4.5 Suites de fonctions et différentiabilité

Introduction

$\longrightarrow$ Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions, définie pour tout $x\in\mathbb{R}$ par $f_n(x)=\dfrac{\sin nx}{\sqrt{n}}$

Comme, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $|f_n(x)|\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{n}}$, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers la fonction nulle $\mathcal{O}$, c'est à dire la fonction telle que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\mathcal{O}(x)=0$

$\longrightarrow$ Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, la fonction f_n est dérivable et de dérivée $f'_n(x)=\dfrac{n\cos nx}{\sqrt{n}}=\sqrt{n}\cos nx$.

Ceci nous permet d'écrire que, par exemple, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $f'_n(0)=\sqrt{n}$ et que donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f'_n(0)=+\infty$, alors que $\mathcal{O}'(x)=0$.

C'est à dire que la suite de fonctions $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas vers la dérivée de la limite de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

$\longrightarrow$ A quelles conditions avons nous $\lim\limits_{n\to+\infty} f'_n=\left(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n\right)'$. Le résultat suivant tente d'y répondre *(mais, ce n'est pas simple !)*

4.5.1 Théorème

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions dérivables sur un intervalle $[a;b]$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$.
On suppose que :

- **Il existe $c\in[a;b]$ tel que la suite numérique $(f_n(c))_{n\in\mathbb{N}}$ converge**
- **La suite $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des fonctions dérivées des f_n converge uniformément sur $[a;b]$ vers une fonction φ**

Alors :

1. **La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a;b]$ vers une fonction f**
2. **f est dérivable sur $[a;b]$**
3. **Pour tout $x\in[a;b]$, $f'(x)=\varphi(x)\iff f'(x)=\lim\limits_{n\to+\infty} f'_n(x)$, c'est à dire que nous avons :**

$$\lim_{n\to+\infty} f'_n=\left(\lim_{n\to+\infty} f_n\right)'$$

Démonstration

1. On montre que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a;b]$ vers une fonction f

Soient $p\in\mathbb{N}$ et $q\in\mathbb{N}$ et nous considérons la fonction $\Phi=f_p-f_q$ à laquelle nous allons appliquer le théorème des accroissements finis entre un nombre $x\in[a;b]$ et c.

Il existe donc ξ compris entre c et x *(c'est à dire $\xi\in\,]c;x[$ ou $\xi\in\,]x;c[$)* tel que

$$\frac{\Phi(x)-\Phi(c)}{x-c}=\Phi'(\xi)$$

Ce qui traduit autrement nous donne :

$$\frac{(f_p-f_q)(x)-(f_p-f_q)(c)}{x-c}=(f_p-f_q)'(\xi)\iff\frac{(f_p(x)-f_q(x))-(f_p(c)-f_q(c))}{x-c}=\left(f'_p(\xi)-f'_q(\xi)\right)$$

D'où nous tirons :

$$f_p(x)-f_q(x)=(f_p(c)-f_q(c))+(x-c)\left(f'_p(\xi)-f'_q(\xi)\right)$$

Et alors :

$$\begin{aligned}|f_p(x)-f_q(x)|\leqslant\;& |f_p(c)-f_q(c)|+|x-c|\left|f'_p(\xi)-f'_q(\xi)\right|\\ \leqslant\;& |f_p(c)-f_q(c)|+|a-b|\left|f'_p(\xi)-f'_q(\xi)\right| \text{ car } x\in[a;b] \text{ et } c\in[a;b]\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$.
Comme la suite $(f_n(c))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, elle est de Cauchy, et donc, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que si $p > q > N_1$, alors $|f_p(c) - f_q(c)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$
Comme la suite $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des fonctions dérivées des f_n converge uniformément sur $[a;b]$, il existe un entier $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p > q > N_2$ et **tout** $x \in [a;b]$, nous avons

$$\left|f'_p(x) - f'_q(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2|a-b|}$$

En particulier pour $x = \xi$, nous avons, pour $p > q > N_2$, $\left|f'_p(\xi) - f'_q(\xi)\right| < \dfrac{\varepsilon}{2|a-b|}$.
Ainsi, pour $N = \max\{N_1, N_2\}$ et pour $p > q > N$, nous avons :

$$|f_p(x) - f_q(x)| \leqslant |f_p(c) - f_q(c)| + |a-b|\left|f'_p(\xi) - f'_q(\xi)\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Et ceci étant vrai pour tout $x \in [a;b]$, ceci démontre que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a;b]$ vers une fonction f.

2. <u>Montrons que f est dérivable et que $f' = \lim\limits_{n\to+\infty} f'_n$</u>

Soit $x_0 \in [a;b]$

⋆ On construit une suite de fonctions $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur l'intervalle $[a;b]$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} \rho_n : [a;b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \rho_n(x) = \begin{cases} \dfrac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} \text{ si } x \neq x_0 \\ f'_n(x_0) \text{ si } x = x_0 \end{cases} \end{cases}$$

Il est clair que la fonction $_rho_n$ est continue sur $[a;b]$

⋆ Construisons une seconde fonction ρ, définie sur l'intervalle $[a;b]$ par :

$$\begin{cases} \rho : [a;b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \rho(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ si } x \neq x_0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} f'_n(x_0) = \varphi(x_0) \text{ si } x = x_0 \end{cases} \end{cases}$$

⋆ Si nous réussissons à démontrer que ρ est une fonction continue sur $[a;b]$, c'est à dire que si nous réussissons à démontrer que :

$$\lim_{x\to x_0} \rho(x) = \rho(x_0) \Longleftrightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \varphi(x_0) = \lim_{n\to+\infty} f'_n(x_0)$$

Nous aurons réussi à démontrer que f est dérivable en x_0 et que $f'(x_0) = \varphi(x_0) = \lim\limits_{n\to+\infty} f'_n(x_0)$ et nous aurons

$$f' = \lim_{n\to+\infty} f'_n \Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty} f'_n = \left(\lim_{n\to+\infty} f_n\right)'$$

⋆ Tout d'abord, il est évident que la suite de fonctions $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ <u>converge simplement</u> vers la fonction ρ.
Montrons que la suite $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ <u>converge uniformément</u> vers la fonction ρ.
Dans ce cas, comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions ρ_n sont continues, ρ qui est la limite uniforme de la suite $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sera elle aussi continue, et nous aurons démontré le théorème

• <u>**Montrons que la suite $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément**</u>
Soit $x \in [a;b]$. Alors, pour $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} |\rho_p(x) - \rho_q(x)| &= \left|\frac{f_p(x) - f_p(x_0)}{x - x_0} - \frac{f_q(x) - f_q(x_0)}{x - x_0}\right| \\ &= \left|\frac{(f_p - f_q)(x) - (f_p - f_q)(x_0)}{x - x_0}\right| \end{aligned}$$

En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction $f_p - f_q$ entre x et x_0, il existe c entre x et x_0 tel que :

$$\frac{(f_p - f_q)(x) - (f_p - f_q)(x_0)}{x - x_0} = (f_p - f_q)'(c) = f_p'(c) - f_q'(c)$$

Il existe ainsi c entre x et x_0 tel que $|\rho_p(x) - \rho_q(x)| = \left|f_p'(c) - f_q'(c)\right|$
Soit $\varepsilon > 0$
La suite $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ des fonctions dérivées des f_n converge uniformément sur $[a;b]$. Elle vérifie donc le critère de Cauchy.
Il existe donc $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que si $p > q > N_\varepsilon$, alors $\left|f_p'(c) - f_q'(c)\right| < \varepsilon$
Ainsi, si $p > q > N_\varepsilon$, alors, pour tout $x \in [a;b]$, $|\rho_p(x) - \rho_q(x)| < \varepsilon$ et la suite de fonctions $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a;b]$ vers ρ qui est donc continue.

Ce que nous voulions

Et le théorème est démontré

Remarque 15 :

La convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas dans les hypothèses, mais dans le résultat.

Exemple 8 :

Soient $a > 0$ et la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie sur $[0;a]$ par $f_n(x) = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)x^2 + (-1)^n$

Toutes les fonctions f_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;a]$; la suite des dérivées $f_n'(x) = 2\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)x$ converge uniformément sur vers la fonction $g(x) = 2x$; pourtant, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas uniformément sur $[0;a]$; en effet, il manque la condition : « il existe $c \in [0;a]$ tel que la suite numérique $(f_n(c))_{n\in\mathbb{N}}$ converge ».

4.5.2 Corollaire

Si une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $[a;b]$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$. On suppose que :

- **La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[a;b]$**
- **La suite $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ des fonctions dérivées des f_n converge uniformément sur $[a;b]$ vers une fonction φ**

Alors, la limite de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a;b]$ et nous avons aussi

$$\lim_{n\to+\infty} f_n' = \left(\lim_{n\to+\infty} f_n\right)'$$

Démonstration

Voilà un véritable corollaire de 4.5.1

1. Comme la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[a;b]$, pour tout $c \in [a;b]$, la suite numérique $(f_n(c))_{n\in\mathbb{N}}$ converge
2. Comme la suite des fonctions dérivées $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a;b]$, d'après 4.5.1, la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a;b]$
3. Toutes les fonctions f_n étant de classe $\mathcal{C}^1$, la convergence de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant uniforme, la limite f est donc continue et telle que $f' = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n'$, c'est à dire $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n' = \left(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n\right)'$
4. La convergence de la suite $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ étant uniforme, la limite f' est donc continue ; f est donc de classe $\mathcal{C}^1$