4.6 Exercices complémentaires variés

Exercice 37 :

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{2n} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{n+k}$ est convergente. On appelle l sa limite
2. Soit f une fonction numérique définie sur $[-1;+1]$, dérivable en 0 et nulle en 0 *(c'est à dire* $f(0)=0$*)*. On considère la suite $(S_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :
$$S_n(f) = f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{1}{n+1}\right) + f\left(\frac{1}{n+2}\right) + \cdots + f\left(\frac{1}{2n}\right) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{1}{n+k}\right)$$
Montrer que la suite $(S_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une limite $S(f)$ qu'il possible d'exprimer en fonction de l et de $f'(0)$
3. Appliquer le résultat précédent à la fonction $f(x) = \ln(1+x)$ et en déduire la valeur de l

Exercice 38 :

Soient $\alpha > 1$, $\beta > 1$ et $f : [0;1] \longrightarrow]0;+\infty[$ une application dérivable sur $]0;1[$. On suppose que :
$$f(0) = 0 \text{ et } (\forall x \in]0;1[)\,(f'(x) > 0)$$
En étudiant $g(x) = (f(x))^{\alpha} \times (f(1-x))^{\beta}$, démontrer qu'il existe $c \in]0;1[$ tel que :
$$\alpha\frac{f'(c)}{f(c)} = \beta\frac{f'(1-c)}{f'(c)}$$

Exercice 39 :

Cet exercice utilise la notion de convexité pour démontrer des inégalités importantes

On dit que 2 nombres réels $p>1$ et $q>1$ sont conjugués si $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$.

Soient donc $p>1$ et $q>1$ 2 nombres réels conjugués.

1. Démontrer que, pour tout $u\in\mathbb{C}^*$ et tout $v\in\mathbb{C}^*$, nous avons :
$$|uv| \leqslant \frac{|u|^p}{p} + \frac{|v|^q}{q}$$
2. Soit $a_1,\cdots,a_n,b_1,\cdots,b_n$, une famille de $2n$ nombres complexes. On pose :
$$\alpha = \left[\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\right]^{\frac{1}{p}} \qquad \beta = \left[\sum_{i=1}^{n}|b_i|^q\right]^{\frac{1}{q}}$$
Et on suppose $\alpha>0$ et $\beta>0$
Démontrer que, pour tout $i=1,\cdots,n$, nous avons :
$$\frac{|a_ib_i|}{\alpha\beta} \leqslant \frac{|a_i|^p}{p\times\alpha^p} + \frac{|b_i|^q}{q\times\alpha^q}$$
3. Démontrer l'inégalité de Hölder :
$$\sum_{i=1}^{n}|a_ib_i| \leqslant \left[\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\right]^{\frac{1}{p}} \times \left[\sum_{i=1}^{n}|b_i|^q\right]^{\frac{1}{q}}$$
Quelle inégalité obtenons nous pour $p=q=2$?
4. Démontrer l'inégalité de Minkowski
$$\left[\sum_{i=1}^{n}|a_i+b_i|^p\right]^{\frac{1}{p}} \leqslant \left[\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\sum_{i=1}^{n}|b_i|^q\right]^{\frac{1}{q}}$$