f est donc convexe

2. Le développement dyadique se fait comme le développement décimal vu en L_0

4.4.7 Fonctions convexes dérivables

1. **Soit f une fonction définie sur un domaine $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$. Soit un intervalle $I \subset \mathcal{D}_f$. On suppose f convexe sur I et dérivable sur I. Alors, la fonction f' est une fonction croissante**
2. **Réciproquement, si f est une fonction définie sur un domaine $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$ dérivable sur un intervalle $I \subset \mathcal{D}_f$ et admettant comme dérivée une fonction f' croissante, alors f est convexe**

Démonstration

1. On a montré, dans 4.4.4 que si f est convexe sur un intervalle I, alors, pour tout $x_0 \in I$, f est dérivable à droite et à gauche de x_0 et que

$$(\forall x_1 \in I)(\forall x_2 \in I)\left((x_1 \leqslant x_2) \Longrightarrow \left(f'_g(x_1) \leqslant f'_d(x_1)\right) \leqslant f'_g(x_2) \leqslant f'_d(x_2)\right)$$

Comme f est dérivable, alors $f'_g(x_1) = f'_d(x_1) = f'(x_1)$ et $f'_g(x_2) = f'_d(x_2) = f'(x_2)$
Et donc, si $x_1 \leqslant x_2$ alors $f'(x_1) \leqslant f'(x_2)$; la fonction f' est donc croissante.

2. Réciproquement, supposons que f admette une dérivée croissante sur I ; montrons qu'elle est convexe sur I
Soient $x \in I$, $y \in I$ et $\lambda \in [0;1]$. Nous avons $x \leqslant \lambda x + (1-\lambda) y \leqslant y$.
Il nous faut donc montrer que $f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$
   - ▷ Nous allons appliquer le théorème des accroissements finis entre x et $\lambda x + (1-\lambda) y$.
Il existe donc $\xi_1 \in]x; \lambda x + (1-\lambda) y[$ tel que

$$\frac{f(x) - f(\lambda x + (1-\lambda) y)}{x - (\lambda x + (1-\lambda) y)} = f'(\xi_1) \Longleftrightarrow \frac{f(x) - f(\lambda x + (1-\lambda) y)}{(1-\lambda)(x-y)} = f'(\xi_1)$$
$$\Longleftrightarrow f(x) - f(\lambda x + (1-\lambda) y) = f'(\xi_1)(1-\lambda)(x-y)$$

   - ▷ De même,nous appliquons le théorème des accroissements finis entre $\lambda x + (1-\lambda) y$ et y.
Il existe donc $\xi_2 \in]\lambda x + (1-\lambda) y; y[$ tel que

$$\frac{f(y) - f(\lambda x + (1-\lambda) y)}{y - (\lambda x + (1-\lambda) y)} = f'(\xi_2) \Longleftrightarrow \frac{f(y) - f(\lambda x + (1-\lambda) y)}{\lambda(y-x)} = f'(\xi_2)$$
$$\Longleftrightarrow f(y) - f(\lambda x + (1-\lambda) y) = \lambda f'(\xi_2)(y-x)$$

   - ▷ Des deux applications successives du théorèmes des accroissements finis, nous obtenons 2 égalités :
     - ⋆ $f(\lambda x + (1-\lambda) y) - f(x) = f'(\xi_1)(1-\lambda)(y-x)$
     - ⋆ $f(y) - f(\lambda x + (1-\lambda) y) = \lambda f'(\xi_2)(y-x)$

     Avec, par construction $\xi_1 \leqslant \xi_2$
     Ces égalités sont équivalentes à :
     - ⋆ $\lambda f(\lambda x + (1-\lambda) y) - \lambda f(x) = f'(\xi_1)\lambda(1-\lambda)(y-x)$
     - ⋆ $(1-\lambda) f(y) - (1-\lambda) f(\lambda x + (1-\lambda) y) = \lambda(1-\lambda) f'(\xi_2)(y-x)$

     Comme $\lambda(1-\lambda)(y-x) \geqslant 0$, que $f'(\xi_1) \leqslant f'(\xi_2)$ puisque f' est croissante et que $\xi_1 \leqslant \xi_2$, nous avons :

$$f'(\xi_1)\lambda(1-\lambda)(y-x) \leqslant f'(\xi_2)\lambda(1-\lambda)(y-x)$$

     C'est à dire :

$$\lambda f(\lambda x + (1-\lambda) y) - \lambda f(x) \leqslant (1-\lambda) f(y) - (1-\lambda) f(\lambda x + (1-\lambda) y)$$

     Tous calculs faits, cette inégalité est donc équivalente à :

$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

f est donc convexe sur I

4.4.8 Corollaire

Soit f une fonction définie sur un domaine $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$ deux fois dérivable sur un intervalle $I \subset \mathcal{D}_f$. Alors f est convexe sur I si et seulement si la dérivée seconde f'' est positive sur I, c'est à dire si et seulement si, pour tout $x \in I$ $f''(x) \geqslant 0$

Démonstration

La démonstration en est évidente, puis que si $f'' \geqslant 0$, alors f' est croissante sur I, donc convexe sur I

Exemple 7 :

1. La fonction $f(x) = x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$
2. La fonction $f(x) = e^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$
3. La fonction $f(x) = \ln x$ est concave sur $\mathbb{R}^{*+}$

Exercice 24 :

Soit $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{*+}$ une fonction telle que $\ln h$ soit convexe ; démontrer que h est une fonction convexe.

Exercice 25 :

1. Utiliser la convexité de $f(x) = x^2$ pour montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x_1, \ldots, x_n$ réels, nous avons :
$$\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{n}\right| \leqslant \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$$
2. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, utiliser la convexité de $f(x) = x^p$ sur $\mathbb{R}^+$ pour montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x_1, \ldots, x_n$ réels positifs, nous avons :
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{n} \leqslant \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{\frac{1}{p}}$$
3. Utiliser la convexité de $f(x) = -\ln x$ sur $\mathbb{R}^{*+}$ pour montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x_1, \ldots, x_n$ réels strictement positifs, nous avons :
$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$
En déduire que :
   (a) Pour tout $a \geqslant 0$, tout $b \geqslant 0$ et tout $c \geqslant 0$:
$$a^3 + b^3 + c^3 \geqslant 3abc \qquad (a+b+c)^3 \geqslant 27abc$$
   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt[n]{n!} \leqslant \dfrac{n+1}{2}$

4.4.9 Proposition *(Seconde caractérisation géométrique)*

Soit f une fonction définie sur un domaine $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$. Soit un intervalle $I \subset \mathcal{D}_f$ ouvert. On suppose f convexe sur I. Soit $a \in I$. Alors :

1. **Pour tout $\alpha \in \left[f'_g(a) ; f'_d(a)\right]$, alors la droite de pente α passant par $(a, f(a))$ est située sous la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de f, c'est à dire :**
$$(\forall x \in I)\,(f(x)) \geqslant \alpha(x-a) + f(a)$$

2. **En particulier, si f est dérivable sur I, $\mathcal{C}_f$ est située au-dessus de n'importe quelle de ses tangentes, c'est à dire :**

$$(\forall a \in I)\,(\forall x \in I)\,(f(x)) \geqslant f'(a)(x-a) + f(a)$$

3. **Réciproquement, si f est dérivable sur I et si $\mathcal{C}_f$ est située au-dessus de n'importe quelle de ses tangentes, alors f est convexe.**

Démonstration

1. Nous avons démontré en 4.4.4 que f admet une dérivée à droite de a $f'_d(a)$ et une dérivée à gauche $f'_g(a)$ et que, de plus nous avons $f'_g(a) \leqslant f'_d(a)$.
   Dans cette même démonstration, nous avons montré que :
   ⋆ Si $x < a$ alors $\dfrac{f(x) - f(a)}{x-a} \leqslant f'_g(a)$, et comme $x - a < 0$, nous avons $f(x) - f(a) \geqslant f'_g(a)(x-a)$, c'est à dire $f(x) \geqslant f'_g(a)(x-a) + f(a)$
   Comme $f'_g(a)(x-a) + f(a)$ est l'équation de la tangente à f, à gauche de a, nous avons le résultat demandé à gauche de a
   ⋆ Si $x > a$ alors $\dfrac{f(x) - f(a)}{x-a} \geqslant f'_d(a)$, et comme $x - a > 0$, nous avons $f(x) - f(a) \geqslant f'_d(a)(x-a)$, c'est à dire $f(x) \geqslant f'_d(a)(x-a) + f(a)$
   Comme $f'_d(a)(x-a) + f(a)$ est l'équation de la tangente à f à droite de a, nous avons le résultat demandé à droite de a
   Ainsi, que ce soit à droite ou à gauche de a, la courbe est au-dessus des tangentes
   Maintenant, soit α tel que $f'_g(a) \leqslant \alpha \leqslant f'_d(a)$. Alors :
   ⋆ Si $x < a$ alors $(x-a)\,f'_d(a) + f(a) \leqslant \alpha(x-a) + f(a) \leqslant f'_g(a)(x-a) + f(a) \leqslant f(x)$
   ⋆ Si $x > a$ alors $(x-a)\,f'_g(a) + f(a) \leqslant \alpha(x-a) + f(a) \leqslant f'_d(a)(x-a) + f(a) \leqslant f(x)$
   Le résultat du premier point est donc démontré
2. Si f est dérivable sur I, alors $f'_g(a) = f'_d(a) = f'(a)$ et nous avons donc, pour tout $x \in I$, $f'(a)(x-a) + f(a) \leqslant f(x)$, c'est à dire que la tangente est toujours située sous la courbe représentative de f
3. Réciproquement, supposons f dérivable sur I et que :

$$(\forall a \in I)\,(\forall x \in I)\,(f(x)) \geqslant f'(a)(x-a) + f(a)$$

   Soient $x \in I$ et $y \in I$ tels que $x < y$; nous allons montrer que $f'(x) \leqslant f'(y)$, c'est à dire que f' est croissante.
   $\longrightarrow$ Soit $g_x(t)$ la tangente à f en $(x, f(x))$; alors, $g_x(t) = f'(x)(t-x) + f(x)$.
   Pour tout $t \in I$, nous avons $g_x(t) = f(t)$ et, en particulier $g_x(y) \leqslant f(y)$, c'est à dire

$$f'(x)(y-x) + f(x) \leqslant f(y) \Longleftrightarrow f'(x) \leqslant \frac{f(y) - f(x)}{y-x}$$

   $\longrightarrow$ De même, si $g_y(t)$ est la tangente à f en $(y, f(y))$; alors, $g_y(t) = f'(y)(t-x) + f(y)$.
   Pour tout $t \in I$, nous avons $g_y(t) = f(t)$ et, en particulier $g_y(x) \leqslant f(x)$, c'est à dire

$$f'(y)(x-y) + f(y) \leqslant f(x) \Longleftrightarrow f'(y) \geqslant \frac{f(y) - f(x)}{y-x}$$

   Puisque $x - y < 0$
   $\longrightarrow$ Nous avons donc : $f'(x) \leqslant \dfrac{f(y) - f(x)}{y-x} \leqslant f'(y)$
   f' est donc croissante et f est convexe

4.4.10 Exercices sur la convexité

Exercice 26 :

1. Que dire de la somme de deux fonctions convexes ?
2. Que dire de la combinaison linéaire de deux fonctions convexes ?

Exercice 27 :

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et positive. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) = f(b) = 0$. Montrer que f est nulle sur l'intervalle $[a;b]$

Exercice 28 :

Soient f et g 2 fonctions convexes sur un intervalle I

1. Montrer que $h = \sup(f,g)$ est une fonction convexe
2. Que dire de $j = \inf(f,g)$?

Exercice 29 :

1. Démontrer que, pour tout $x > 0$ et tout $t \in [0;x]$, nous avons $1 + t \leqslant e^t \leqslant 1 + \dfrac{t}{x}(e^x - 1)$
2. Que se passe-t-il si $x < 0$?

Exercice 30 :

Utiliser la fonction f définie sur l'intervalle $]+1;+\infty[$ par $f(x) = \ln(\ln x)$ pour démontrer que

$$(\forall x > 1)(\forall y > 1)\left(\ln\left(\frac{x+y}{2}\right)\right) \geqslant \sqrt{(\ln x)(\ln y)}$$

Exercice 31 :

1. Démontrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(1 + e^x)$ est convexe
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x_1 > 0, \cdots, x_n > 0$ nous avons :

$$1 + \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \prod_{k=1}^{n}(1 + x_k)^{\frac{1}{n}}$$

3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et $a_1 > 0, \cdots, a_n > 0$ et $b_1 > 0, \cdots, b_n > 0$, nous avons :

$$\left(\prod_{k=1}^{n}(a_k + b_k)\right)^{\frac{1}{n}} \geqslant \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\prod_{k=1}^{n} b_k\right)^{\frac{1}{n}}$$

Exercice 32 :

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $a_1 > 0, \cdots, a_n > 0$, nous avons : $\sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i} \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i}$
2. Démontrer que, pour tout $x > 1$, nous avons $\sqrt{x^{2n} - 1} \geqslant \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1} \times \dfrac{x^n - 1}{\sqrt{n}}}$

Exercice 33 :

1. Vérifier que f, définie sur $\mathbb{R}^{*+}$ par $f(x) = x \ln x$ est convexe sur $\mathbb{R}^{*+}$
2. Démontrer que, pour tout $x > 0$, tout $y > 0$, tout $a > 0$ et tout $b > 0$ nous avons :

$$(x+y)\ln\left(\frac{x+y}{a+b}\right) \leqslant x \ln\left(\frac{x}{a}\right) + y \ln\left(\frac{y}{b}\right)$$

Exercice 34 :

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe

1. On suppose f strictement croissante. Etudier $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$
2. On suppose que f est bornée. Montrer que f est constante
3. On suppose que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Montrer que f est positive
4. On suppose que f admet une droite asymptote en $+\infty$. Etudier la position de $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f par rapport à la droite asymptote.

Exercice 35 :

Soit $f :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe.

1. Démontrer que la fonction $\dfrac{f(x)}{x}$ admet, en $+\infty$, la même limite que $h_1(x) = \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ et que cette limite est finie ou égale à $+\infty$
2. Montrer que si $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = L$, alors $g(x) = f(x) - Lx$ admet une limite finie ou $-\infty$ lorsque x tens vers $+\infty$

Exercice 36 :

Soit $f :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une application. Nous définissons $g :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ pour tout $x > 0$.

1. Montrer si g est décroissante, alors f est sous-additive sur $]0; +\infty[$.

   On doit qu'une fonction $\varphi :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ est <u>sous additive</u> si

$$(\forall a \in]0; +\infty[) (\forall a \in]0; +\infty[) (\varphi(a + b) \leqslant \varphi(a) + \varphi(b))$$

2. Montrer que si f est convexe et sous-additive, alors g est décroissante