4.8 Exercices résolus

4.8.1 Différentiabilité, dérivabilité

Exercice 1 :

1. *On considère la fonction f, définie, pour tout $x \in [-1;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x^3+x^2}$. Etudier la dérivabilité de f en $x_0 = 0$*

   Il est possible d'écrire autrement f. En effet, $f(x) = \sqrt{x^3+x^2} = \sqrt{x^2(x+1)} = |x|\sqrt{(x+1)}$. Nous étudierons alors les dérivées à droite et à gauche de 0

   - A droite de 0

   $$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{|x|\sqrt{(x+1)}}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{x\sqrt{(x+1)}}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \sqrt{(x+1)} = 1$$

   Donc $f'_d(0) = 1$

   - A gauche de 0

   $$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{|x|\sqrt{(x+1)}}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{-x\sqrt{(x+1)}}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} -\sqrt{(x+1)} = -1$$

   Donc $f'_g(0) = -1$

   Les dérivées à droite et à gauche de 0 de f sont différentes. f n'est donc pas dérivable en 0

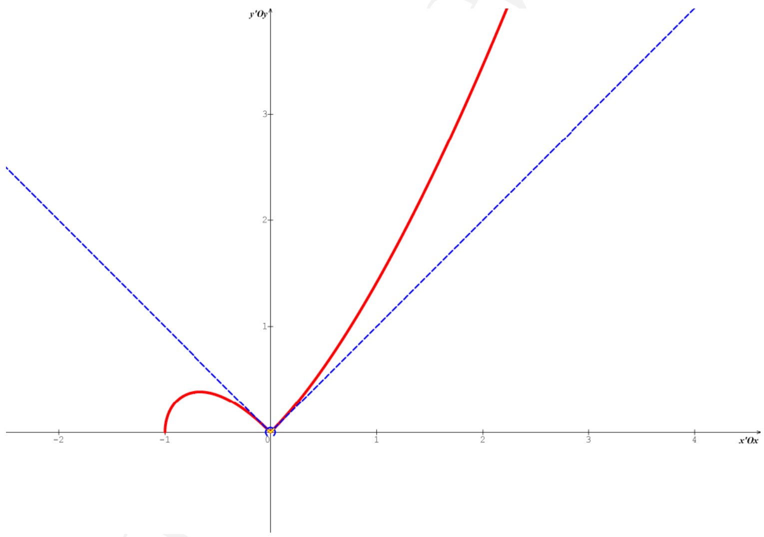

FIGURE 4.6 – Le graphe de la fonction $f(x) = \sqrt{x^3+x^2}$ et les tangentes à droite et à gauche au graphe de f en 0

2. *Même question pour la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :*

$$\left\{\begin{array}{lcl} f:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \left\{\begin{array}{l} x^2\sin\dfrac{1}{x} \text{ si } x\neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0\end{array}\right.\end{array}\right.$$

   - ⋆ Comme $|f(x)| \leqslant |x^2|$, nous avons $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$, et donc f est continue en 0
   - ⋆ D'autre part, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x} = x\sin\dfrac{1}{x}$
   - ⋆ Donc, $\left|\dfrac{f(x)-f(0)}{x}\right| = \left|x\sin\dfrac{1}{x}\right| \leqslant |x|$ et donc $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x} = 0$. Ainsi, f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$

Exercice 2 :

On dit qu'une fonction f satisfait à la condition de Lipschitz d'ordre α en x_0 s'il existe un nombre positif $M > 0$ et un intervalle $I =]x_0 - a : x_0 + a[$ (avec $a > 0$) tel que, pour tout $x \in I$, $|f(x) - f(x_0)| < M|x - x_0|^{\alpha}$

1. *Montrer qu'une fonction qui vérifie une condition de Lipschitz d'ordre $\alpha > 0$ est continue en x_0*

   Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Nous avons alors $|f(x) - f(x_0)| < M|x - x_0|^{\alpha}$, et comme $\lim\limits_{x \to x_0} |x - x_0|^{\alpha} = 0$, nous avons $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x) - f(x_0)| = 0$, c'est à dire que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

   f est donc continue en x_0

2. *Montrer qu'une fonction qui vérifie une condition de Lipschitz d'ordre $\alpha > 1$ est dérivable en x_0 et de dérivée nulle*

   Pas plus difficile que ci-dessus :

$$\left|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right| = \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|} \leqslant M|x - x_0|^{\alpha - 1}$$

   Comme $1 - \alpha > 0$, nous avons $\lim\limits_{x \to x_0} |x - x_0|^{\alpha - 1} = 0$, et donc, si $\alpha > 1$, alors $\lim\limits_{x \to x_0} \left|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right| = 0$. Ce qui veut dire que $f'(x_0)$ existe et que $f'(x_0) = 0$

Exercice 3 :

Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et f, une fonction définie dans un voisinage de x_0 à valeurs dans $\mathbb{R}$ et dérivable en x_0. Démontrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $b \in \mathbb{R}$ tels que $a > 0$ et $b > 0$,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + bh) - f(x_0 - ah)}{(a + b)h} = f'(x_0)$$

Il nous faut "triturer" $\dfrac{f(x_0 + bh) - f(x_0 - ah)}{(a + b)h}$. Nous avons donc :

$$\begin{aligned}
\frac{f(x_0 + bh) - f(x_0 - ah)}{(a + b)h} &= \frac{f(x_0 + bh) - f(x_0) + f(x_0) - f(x_0 - ah)}{(a + b)h} \\
&= \frac{f(x_0 + bh) - f(x_0)}{(a + b)h} + \frac{f(x_0) - f(x_0 - ah)}{(a + b)h} \\
&= \frac{bh}{(a + b)h} \times \left[\frac{f(x_0 + bh) - f(x_0)}{bh}\right] + \frac{ah}{(a + b)h} \times \left[\frac{f(x_0) - f(x_0 - ah)}{ah}\right] \\
&= \frac{b}{a + b} \times \left[\frac{f(x_0 + bh) - f(x_0)}{bh}\right] + \frac{a}{a + b} \times \left[\frac{f(x_0 - ah) - f(x_0)}{-ah}\right]
\end{aligned}$$

Nous avons :

- $\star$ $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + bh) - f(x_0)}{bh} = f'(x_0)$
- $\star$ $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 - ah) - f(x_0)}{-ah} = f'(x_0)$

Donc $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + bh) - f(x_0 - ah)}{(a + b)h} = \dfrac{b}{a + b} \times f'(x_0) + \dfrac{b}{a + b} \times f'(x_0) = f'(x_0)$

Ce que nous voulions

Exercice 4 :

1. *Soit $f :]-1; +1[\longrightarrow \mathbb{R}$ une application dérivable en 0. On considère 2 suites réelles $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui, toutes deux, tendent vers 0 et telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 < a_n < 0 < b_n < 1$.*

   Montrer que la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $X_n = \dfrac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n}$ converge vers $f'(0)$

Il peut paraître, au début que cet exercice ressemble à celui que nous venons de résoudre. Il y a cependant une différence énorme, dans le fait que $\dfrac{b_n}{b_n - a_n}$ *ou* $\dfrac{a_n}{b_n - a_n}$ *sont des formes indéterminées. Il faut donc attaquer le problème différemment et pensez à multiplier par 1 ou ajouter 0....pour que rien ne change, et alors, tout change !!*

Tout d'abord, remarquons que $b_n - a_n > 0$, que $0 < \dfrac{b_n}{b_n - a_n} < 1$, ainsi que $0 < \dfrac{-a_n}{b_n - a_n} < 1$

Ensuite :

$$\begin{aligned} X_n - f'(0) &= \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} - \frac{b_n - a_n}{b_n - a_n} f'(0) \\ &= \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} - \frac{b_n - a_n}{b_n - a_n} f'(0) + \frac{1}{b_n - a_n}(f(0) - f(0)) \\ &= \frac{1}{b_n - a_n}[f(b_n) - f(0) - b_n f'(0)] - \frac{1}{b_n - a_n}[f(a_n) - f(0) - a_n f'(0)] \end{aligned}$$

Or :

$$\frac{1}{b_n - a_n}[f(b_n) - f(0) - b_n f'(0)] = \frac{1}{b_n - a_n}\left[\frac{b_n f(b_n) - b_n f(0)}{b_n} - b_n f'(0)\right] = \frac{b_n}{b_n - a_n}\left[\frac{f(b_n) - f(0)}{b_n} - f'(0)\right]$$

De même :

$$\frac{1}{b_n - a_n}[f(a_n) - f(0) - a_n f'(0)] = \frac{a_n}{b_n - a_n}\left[\frac{f(a_n) - f(0)}{a_n} - f'(0)\right]$$

Donc :

$$|X_n - f'(0)| \leqslant \frac{b_n}{b_n - a_n}\left|\frac{f(b_n) - f(0)}{b_n} - f'(0)\right| + \frac{|a_n|}{b_n - a_n}\left|\frac{f(a_n) - f(0)}{a_n} - f'(0)\right|$$

Or, $0 < \dfrac{b_n}{b_n - a_n} < 1$ et $0 < \dfrac{|a_n|}{b_n - a_n} < 1$; donc :

$$|X_n - f'(0)| \leqslant \left|\frac{f(b_n) - f(0)}{b_n} - f'(0)\right| + \left|\frac{f(a_n) - f(0)}{a_n} - f'(0)\right|$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$, nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{f(b_n) - f(0)}{b_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{f(a_n) - f(0)}{a_n} = f'(0)$

Soit $\varepsilon > 0$

Il existe donc $N_b \in \mathbb{N}$ tel que, si $n \geqslant N_b$, alors $\left|\dfrac{f(b_n) - f(0)}{b_n} - f'(0)\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

De même, il existe donc $N_a \in \mathbb{N}$ tel que, si $n \geqslant N_a$, alors $\left|\dfrac{f(a_n) - f(0)}{a_n} - f'(0)\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

Soit $N = \max\{N_a ; N_b\}$. Pour $n \geqslant N$, nous avons :

$$|X_n - f'(0)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} X_n = f'(0)$.

2. *Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application dérivable en $x_0 \in \overset{\circ}{I}$. Démontrer que :*

$$\lim_{\substack{h\to0\\h>0\\k\to0\\k>0}} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - k)}{h + k} = f'(x_0)$$

Bien entendu, la technique est semblable au point ci-dessus.

$$\begin{aligned}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-k)}{h+k}-f'(x_0) &= \frac{f(x_0+h)-f(x_0)+f(x_0)-f(x_0-k)}{h+k}-\frac{(h+k)f'(x_0)}{h+k}\\ &= \frac{1}{h+k}\left(f(x_0+h)-f(x_0)-hf'(x_0)\right)+\\ &\qquad \frac{1}{h+k}\left(f(x_0)-f(x_0-k)-kf'(x_0)\right)\end{aligned}$$

Regardons, pour commencer $\frac{1}{h+k}\left(f(x_0+h)-f(x_0)-hf'(x_0)\right)$

$$\frac{1}{h+k}\left(f(x_0+h)-f(x_0)-hf'(x_0)\right)=\frac{h}{h+k}\left(\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-f'(x_0)\right)$$

Nous avons $0<\frac{h}{h+k}<1$ et $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0)$

De même :

$$\frac{1}{h+k}\left(f(x_0)-f(x_0-k)-kf'(x_0)\right)=\frac{k}{h+k}\left(\frac{f(x_0-k)-f(x_0)}{-k}-f'(x_0)\right)$$

Nous avons aussi $0<\frac{k}{h+k}<1$ et $\lim\limits_{k\to0}\frac{f(x_0-k)-f(x_0)}{-k}=f'(x_0)$

En synthèse :

$$\left|\frac{f(x_0+h)-f(x_0-k)}{h+k}-f'(x_0)\right|\leqslant\left|\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-f'(x_0)\right|+\left|\frac{f(x_0-k)-f(x_0)}{-k}-f'(x_0)\right|$$

Comme $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-f'(x_0)=0$ et $\lim\limits_{k\to0}\frac{f(x_0-k)-f(x_0)}{-k}-f'(x_0)=0$, nous avons :

$$\lim_{\substack{h\to0\\h>0\\k\to0\\k>0}}\left|\frac{f(x_0+h)-f(x_0-k)}{h+k}-f'(x_0)\right|=0$$

Et donc $\lim\limits_{\substack{h\to0\\h>0\\k\to0\\k>0}}\left(\frac{f(x_0+h)-f(x_0-k)}{h+k}\right)=f'(x_0)$

Exercice 5 :

Soit $I\subset\mathbb{R}$, un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f:I\longrightarrow\mathbb{R}$, une fonction dérivable à gauche et à droite de $x_0\in I$. Démontrer que f est continue en $x_0\in I$.

Nous allons démontrer que f est continue à droite et à gauche de x_0, c'est à dire que

$$\lim_{\substack{h\to0\\h>0}}f(x_0+h)=\lim_{\substack{h\to0\\h<0}}f(x_0+h)=f(x_0)$$

- ▷ f est dérivable à droite de x_0 ; il existe donc $\eta_1>0$ et une fonction ε_1 telle que $\lim\limits_{\substack{h\to0\\h>0}}\varepsilon_1(h)=0$ tels que, pour tout $h\in\mathbb{R}$, si $0<h<\eta_1$ alors

$$f(x_0+h)=f(x_0)+hf'_d(x_0)+h\varepsilon_1(h)$$

Il est donc clair que $\lim\limits_{\substack{h\to0\\h>0}}f(x_0+h)=f(x_0)$ et que f est continue à droite de x_0

- ▷ De même, f est dérivable à gauche de x_0 ; il existe donc $\eta_2>0$ et une fonction ε_2 telle que $\lim\limits_{\substack{h\to0\\h<0}}\varepsilon_2(h)=0$ tels que, pour tout $h\in\mathbb{R}$, si $-\eta_2<h<0$ alors

$$f(x_0+h)=f(x_0)+hf'_g(x_0)+h\varepsilon_2(h)$$

Donc $\lim\limits_{\substack{h\to0\\h<0}}f(x_0+h)=f(x_0)$ et f est continue à gauche de x_0

f est donc continue en x_0

4.8.2 Fonctions dérivées

Exercice 7 :

Soit $f(x) = x^n(1+x^n)$; en calculant de 2 manières différentes la dérivée n-ième de f, donner une expression simple de $\sum_{k=0}^{n}\left(\mathrm{C}_n^k\right)^2$

Voilà un exercice qui, finalement, pourrait s'avérer marrant !!

1. Il nous est tout à fait possible d'écrire $f(x) = u(x)v(x)$ où $u(x) = x^n$ et $v(x) = 1 + x^n$
2. D'autre part, d'après le cours de L_0, :
   - $u^{(k)}(x) = \mathrm{A}_n^k x^{n-k}$
   - Et, pour $k \geqslant 1$, $v^{(k)}(x) = \mathrm{A}_n^k x^{n-k}$ et $v^{(0)}(x) = 1 + x^n$
3. Ainsi, en premier lieu, de $f(x) = x^n(1+x^n) = x^n + x^{2n}$, nous avons :

$$f^{(n)}(x) = \mathrm{A}_n^n x^{n-n} + \mathrm{A}_{2n}^n x^{2n-n} = n! + \frac{(2n)!}{n!}x^n$$

4. <u>En utilisant la formule de Leibniz</u>, nous avons aussi :

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) = &\ (uv)^{(n)}(x) \\ = &\ \sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k v^{(k)}(x)\,u^{(n-k)}(x) \\ = &\ v^{(0)}(x)\,u^{(n)}(x) + \sum_{k=1}^{n}\mathrm{C}_n^k\mathrm{A}_n^k x^{n-k}\mathrm{A}_n^{n-k}x^k \\ = &\ (1+x^n)\,\mathrm{A}_n^n + x^n\sum_{k=1}^{n}\mathrm{C}_n^k\mathrm{A}_n^k\mathrm{A}_n^{n-k} \end{aligned}$$

   Or, $(1+x^n)\,\mathrm{A}_n^n = n! + n!x^n$ et donc $f^{(n)}(x) = n! + x^n\left(n! + \sum_{k=1}^{n}\mathrm{C}_n^k\mathrm{A}_n^k\mathrm{A}_n^{n-k}\right)$
   - Il faut, maintenant, évaluer $\mathrm{C}_n^k\mathrm{A}_n^k\mathrm{A}_n^{n-k}$. Or :

$$\mathrm{C}_n^k\mathrm{A}_n^k\mathrm{A}_n^{n-k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \times \frac{n!}{(n-k)!} \times \frac{n!}{k!} = n! \times \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \times \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = n! \times \left(\mathrm{C}_n^k\right)^2$$

   - Donc $\sum_{k=1}^{n}\mathrm{C}_n^k\mathrm{A}_n^k\mathrm{A}_n^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} n! \times \left(\mathrm{C}_n^k\right)^2 = n!\sum_{k=1}^{n}\left(\mathrm{C}_n^k\right)^2$
   - D'où $n! + \sum_{k=1}^{n}\mathrm{C}_n^k\mathrm{A}_n^k\mathrm{A}_n^{n-k} = n! + n!\sum_{k=1}^{n}\left(\mathrm{C}_n^k\right)^2 = n!\left(1 + \sum_{k=1}^{n}\left(\mathrm{C}_n^k\right)^2\right) = n!\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\mathrm{C}_n^k\right)^2\right)$
5. En identifiant les 2 calculs, nous obtenons :

$$n! + \frac{(2n)!}{n!}x^n = n! + x^n\left(n!\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\mathrm{C}_n^k\right)^2\right)\right)$$

   C'est à dire $\frac{(2n)!}{n!} = n!\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\mathrm{C}_n^k\right)^2\right) \Longleftrightarrow \frac{(2n)!}{n! \times n!} = \sum_{k=0}^{n}\left(\mathrm{C}_n^k\right)^2 \Longleftrightarrow \mathrm{C}_{2n}^n = \sum_{k=0}^{n}\left(\mathrm{C}_n^k\right)^2$

D'où le résultat : $\sum_{k=0}^{n}\left(\mathrm{C}_n^k\right)^2 = \mathrm{C}_{2n}^n$

Exercice 8 :

Soit $f(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$ *définie pour* $x \neq 0$.

Clairement, cette fonction n'est définie que sur $\mathbb{R}^*$; aussi nous l'étudierons, d'une part sur $]0; +\infty[$ et d'autre part sur $]-\infty; 0[$

1. *Calculez la dérivée de* f.

   Nous nous plaçons donc sur $\mathbb{R}^*$
   En utilisant la dérivée des fonctions composées, nous avons, pour $x \neq 0$

$$\arctan' \frac{1}{x} = \frac{-1}{x^2} \times \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{-1}{x^2} \times \frac{x^2}{1+x^2} = \frac{-1}{1+x^2}$$

   D'où, si $x \neq 0$, $f'(x) = 0$ et nous pouvons en déduire que f est une fonction constante sur chacun des intervalles composant son domaine de définition

2. *En déduire que si* $x > 0$, *alors* $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$, *et que si* $x < 0$ *alors* $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$

   - f est donc constante sur l'intervalle $]0; +\infty[$ et donc constamment égale à $f(1)$.
     Or, $f(1) = \arctan 1 + \arctan 1 = 2 \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$
   - De même, f est donc constante sur l'intervalle $]-\infty; 0[$ et donc constamment égale à $f(-1)$.
     Or, $f(-1) = \arctan -1 + \arctan -1 = 2 \times \frac{-\pi}{4} = \frac{-\pi}{2}$

   D'où le résultat et le graphe de f

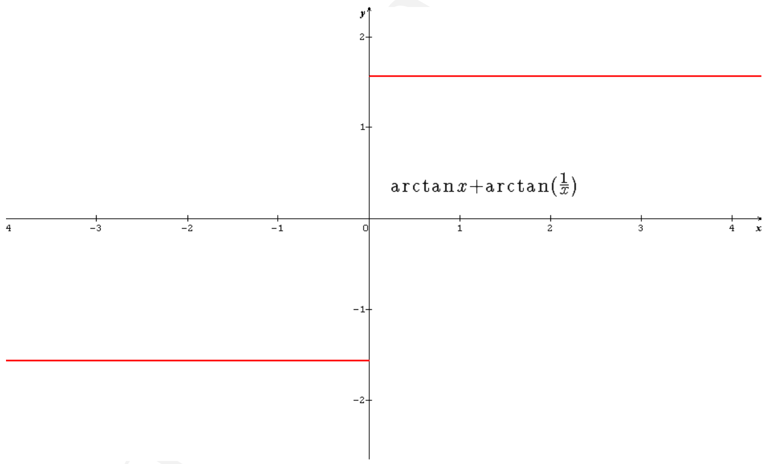

FIGURE 4.7 – Le graphe de la fonction $f(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$

Exercice 9 :

Soit f, *la fonction définie par :* $f(x) = x + x^2 \sin \frac{1}{x^2}$ *si* $x \neq 0$ *et* $f(0) = 0$

1. *Montrer que* f *est dérivable en* 0 *et donner* $f'(0)$

   Nous avons, et c'est facile à démontrer que $\frac{f(x)}{x} = 1 + x \sin \frac{1}{x^2}$. Comme $\left| x \sin \frac{1}{x^2} \right| \leqslant |x|$, $\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x^2} = 0$ et donc $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$, c'est à dire $f'(0)$ existe et $f'(0) = 1$

2. *Montrer que* f *n'est monotone sur aucun des voisinages de* 0

   L'objet de cette question est de démontrer que, pour tout $\alpha > 0$, f' ne garde pas de signe constant dans l'intervalle $]-\alpha; \alpha[$

Calculons $f'(x)$:

$$f'(x) = 1 + 2x\sin\frac{1}{x^2} + x^2 \times \frac{-2}{x^3}\cos\frac{1}{x^2} = 1 + 2x\sin\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}$$

Soit $\alpha > 0$
Considérons la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{2n\pi}}$
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que si $n > N$, alors $0 < x_n < \alpha$, c'est à dire que, pour tout $n > N$, nous avons $[-x_n; x_n] \subset]-\alpha;\alpha[$
Nous avons :

$$\sin\frac{1}{x_n^2} = \sin 2n\pi = 0 \text{ et } \cos\frac{1}{x_n^2} = \cos 2n\pi = 1$$

Et donc $f'(x_n) = 1 - 2\sqrt{2n\pi} < 0$ et $f'(-x_n) = 1 + 2\sqrt{2n\pi} > 0$
Ainsi, pour tout voisinage $]-\alpha;\alpha[$ de 0, la dérivée f' n'a pas de signe constant et ne peut y être monotone *(cf figure 4.8)*

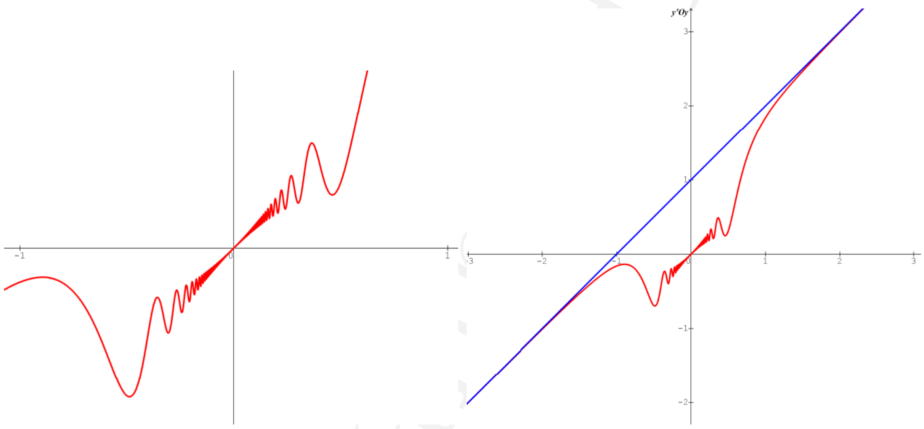

FIGURE 4.8 – Le graphe de la fonction $f(x) = x + x^2\sin\dfrac{1}{x^2}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ au voisinage de 0 et avec son comportement en $+\infty$

Exercice 10 :

Calculer les dérivées des fonctions suivantes, en précisant les domaines de définition de f et de f'

Cet exercice porte sur la dérivée des fonctions circulaires réciproques, et la dérivée des fonctions composées.

1. $f(x) = \arctan\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

   Pour que f existe, il faut que $\dfrac{1-x}{1+x} \geqslant 0$ et $1 + x \neq 0$, c'est à dire $x \in]-1;+1]$
   Nous avons, ici, $f(x) = \arctan u(x)$ dont la dérivée est donnée par :

   $$f'(x) = u'(x) \times [\arctan]' u(x) \Longleftrightarrow f'(x) = \frac{u'(x)}{1 + (u(x))^2}$$

   Il faut, maintenant, aller pas à pas
   ⋆ Nous avons : $u(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ et donc $u^2(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$ et $1 + u^2(x) = 1 + \dfrac{1-x}{1+x} = \dfrac{2}{1+x}$ de telle sorte que $\dfrac{1}{1+(u(x))^2} = \dfrac{1}{\frac{2}{1+x}} = \dfrac{x+1}{2}$

⋆ Il nous faut, maintenant calculer $u'(x)$
$u(x)$ est du type $u(x) = \sqrt{\alpha(x)} = (\alpha(x))^{\frac{1}{2}}$ et la dérivée est donc

$$u'(x) = \frac{\alpha'(x)}{2}(\alpha(x))^{\frac{-1}{2}} = \frac{\alpha'(x)}{2\sqrt{\alpha(x)}}$$

Or, $\alpha'(x) = \dfrac{-2}{(x+1)^2}$ et donc :

$$u'(x) = \frac{-2}{(x+1)^2} \times \frac{1}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} = \frac{-\sqrt{1+x}}{(x+1)^2\sqrt{1-x}}$$

⋆ Ainsi :

$$f'(x) = \frac{-\sqrt{1+x}}{(x+1)^2\sqrt{1-x}} \times \frac{x+1}{2} = \frac{-\sqrt{1+x}}{2(x+1)\sqrt{1-x}}$$

Evidemment, f' n'est définie que sur l'intervalle ouvert $]-1;+1[$

2. $f(x) = \arctan\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

La fonction $\arctan x$ est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ en entier. Ici, pour que $\arctan\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$ soit définie, il faut que $1-x^2>0$, c'est à dire $x \in]-1;+1[$
Supposons donc que $x \in]-1;+1[$

⋆ Nous sommes toujours devant une fonction du type $f(x) = \arctan u(x)$ dont la dérivée est donnée par : $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{1+(u(x))^2}$

⋆ Premier calcul : $\dfrac{1}{1+(u(x))^2} = \dfrac{1}{1+\frac{x^2}{1-x^2}} = 1-x^2$

⋆ Calcul de $u'(x)$:

$$\begin{array}{ll} a = x & a' = 1 \\ b = \sqrt{1-x^2} & b' = \dfrac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} \end{array}$$

D'où $u'(x) = \dfrac{a'b-b'a}{b^2} = \dfrac{\sqrt{1-x^2}+\dfrac{2x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \dfrac{1-x^2+2x^2}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{1+x^2}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$

⋆ Et nous pouvons maintenant donner $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{1+x^2}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} \times \left(1-x^2\right) = \frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

Le domaine de définition de f' est, lui aussi $]-1;+1[$

3. $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right) - 2\arctan x$

D'une part, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fraction $\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ est toujours définie. D'autre part, le domaine de définition de la fonction $\arcsin x$ est $[-1;+1]$. Ainsi, pour que f soit définie, nous devons avoir : $-1 \leqslant \dfrac{1-x^2}{1+x^2} \leqslant +1$. Or : $-1 \leqslant \dfrac{1-x^2}{1+x^2} \leqslant +1 \Longleftrightarrow -1-x^2 \leqslant 1-x^2 \leqslant 1+x^2$
Ce qui est vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$
En rappelant que la fonction $\arctan x$ est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ en entier, le domaine de définition de f est donc $\mathbb{R}$

- Nous allons, tout d'abord, nous intéresser à $\arcsin\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)$

Cette expression est du type $\arcsin(u(x))$ dont la dérivée est donnée par $\dfrac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$

Nous avons $u^2(x) = \left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2 = \dfrac{(1-x^2)^2}{(1+x^2)^2}$ et

$$1-u^2(x) = \frac{(1+x^2)^2-(1-x^2)^2}{(1+x^2)^2} = \frac{4x^2}{(1+x^2)^2}$$

Et donc $\sqrt{1-u^2(x)} = \dfrac{2|x|}{1+x^2}$

- Calculons, maintenant $u'(x)$:

$$\begin{array}{ll} a = 1-x^2 & a' = -2x \\ b = 1+x^2 & b' = 2x \end{array}$$

D'où $u'(x) = \dfrac{a'b-b'a}{b^2} = \dfrac{-2x(1+x^2)-2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = \dfrac{-4x}{(1+x^2)^2}$

- Et nous pouvons maintenant donner $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{-4x}{(1+x^2)^2} \times \frac{1+x^2}{2|x|} - \frac{2}{1+x^2} = \frac{-2x}{|x|} \times \frac{1}{1+x^2} - \frac{2}{1+x^2} = \frac{-2}{1+x^2}\left(\frac{x}{|x|}-1\right)$$

C'est à dire :

$$f'(x) = 0 \text{ si } x \geqslant 0 \quad \text{ et } \quad f'(x) = \frac{-4}{1+x^2} \text{ si } x \leqslant 0$$

4. $f(x) = \arccos\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$

Pour que la fonction f soit définie, il faut que, d'abord, $1-x^2 \geqslant 0$, c'est à dire que $x \in [-1;+1]$

D'autre part, nous devons avoir $-1 \leqslant \left(2x\sqrt{1-x^2}\right) \leqslant +1$

⋆ Avons nous $2x\sqrt{1-x^2} \leqslant +1$ pour tout $x \in [-1;+1]$?

$\longrightarrow$ Si $0 \leqslant x \leqslant 1$, alors, nous avons $2x\sqrt{1-x^2} \geqslant 0$ et :

$$0 \leqslant 2x\sqrt{1-x^2} \leqslant 1 \Longleftrightarrow 4x^2(1-x^2) \leqslant 1$$

Il faut donc étudier la fonction $\varphi(x) = -4x^4+4x^2-1$.

Nous avons $\varphi'(x) = -16x^3+8x = 8x(1-2x^2)$.

Ainsi, $\varphi'(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$ ou $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $\varphi'(x) \geqslant 0$ si $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $\varphi'(x) \leqslant 0$ si $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqslant x \leqslant +1$.

Comme $\varphi(0) = \varphi(1) = -1$ et $\varphi\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$, pour tout $x \in [0;+1]$, nous avons $-1 \leqslant \varphi(x) \leqslant 0$, c'est à dire que, pour tout $x \in [0;+1]$, nous avons $2x\sqrt{1-x^2} \leqslant +1$

$\longrightarrow$ Si $-1 \leqslant x \leqslant 0$, alors, $\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) \leqslant 0 \leqslant +1$

Mais :$-1 \leqslant x \leqslant 0 \Longrightarrow 0 \leqslant -x \leqslant +1$ et nous avons $2(-x)\sqrt{1-(-x)^2} = -2x\sqrt{1-x^2} \geqslant 0$.

D'après l'étude précédente, nous avons : $0 \leqslant -2x\sqrt{1-x^2} \leqslant +1$, c'est à dire $-1 \leqslant 2x\sqrt{1-x^2} \leqslant 0$

Donc, pour tout $x \in [-1;+1]$, nous avons $-1 \leqslant \left(2x\sqrt{1-x^2}\right) \leqslant +1$, c'est à dire que f n'est définie que sur $[-1;+1]$

⋆ Calculons la dérivée de $\arccos\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$

Cette expression est du type $\arccos(u(x))$ où $u(x) = 2x\sqrt{1-x^2}$dont la dérivée est donnée par $\dfrac{-u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$

⋆ Calculons $1-u^2(x)$. Rien de plus simple :

$$1-u^2(x) = 1-\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) = 1-4x^2(1-x^2) = 4x^4-4x^2+1$$

⋆ Calculons maintenant $u'(x)$

$$u'(x) = 2\sqrt{1-x^2} + 2x \times \left(\frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \frac{2\left(1-x^2\right)-4x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2-6x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

⋆ D'où $f'(x) = \dfrac{2-6x^2}{\sqrt{1-x^2}} \times \dfrac{1}{\sqrt{4x^4-4x^2+1}} = \dfrac{2-6x^2}{\sqrt{-4x^6+8x^4-5x^2+1}}$
On doit faire remarquer que f' n'existe que pour $x \in \left]-1;+1\right[$

Exercice 11 :

Calculer les dérivées n-ièmes des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = \dfrac{x^5}{1+x}$

Nous commençons par la question la plus simple!!
Nous décomposons $f_1(x)$ en éléments simples

En utilisant la division des polynômes ou en remarquant que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-x)^k = \frac{1-(-x)^{n+1}}{1+x}$ nous avons

$$\frac{-(-x)^{n+1}}{1+x} = \sum_{k=0}^{n}(-x)^k - \frac{1}{1+x}$$

Ainsi, pour $n=4$, nous avons $\dfrac{x^5}{1+x} = 1-x+x^2-x^3+x^4-\dfrac{1}{1+x}$.

Nous avons donc $f_1(x) = P(x) - \varphi(x)$, et donc $f_1^{(n)}(x) = P^{(n)}(x) - \varphi^{(n)}(x)$

$\longrightarrow$ Calculons les dérivées successives de P :

⋆ $P'(x) = 4x^3 - 3x^2 + x - 1$
⋆ $P''(x) = 12x^2 - 6x + 1$
⋆ $P^{(3)}(x) = 24x - 6$
⋆ $P^{(4)}(x) = 24$
⋆ Et donc, pour $n \geqslant 5$, $P^{(n)}(x) = 0$

$\longrightarrow$ Calculons les dérivées successives de φ ; il nous est possible d'écrire $\varphi(x) = (1+x)^{-1}$

⋆ $\varphi'(x) = -(1+x)^{-2}$
⋆ $\varphi''(x) = 2(1+x)^{-3}$
⋆ $\varphi^{(3)}(x) = -6(1+x)^{-4}$
⋆ On « subodore » que $\varphi^{(n)}(x) = (-1)^n n!(1+x)^{-n-1}$. Démontrons le par récurrence.
- C'est vrai pour $n=0$, puisque $\varphi^{(0)}(x) = \varphi(x) = (1+x)^{-1} = (-1)^0 0!(1+x)^{-0-1}$
- Supposons que jusqu'au rang n, nous ayions $\varphi^{(n)}(x) = (-1)^n n!(1+x)^{-n-1}$
- Démontrons le à l'ordre $n+1$
$\varphi^{(n+1)}(x) = \left(\varphi^{(n)}\right)'(x) = -(n+1)\times(-1)^n n! \times (1+x)^{-n-2}$.
Or, $(1+x)^{-n-2} = (1+x)^{-(n+1)-1}$ et nous avons donc $\varphi^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1}(n+1)!(1+x)^{-(n+1)-1}$

C'est à dire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi^{(n)}(x) = (-1)^n n!(1+x)^{-n-1}$

En conclusion :

$$f_1'(x) = 4x^3 - 3x^2 + x - 1 + (1+x)^{-2} = 4x^3 - 3x^2 + x - 1 + \frac{1}{(1+x)^2}$$

$$f_1''(x) = 12x^2 - 6x + 1 - 2(1+x)^{-3} = 12x^2 - 6x + 1 - \frac{2}{(1+x)^3}$$

$$f_1^{(3)}(x) = 24x - 6 + 6(1+x)^{-4} = 24x - 6 + \frac{6}{(1+x)^4}$$

$$f_1^{(4)}(x) = 24 - 24(1+x)^{-5} = 24 - \frac{24}{(1+x)^5}$$

$$\text{Et pour } n \geqslant 5 \quad f_1^{(n)}(x) = (-1)^n n! (1+x)^{-n-1} = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$$

2. $f_2(x) = \dfrac{x^4}{(1+x)^3}$

   Pourquoi ne pas utiliser la formule de Leibniz ?

   Posons alors $\varphi(x) = x^4$ et $\psi(x) = \dfrac{1}{(1+x)^3} = (1+x)^{-3}$ et nous avons :

$$f_2^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k \varphi^{(k)}(x)\, \psi^{(n-k)}(x)$$

   ⋆ Calcul des dérivées successives de φ

$$\begin{array}{ccc} \varphi^{(0)}(x) = x^4 & \varphi'(x) = 4x^3 & \varphi^{(2)}(x) = 12x^2 \\ \varphi^{(3)}(x) = 24x & \varphi^{(4)}(x) = 24 & \varphi^{(n)}(x) = 0 \text{ pour tout } n \geqslant 5 \end{array}$$

   — Calcul des dérivées successives de ψ

   Commençons par quelques calculs :

$$\psi'(x) = -3(1+x)^{-4} \quad \psi''(x) = 12(1+x)^{-5} \quad \psi^{(3)}(x) = -60(1+x)^{-6}$$

   On peut penser que $\psi^{(k)}(x) = (-1)^k \dfrac{(k+2)!}{2} (1+x)^{-(k+3)}$

   Nous allons le démontrer par récurrence :

   - **Nous le vérifions** pour $n = 0$

     $\psi^{(0)}(x) = \dfrac{(0+2)!}{2}(1+x)^{-(0+3)} = (1+x)^{-3} = \psi(x)$
   - **Supposons que c'est vrai jusque l'ordre** k
   - **Démontrons maintenant à l'ordre** $k+1$

$$\begin{aligned} \psi^{(k+1)}(x) = & \left(\psi^{(k+1)}\right)'(x) = (-1)^k \times -(k+3)\frac{(k+2)!}{2}(1+x)^{-(k+3)-1} \\ = & (-1)^{k+1}\frac{(k+3)!}{2}(1+x)^{-(k+4)} \\ = & (-1)^{k+1}\frac{((k+1)+2)!}{2}(1+x)^{-(k+1)+3} \end{aligned}$$

   La propriété est donc vraie à l'ordre $k+1$

   Donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\psi^{(k)}(x) = (-1)^k \dfrac{(k+2)!}{2}(1+x)^{-(k+3)}$

   D'où

$$\begin{aligned} f_2^{(n)}(x) = & \sum_{k=0}^{4} \mathrm{C}_n^k \varphi^{(k)}(x)\, \psi^{(n-k)}(x) \\ = & \sum_{k=0}^{4} \mathrm{C}_n^k \varphi^{(k)}(x) (-1)^{n-k} \frac{(n-k+2)!}{2}(1+x)^{-(n-k+3)} \\ = & \frac{n!}{2}\sum_{k=0}^{4} \frac{(-1)^{n-k}(n-k+1)(n-k+2)}{k!}\varphi^{(k)}(x)(1+x)^{-(n-k+3)} \end{aligned}$$

3. $f_3(x) = \arctan x$

   Alors, là, cette fois-ci, c'est plutôt difficile et la question doit être rédigée en plusieurs étapes

   (a) Pour commencer, nous savons que la dérivée première de $f_3(x) = \arctan x$ est $f_3'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, et c'est à partir de cette expression que nous allons nous attaquer à la dérivée n-ième de f_3

   (b) Nous décomposons $\dfrac{1}{1+x^2}$ en éléments simples ; et là, nous arrivons dans l'ensemble des complexes. En effet :

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i}\right]$$

Si nous posons $\varphi(x) = \dfrac{1}{x-i}$ et $\psi(x) = \dfrac{1}{x+i}$, alors $f_3^{(n+1)}(x) = \dfrac{1}{2i}\left[\varphi^{(n)}(x) - \psi^{(n)}(x)\right]$

(c) Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, il est facile de démontrer par récurrence que la dérivée n-ième de $u(x) = (x+\lambda)^{-1}$ est $u^{(n)}(x) = (-1)^n \times n!\,(x+\lambda)^{-n-1}$
Ainsi : $\varphi^{(n)}(x) = (-1)^n\, n!\,(x-i)^{-n-1}$ et $\psi^{(n)}(x) = (-1)^n\, n!\,(x+i)^{-n-1}$

(d) Donc :

$$\frac{1}{2i}\left[\varphi^{(n)}(x) - \psi^{(n)}(x)\right] = \frac{(-1)^n\, n!}{2i}\left[\frac{1}{(x-i)^{n+1}} - \frac{1}{(x+i)^{n+1}}\right]$$

Et nous avons :

$$\frac{1}{(x-i)^{n+1}} - \frac{1}{(x+i)^{n+1}} = \frac{(x+i)^{n+1} - (x-i)^{n+1}}{(x^2+1)^{n+1}}$$

(e) Il nous faut, maintenant, simplifier $(x+i)^{n+1} - (x-i)^{n+1}$

- En utilisant le binôme de Newton : $(x+i)^{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \mathrm{C}_{n+1}^{k} i^k x^{n+1-k}$
- De même, $(x-i)^{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \mathrm{C}_{n+1}^{k} (-i)^k x^{n+1-k}$
- Et, en additionnant, $(x+i)^{n+1} - (x-i)^{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \mathrm{C}_{n+1}^{k} \left(i^k - (-i)^k\right) x^{n+1-k}$
- La question est, maintenant de calculer $\left(i^k - (-i)^k\right)$
  - ▷ Pour commencer : $i^k - (-i)^k = i^k - (-1)^k i^k = i^k\left(1 - (-1)^k\right)$
  - ▷ Ainsi, si k est pair, $1 - (-1)^k = 0$ et donc $\left(i^k - (-i)^k\right) = 0$
  - ▷ Et, si k est impair, $(-1)^k = -1$, $1 - (-1)^k = 2$ et donc $\left(i^k - (-i)^k\right) = 2i^k$
- Mettons nous, maintenant à calculer $(x+i)^{n+1} - (x-i)^{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \mathrm{C}_{n+1}^{k} \left(i^k - (-i)^k\right) x^{n+1-k}$

  En posant $[x]$ la partie entière de x, et en tenant compte des résultats ci-dessus liés à la parité de n, nous avons :

$$(x+i)^{n+1} - (x-i)^{n+1} = 2i\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \mathrm{C}_{n+1}^{2k+1} (-1)^k x^{n+1-2k-1} = 2i\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \mathrm{C}_{n+1}^{2k+1} (-1)^k x^{n-2k}$$

(f) Et donc, en remontant :

$$f_3^{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^n\, n!}{2i}\left[\frac{1}{(x-i)^{n+1}} - \frac{1}{(x+i)^{n+1}}\right] = \frac{(-1)^n\, n!}{2i} \times \frac{2i\displaystyle\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \mathrm{C}_{n+1}^{2k+1} (-1)^k x^{n-2k}}{(x^2+1)^{n+1}}$$

Et, pour terminer, $f_3^{(n+1)}(x) = \dfrac{(-1)^n\, n! \displaystyle\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \mathrm{C}_{n+1}^{2k+1} (-1)^k x^{n-2k}}{(x^2+1)^{n+1}}$

Nous avons aussi, le joli résultat suivant, vrai pour $x > 0$:

$$\arctan^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^n} \times \sin\left(n \arctan\frac{1}{x}\right)$$

4. $f_4(x) = \ln\left(x^2+1\right) - \arctan x$

   En posant $\omega(x) = \ln\left(x^2+1\right)$, nous avons $f_4(x) = \omega(x) - f_3(x)$, de telle sorte que $f_4^{(n)}(x) = \omega^{(n)}(x) - f_3^{(n)}(x)$.

   Nous connaissons déjà $f_3^{(n)}(x)$; il ne nous reste plus qu'à calculer $\omega^{(n)}(x)$

   - ⋆ Tout d'abord $\omega'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$
   - ⋆ Posons $u(x) = 2x$ et $v(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ et alors $\omega^{(n+1)}(x) = (uv)^{(n)}(x)$ et on calcule $(uv)^{(n)}(x)$ grâce à la formule de Leibniz.

   $$(uv)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k u^{(k)}(x)\, v^{(n-k)}(x)$$

   Or, il est facile de voir que :

   $$u^{(0)}(x) = u(x) = 2x \quad u^{(1)}(x) = u'(x) = 2 \quad \text{Et pour } k \geqslant 2\, u^{(k)}(x) = 0$$

   Et il faut remarquer que $v^{(n)}(x) = f_3^{(n+1)}(x)$ Donc :

   $$\omega^{(n+1)}(x) = (uv)^{(n)}(x) = u(x)\, v^{(n)}(x) + \mathrm{C}_n^1 u'(x)\, v^{(n-1)}(x) = 2x f_3^{(n+1)}(x) + 2n f_3^{(n)}(x)$$

   Donc :

   $$\begin{aligned} f_4^{(n)}(x) = &\ \omega^{(n)}(x) - f_3^{(n)}(x) \\ = &\ 2x f_3^{(n)}(x) + 2(n-1)\, f_3^{(n-1)}(x) - f_3^{(n)}(x) \\ = &\ (2x-1)\, f_3^{(n)}(x) + 2(n-1)\, f_3^{(n-1)}(x) \end{aligned}$$

5. $f_5(x) = x^{n-1}\ln x$

   Posons $\varphi(x) = x^{n-1}$ et $\psi(x) = \ln x$. Alors, en utilisant la formule de Leibniz, nous avons $f_5^{(n)}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k \psi^{(k)}(x)\, \varphi^{(n-k)}(x)$

   Il faut donc connaître les dérivées successives de φ et ψ

   - ⋆ <u>Les dérivées successives de φ</u>

     Comme $\varphi(x) = x^{n-1}$, d'après le cours de L_0, nous pouvons écrire que $\varphi^{(k)}(x) = \mathrm{A}_{n-1}^k x^{n-1-k}$. Nous pouvons donc remarquer que si $k \geqslant n$, alors $\varphi^{(k)}(x) = 0$ et que si $k = n-1$, alors $\varphi^{(n-1)}(x) = (n-1)!$
   - ⋆ <u>Les dérivées successives de ψ</u>

     Comme $\psi^{(0)}(x) = \ln x$, que $\psi'(x) = \dfrac{1}{x} = x^{-1}$, $\psi^{(k+1)}(x)$ est la dérivée k-ième de $\dfrac{1}{x}$, et, d'après le cours de L_0, la dérivée k-ième de $\dfrac{1}{x} = x^{-1}$ est donnée par $(-1)^k \times k! \times \dfrac{1}{x^{k+1}}$.

     Donc, $\psi^{(k+1)}(x) = (-1)^k \times k! \times \dfrac{1}{x^{k+1}}$ et donc $\psi^{(k)}(x) = (-1)^{k-1} \times (k-1)! \times \dfrac{1}{x^k}$

D'où :

$$\begin{aligned}
f_5^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k \psi^{(k)}(x)\,\varphi^{(n-k)}(x) \\
&= \mathrm{C}_n^0 \psi^{(0)}(x)\,\varphi^{(n)}(x) + \sum_{k=1}^{n} \mathrm{C}_n^k \psi^{(k)}(x)\,\varphi^{(n-k)}(x) \\
&= 0 + \sum_{k=1}^{n} \mathrm{C}_n^k (-1)^{k-1} \times (k-1)! \times \frac{1}{x^k} \times \mathrm{A}_{n-1}^{n-k} x^{n-1-n+k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathrm{C}_n^k (-1)^{k-1} \times (k-1)! \times \frac{1}{x^k} \times \frac{(n-1)!}{(k-1)!} \times x^{k-1} \\
&= \frac{(n-1)!}{x} \times -\left(\sum_{k=1}^{n} \mathrm{C}_n^k (-1)^k\right) \\
&= -\frac{(n-1)!}{x} \times \left(\left(\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k (-1)^k\right) - 1\right) \\
&= -\frac{(n-1)!}{x} \times (0-1) \\
&= \frac{(n-1)!}{x}
\end{aligned}$$

Donc la dérivée n-ième de $f_5(x)$ est $f_5^{(n)}(x) = \dfrac{(n-1)!}{x}$

6. $f_6(x) = x^2(1+x)^n$

   Il faut donc calculer la dérivée n-ième de $f_6(x) = x^2(1+x)^n$. En posant $u(x) = x^2$ et $v(x) = (1+x)^n$, par la formule de Leibniz, nous avons :

$$f_6^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k u^{(k)}(x)\,v^{(n-k)}(x)$$

- Il est facile de voir que $u(x) = 2x$, $u''(x) = 2$ et que si $n \geqslant 3$, alors $u^{(n)}(x) = 0$
- D'après le cours de L_0, nous avons : $v^{(n-k)}(x) = \mathrm{A}_n^{n-k}(1+x)^{n-(n-k)} = \dfrac{n!}{k!}(1+x)^k$

D'où :

$$\begin{aligned}
f_6^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{2} \mathrm{C}_n^k u^{(k)}(x)\,v^{(n-k)}(x) \\
&= \mathrm{C}_n^0 \times x^2 \times n! + \mathrm{C}_n^1 \times 2x \times n! \times (1+x) + \mathrm{C}_n^2 \times 2 \times \frac{n!}{2} \times (1+x)^2 \\
&= n!x^2 + 2nx \times n!(1+x) + \frac{n(n-1)}{2} \times n!(1+x)^2 \\
&= n!\left(x^2 + 2nx(1+x) + \frac{n(n-1)}{2}(1+x)^2\right)
\end{aligned}$$

Tous calculs faits, on trouve $f_6^{(n)}(x) = \dfrac{n!}{2}\left((n+1)(n+2)x^2 + 2n(n+1)x + n(n-1)\right)$

Exercice 12 :

1. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$.*
   Soit $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction n fois dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $g_n : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ une autre fonction définie, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ par $g_n(x) = x^{n-1} f\left(\dfrac{1}{x}\right)$

   Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $g_n^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n}{x^{n+1}} f^{(n)}\left(\dfrac{1}{x}\right)$

   Nous faisons cette démonstration par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$

- **Vérifions que c'est vrai pour** $n=1$

  $g_1(x)=f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ et la dérivée première de g_1 est donnée par $g_1'(x)=\dfrac{-1}{x^2}f'\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{(-1)^1}{x^{1+1}}f^{(1)}\left(\dfrac{1}{x}\right)$

  C'est donc vrai pour $n=1$
- **Supposons qu'à l'ordre** n**, nous ayions** $g_n^{(n)}(x)=\dfrac{(-1)^n}{x^{n+1}}f^{(n)}\left(\dfrac{1}{x}\right)$
- **Démontrons la propriété à l'ordre** $n+1$

  Tout d'abord, $g_{n+1}(x)=x^nf\left(\dfrac{1}{x}\right)=xg_n(x)$ et en utilisant la formule de Leibniz, nous avons :

$$g_{n+1}^{(n+1)}(x)=\mathrm{C}_{n+1}^0xg_n^{(n+1)}(x)+\mathrm{C}_{n+1}^1g_n^{(n)}(x)$$

  Or, $g_n^{(n+1)}(x)=\left(g_n^{(n)}\right)'(x)=\dfrac{(-1)^{n+1}(n+1)}{x^{n+2}}f^{(n)}\left(\dfrac{1}{x}\right)+\dfrac{(-1)^n}{x^{n+1}}\times\dfrac{-1}{x^2}\times f^{(n+1)}\left(\dfrac{1}{x}\right)$

  Donc :

$$\begin{aligned}g_{n+1}^{(n+1)}(x)&=\frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{x^{n+1}}f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{(-1)^{n+1}}{x^{n+2}}f^{(n+1)}\left(\frac{1}{x}\right)+(n+1)\frac{(-1)^n}{x^{n+1}}f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right)\\&=\frac{(-1)^{n+1}}{x^{n+2}}f^{(n+1)}\left(\frac{1}{x}\right)\end{aligned}$$

  Ce que nous voulions

Donc, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, nous avons $g_n^{(n)}(x)=\dfrac{(-1)^n}{x^{n+1}}f^{(n)}\left(\dfrac{1}{x}\right)$

2. *Soit $\alpha\in\mathbb{R}$ et $f_\alpha:]0;+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par $f_\alpha(x)=x^\alpha\ln x$.*

   Montrer qu'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et une suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $f_\alpha^{(n)}(x)=x^{\alpha-n}(a_n\ln x+b_n)$

   Classiquement, nous allons utiliser la formule de Leibniz en posant $u(x)=x^\alpha$ et $v(x)=\ln x$. Ainsi :

$$f_\alpha^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^n\mathrm{C}_n^ku^{(k)}(x)v^{(n-k)}(x)$$

   Il faut donc calculer les dérivées successives de u et de v
   - **Calculons les dérivées successives de** $u(x)=x^\alpha$
     - ⋆ La dérivée première est donnée par $u'(x)=\alpha x^{\alpha-1}$, la dérivée seconde par $u''(x)=\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$
     - ⋆ On subodore que, pour $k\geqslant1$, la dérivée k-ième de u est donnée par $u^{(k)}(x)=\displaystyle\prod_{j=0}^{k-1}(\alpha-j)\,x^{\alpha-k}$
     - ⋆ La démonstration se fait, facilement, par récurrence
   - **Calculons les dérivées successives de** $v(x)=\ln x$
     - ⋆ La dérivée première est donnée par $v'(x)=\dfrac{1}{x}$
     - ⋆ La dérivée k-ième de v est la dérivée $k-1$-ième de $\dfrac{1}{x}$.

       D'après le cours de L_0, nous avons $v^{(k)}(x)=(-1)^{k-1}(k-1)!\times\dfrac{1}{x^k}$

   D'où

$$\begin{aligned}f_\alpha^{(n)}(x)&=\sum_{k=0}^n\mathrm{C}_n^ku^{(k)}(x)v^{(n-k)}(x)\\&=\sum_{k=0}^n\mathrm{C}_n^ku^{(k)}(x)v^{(n-k)}(x)\\&=x^\alpha(-1)^{n-1}(n-1)!\times\frac{1}{x^n}+\sum_{k=1}^{n-1}\mathrm{C}_n^k\left(\prod_{j=0}^{k-1}(\alpha-j)\right)x^{\alpha-k}\times(-1)^{n-k-1}(n-k-1)!\times\frac{1}{x^{n-k}}\\&\qquad+\left(\prod_{j=0}^{n-1}(\alpha-j)\right)x^{\alpha-n}\ln x\\&=x^{\alpha-n}\left(\left(\prod_{j=0}^{n-1}(\alpha-j)\right)\ln x+(-1)^{n-1}(n-1)!+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{n-k-1}n!}{k!\,(n-k)}\left(\prod_{j=0}^{k-1}(\alpha-j)\right)\right)\end{aligned}$$

Ainsi, $a_n = \left(\prod_{j=0}^{n-1}(\alpha - j)\right)$ et $b_n = (-1)^{n-1}(n-1)! + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{n-k-1} n!}{k!\,(n-k)} \left(\prod_{j=0}^{k-1}(\alpha - j)\right)$

OUF ! !

Exercice 13 :

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $I \subset \mathbb{R}$. On considère une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et s'annulant en $n+1$ points de I tous distincts

1. *Démontrer que la dérivée n-ième de f s'annule au moins une fois sur I*

   Il suffit d'utiliser plusieurs fois le théorème de Rolle.
   Soient $x_0, x_1, \ldots, x_n$ les $n+1$ points de I tels que $f(x_0) = f(x_1) = \cdots = f(x_k) = \cdots = f(x_n) = 0$.
   f étant de classe $\mathcal{C}^n$ sur I est en particulier dérivable sur I. Ainsi, d'après le théorème de Rolle, pour $k = 0, \ldots, n-1$, il existe un point $x_k^1 \in]x_k; x_{k+1}[$ tel que $f'(x_k^1) = 0$
   Ainsi f' s'annule-t-elle en n points $x_k^1 \in I$ où $k = 0, \ldots, n-1$
   En poursuivant, la dérivée p-ième de f notée $f^{(p)}$ s'annule en $n-p+1$ points $x_k^p \in I$ où $k = 0, \ldots, n-p$
   Et donc, pour $p = n$, la dérivée n-ième de f notée $f^{(n)}$ s'annule en 1 point $x_0^n \in I$

2. *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Démontrer que la dérivée $n-1$-ième de $\varphi = f' + \alpha f$ s'annule au moins une fois sur I*

   Nous allons utiliser une fonction auxiliaire ψ définie, pour tout $x \in I$ par $\psi(x) = f(x)\,e^{\alpha x}$.
   Comme f est de classe $\mathcal{C}^n$ et $e^{\alpha x}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$, ψ est de classe $\mathcal{C}^n$
   f s'annulant en $n+1$ points et comme, pour tout $x \in I$, $e^{\alpha x} > 0$, ψ s'annule aussi en $n+1$ points *(les mêmes que f)*
   Donc, la dérivée de ψ, notée ψ', d'après la question précédente, s'annule en n points.
   Or, $\psi'(x) = f'(x)\,e^{\alpha x} + \alpha e^{\alpha x} f(x) = (f'(x) + \alpha f(x))\,e^{\alpha x} = \psi(x)\,e^{\alpha x}$. Comme $e^{\alpha x} > 0$, φ s'annule aussi en n points.
   φ est de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ qui s'annule en n points. D'après la question 1, la dérivée $n-1$-ième de $\varphi = f' + \alpha f$ s'annule donc au moins une fois sur I.

Exercice 14 :

<u>Première généralisation du théorème de Rolle</u>
Soit $a \geqslant 0$ et $f : [a; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, continue sur $[a; +\infty[$, dérivable sur $]a; +\infty[$ et telle que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = f(a)$.
Montrer qu'il existe $c \in]a; +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$

L'idée de la résolution est de retomber sur le théorème de Rolle tel qu'il a été énoncé dans le cours. Pour cela, nous allons utiliser une fonction auxiliaire

1. <u>Où nous construisons une fonction auxiliaire h</u>
   Soit h la fonction qui va de $[0; 1[$ dans $[a; +\infty[$ et qui est définie par :

$$\begin{cases} [0;1[& \longrightarrow & [a; +\infty[\\ x & \longmapsto & h(x) = \dfrac{x+a}{-x+1} \end{cases}$$

   Nous avons $h(0) = a$ et $\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} h(x) = +\infty$

   D'autre part, h est continue sur $[0; 1[$ dérivable sur $[0; 1[$ et de dérivée $h'(x) = \dfrac{1+a}{(-x+1)^2}$.

   h est donc continue et croissante sur $[0; 1[$ et y est donc bijective de $[0; 1[$ sur $[a; +\infty[$

2. <u>Soit $g = f \circ h$</u>
   D'après l'étude précédente, g est bien définie sur $[0; 1[$ et nous avons $g(0) = f \circ h(0) = f(a)$.
   D'autre part, $\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} g(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = f(a)$

En posant $g(1) = f(a)$, nous prolongeons g par continuité et donc la fonction :

$$\begin{cases} g : [0;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & g(x) = \begin{cases} f \circ h(x) \text{ si } 0 \leqslant x < 1 \\ f(a) \text{ si } x = 1 \end{cases} \end{cases}$$

est une fonction continue sur $[0;1]$, dérivable sur $]0;1[$, telle que $g(0) = g(1)$. D'après le théorème de Rolle, il existe donc $d \in]0;1[$ tel que $g'(d) = 0$

3. Pour $x \in]0;1[$, nous avons $g'(x) = f' \circ h(x) \times h'(x)$. Or, pour tout $x \in]0;1[$, nous avons $h'(x) > 0$ et donc
$$g'(d) = 0 \Longleftrightarrow f' \circ h(d) = 0$$
En posant $c = h(d)$, nous avons $c \in]a;+\infty[$ et répondu à la question

Exercice 15 :

Seconde généralisation du théorème de Rolle
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$ et telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$
Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$

- Soit $A > 0$.
Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, il existe $B > 0$ tel que si $|x| > B$, alors $f(x) \geqslant A$
- Restreignons f à l'intervalle fermé borné $[-B;+B]$.
La restriction de f à $[-B;+B]$ y est continue et est bonc bornée et atteint ses bornes. Il existe donc $c \in [-B;+B]$ tel que $f(c) = \inf\limits_{x\in[-B;+B]} f(x)$.
$f(c)$ est donc un extremum de f sur $[-B;+B]$ et f y étant dérivable, alors $f'(c) = 0$
Ce que nous voulions

Exercice 16 :

Troisième généralisation du théorème de Rolle
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$ et telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = k$ *où k est fini*
Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$

Nous appellons tan la fonction tangente définie sur $\left]-\frac{\pi}{2};+\frac{\pi}{2}\right[$

1. Soit $g = f \circ \tan$

g est bien définie continue et dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2};+\frac{\pi}{2}\right[$.

Nous avons $\lim\limits_{\substack{x\to-\frac{\pi}{2} \\ x>-\frac{\pi}{2}}} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = k$

De même, $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{2} \\ x<\frac{\pi}{2}}} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = k$

En posant $g\left(-\frac{\pi}{2}\right) = g\left(\frac{\pi}{2}\right) = k$, nous prolongeons g par continuité et donc la fonction :

$$\begin{cases} g : \left]-\frac{\pi}{2};+\frac{\pi}{2}\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & g(x) = \begin{cases} f \circ \tan(x) \text{ si } x \in \left]-\frac{\pi}{2};+\frac{\pi}{2}\right[\\ k \text{ si } x = -\frac{\pi}{2} \text{ ou } x = \frac{\pi}{2} \end{cases} \end{cases}$$

est une fonction continue sur $\left[-\frac{\pi}{2};+\frac{\pi}{2}\right]$, dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2};+\frac{\pi}{2}\right[$, telle que $g\left(-\frac{\pi}{2}\right) = g\left(\frac{\pi}{2}\right) = k$.
D'après le théorème de Rolle, il existe donc $d \in \left]-\frac{\pi}{2};+\frac{\pi}{2}\right[$ tel que $g'(d) = 0$

2. Pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2};+\frac{\pi}{2}\right[$, nous avons $g'(x) = f' \circ \tan(x) \times \left(1+\tan^2 x\right)$. Or, pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2};+\frac{\pi}{2}\right[$, nous avons $\left(1+\tan^2 x\right) > 0$ et donc
$$g'(d) = 0 \Longleftrightarrow f' \circ \tan(d) = 0$$
En posant $c = \tan(d)$, nous avons $c \in \mathbb{R}$ et répondu à la question

Exercice 17 :

1. *Soient f et g 2 fonctions continues sur l'intervalle $[a;b]$ et dérivables sur l'intervalle $]a;b[$. Soit $x_0 \in [a;b]$; on suppose que g' ne s'annule pas sur $]a;b[$ et que $f(x_0) = g(x_0) = 0$*
Montrer que $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \Longrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$
Nous allons utiliser le théorème des accroissements finis généralisé aux fonctions f et g
Soit $x \in]a;b[$ avec $x \neq x_0$. Pour simplifier, nous supposons $a < x < x_0$; le problème est semblable si $x_0 < x < b$
Il existe donc $c_x \in]x;x_0[$ tel que $(f(x) - f(x_0))\, g'(c_x) = (g(x) - g(x_0))\, f'(c_x)$. Or :
$$(f(x) - f(x_0))\, g'(c_x) = (g(x) - g(x_0))\, f'(c_x) \Longleftrightarrow f(x)\, g'(c_x) = g(x)\, f'(c_x) \Longleftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$$
Par encadrement, nous avons $\lim\limits_{x \to x_0} c_x = x_0$ et donc, par composition :
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = l$$
Remarque :
La règle de L'Hospital est un outil à ne pas négliger pour lever des indéterminations
2. *Applications*
Donner :
(a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$
Il y a bien, ici, une indétermination.
   - ⋆ Posons $f(x) = \ln(1+x) - x$, alors $f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{1-1-x}{1+x} = \frac{-x}{1+x}$
   - ⋆ Posons maintenant $g(x) = x^2$, alors $g'(x) = 2x$
   - ⋆ Donc $\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{-x}{2x(1+x)} = \frac{-1}{2(1+x)}$ et $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{-1}{2(1+x)} = -\frac{1}{2}$

D'après la règle de L'Hospital, nous avons $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = -\frac{1}{2}$
(b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$
Nous sommes toujours, ici, devant une indétermination.
   - ⋆ Posons $f(x) = x - \sin x$, alors $f'(x) = 1 - \cos x$
   - ⋆ Posons maintenant $g(x) = x^3$, alors $g'(x) = 3x^2$
   - ⋆ Donc $\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{1 - \cos x}{3x^2}$ et nous sommes toujours devant une indétermination.
   - ⋆ Continuons : $f''(x) = \sin x$ et $g''(x) = 6x$; $\frac{f''(x)}{g''(x)} = \frac{\sin x}{6x}$.
   - ⋆ Comme $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, nous avons $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}$

D'après la règle de L'Hospital, nous avons $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{6}$

Exercice 18 :

Démontrer les inégalités suivantes :

1. *Si* $0 < x < 1$, *alors* $\arcsin x < \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

   On considère la fonction $\arcsin t$ laquelle est définie sur $[-1;+1]$, dérivable sur $]-1;+1[$ et de dérivée $\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$.
   Soit $0 < x < 1$
   Appliquons le théorème des accroissements finis à $\arcsin t$ sur l'intervalle $[0;x]$.
   Il existe donc $c \in]0;x[$ tel que $\dfrac{\arcsin x - \arcsin 0}{x-0} = \dfrac{1}{\sqrt{1-c^2}} \Longleftrightarrow dfrac{\arcsin x}{x} = \dfrac{1}{\sqrt{1-c^2}}$

   Comme $0 < c < x$, nous avons $\sqrt{1-c^2} > \sqrt{1-x^2} > 0 \Longleftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{1-c^2}} < \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

   Donc, si $0 < x < 1$, alors $dfrac{\arcsin x}{x} < \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Longleftrightarrow \arcsin x < \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

   Ce que nous voulions

   Remarque
   On démontrerait de même que si $-1 < x < 0$ alors $\arcsin x > \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

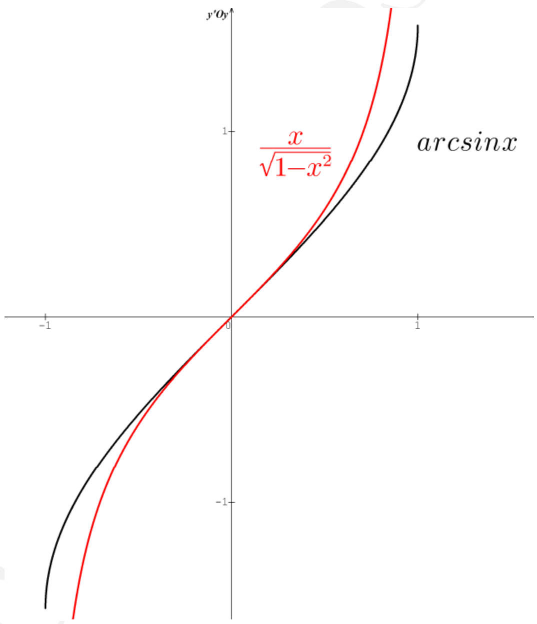

FIGURE 4.9 – Encadrement de la fonction $f(x) = \arcsin x$ par la fonction $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

2. *Si* $x > 0$, *alors* $\arctan x > \dfrac{x}{1+x^2}$

   Considérons la fonction $\arctan t$ laquelle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $\dfrac{1}{1+t^2}$.
   Soit $x > 0$
   Appliquons le théorème des accroissements finis à $\arctan t$ sur l'intervalle $[0;x]$.
   Il existe donc $c \in]0;x[$ tel que $\dfrac{\arctan x - \arctan 0}{x-0} = \dfrac{1}{1+c^2} \Longleftrightarrow dfrac{\arctan x}{x} = \dfrac{1}{1+c^2}$
   Comme $0 < c < x$, nous avons $\dfrac{1}{1+c^2} > \dfrac{1}{1+x^2} > 0$.

Donc, si $x > 0$, alors $dfrac\arctan x x > \dfrac{1}{1+x^2} \Longleftrightarrow \arctan x > \dfrac{x}{1+x^2}$

Ce que nous voulions

Remarque

On démontrerait de même que si $x < 0$ alors $\arctan x < \dfrac{x}{1+x^2}$

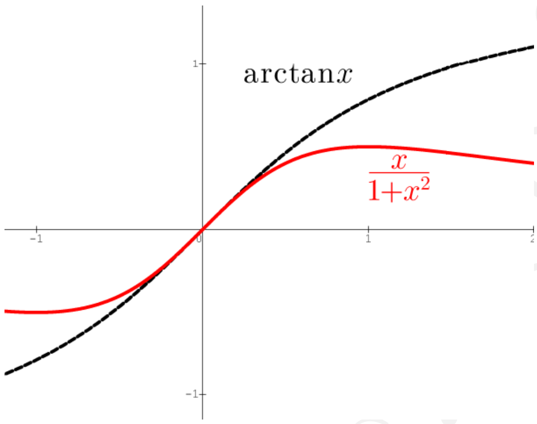

FIGURE 4.10 – Encadrement de la fonction $f(x) = \arctan x$ par la fonction $\dfrac{x}{1+x^2}$

Exercice 19 :

Théorème de Darboux

Soit $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction dérivable sur l'intervalle $[a;b]$. On suppose $f'(a) < f'(b)$.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f'(a) < \lambda < f'(b)$. Démontrer qu'il existe $c \in]a;b[$ tel que $f'(c) = \lambda$

f étant dérivable sur l'intervalle $[a;b]$ y est continue.
Soit donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f'(a) < \lambda < f'(b)$

- ⋆ Construisons la fonction auxiliaire $g(t) = f(t) - \lambda t$. Par construction, g est continue sur l'intervalle $[a;b]$; elle y est donc bornée et atteint ses bornes.
  Soit $c \in [a;b]$ tel que $g(c) = \inf\limits_{t \in [a;b]} g(t)$
- ⋆ Comme $g(c)$ est un extremum, nous avons $g'(c) = 0$. Or, $g'(t) = f'(t) - \lambda$ et donc :

$$g'(c) = 0 \Longleftrightarrow f'(c) = \lambda$$

- ⋆ Nous avons $c \neq a$, c'est à dire $c > a$
  Considérons la fonction $\varphi(t) = \dfrac{g(t) - g(a)}{t - a}$. φ est définie et continue sur $]a;b]$ [4]. Il est possible de prolonger φ par continuité en a en posant $\varphi(a) = \lim\limits_{\substack{t \to a \\ t > a}} \varphi(t)$. Or :

$$\varphi(a) = \lim_{\substack{t \to a \\ t > a}} \varphi(t) = \lim_{\substack{t \to a \\ t > a}} \frac{g(t) - g(a)}{t - a} = g'(a) = f'(a) - \lambda$$

  Comme $f'(a) < \lambda$, $\varphi(a) = f'(a) - \lambda < 0$.
  φ étant continue sur l'intervalle $[a;b]$ et comme $\varphi(a) = f'(a) - \lambda < 0$, il existe $\eta > 0$ tel que si $a < t < a + \eta$ alors $\varphi(t) < 0$. Comme $t - a > 0$ et $\varphi(t) < 0$, nous avons $g(t) - g(a) < 0$, c'est à dire $g(t) < g(a)$ et donc $g(c) < g(a)$ et donc $c \neq a$
- ⋆ Nous avons $c \neq b$ et donc $c < b$

4. Elle y est même dérivable

Considérons, cette fois ci la fonction $\psi(t) = \dfrac{g(t) - g(b)}{t - b}$. ψ est définie et continue sur $[a; b[$. Il est possible de prolonger ψ par continuité en b en posant $\psi(b) = \lim\limits_{\substack{t \to b \\ t > b}} \psi(t)$. Or :

$$\psi(b) = \lim_{\substack{t \to b \\ t < b}} \psi(t) = \lim_{\substack{t \to b \\ t < b}} \frac{g(t) - g(b)}{t - b} = g'(b) = f'(b) - \lambda$$

Comme $f'(b) > \lambda$, $\psi(b) = f'(b) - \lambda > 0$.
ψ étant continue sur l'intervalle $[a; b]$ et comme $\psi(b) = f'(b) - \lambda > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que si $b - \eta < t < b$ alors $\psi(t) > 0$. Comme $t - b < 0$ et $\varphi(t) > 0$, nous avons $g(t) - g(b) < 0$, c'est à dire $g(t) < g(b)$ et donc $g(c) < g(b)$ et donc $c \neq b$

Il existe donc bien $c \in]a; b[$ tel que $f'(c) = \lambda$

Compléments

1. La résolution eût été semblable si nous avions supposé $f'(a) > f'(b)$
2. Nous pouvons énoncer un résultat complémentaire qui est la conséquence du théorème de Darboux :
   Soit $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction dérivable sur l'intervalle $[a; b]$ telle que $f'(a) \times f'(b) < 0$. Il existe alors $c \in]a; b[$ tel que $f'(c) = 0$
3. Le théorème de Darboux démontre qu'une fonction dérivée vérifie la propriété de la valeur intermédiaire et qu'ainsi, toutes les fonctions ne peuvent pas être des dérivées.

Exercice 20 :

Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et dérivable sur $\mathbb{R}^+$. On suppose que la fonction dérivée f' est strictement décroissante et positive sur $\mathbb{R}^+$

1. *Démontrer que pour tout $x \geqslant 1$, nous avons :*

$$f(x+1) - f(x) < f'(x) < f(x) - f(x-1)$$

Soit $x \geqslant 1$.

⋆ Appliquons le théorème des accroissements finis à f entre x et $x+1$
Il existe donc $c \in]x; x+1[$ tel que $\dfrac{f(x+1) - f(x)}{(x+1) - x} = f'(c) \Longleftrightarrow f(x+1) - f(x) = f'(c)$
Comme $x < c < x+1$, que f' est strictement décroissante, nous avons $f'(c) < f'(x)$. D'où nous obtenons la première inégalité : $f(x+1) - f(x) < f'(x)$

⋆ Appliquons maintenant le théorème des accroissements finis à f entre $x-1$ et x
Il existe donc $c \in]x-1; x[$ tel que $\dfrac{f(x) - f(x-1)}{x - (x-1)} = f'(c) \Longleftrightarrow f(x) - f(x-1) = f'(c)$
Comme $x - 1 < c < x$, que f' est strictement décroissante, nous avons $f'(c) > f'(x)$. D'où nous obtenons la seconde inégalité : $f'(x) < f(x) - f(x)$

En synthèse, nous avons donc, pour $x \geqslant 1$, $f(x+1) - f(x) < f'(x) < f(x) - f(x-1)$

2. *En déduire que si f admet une limite finie A en $+\infty$, c'est à dire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$ où A est finie, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 0$*

Nous avons $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x+1) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x-1) = A$. Donc, $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x+1) - f(x)) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - f(x-1)) = 0$.

Donc, par encadrement, nous déduisons $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 0$

3. *On définit la suite $(S_p)_{p \geqslant 1}$ par : $S_p = f'(1) + f'(2) + \cdots + f'(p) = \sum\limits_{k=1}^{p} f'(k)$ Démontrer que la suite $(S_p)_{p \geqslant 1}$ est convergente si et seulement si f admet une limite finie A lorsque A tend vers $+\infty$*

- ⋆ D'après la question 1, nous avons, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ $f(k+1) - f(k) < f'(k) < f(k) - f(k-1)$ et donc pour $k = 1, \dots, p$

$$\begin{array}{rcl} f(2) - f(1) < & f'(1) & < f(1) - f(0) \\ f(3) - f(2) < & f'(2) & < f(2) - f(1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f(k+1) - f(k) < & f'(k) & < f(k) - f(k-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f(p) - f(p-1) < & f'(p-1) & < f(p-1) - f(p-2) \\ f(p+1) - f(p) < & f'(p) & < f(p) - f(p-1) \end{array}$$

  En additionnant, nous avons alors :

$$f(p+1) - f(1) < \sum_{k=1}^{p} f'(k) < f(p) - f(0) \Longleftrightarrow f(p+1) - f(1) < S_p < f(p) - f(0)$$

- ⋆ Il faut remarquer que, puisque, pour tout $x \geqslant 0$, nous avons $f'(x) \geqslant 0$ la suite $(S_p)_{p \geqslant 1}$ est une suite croissante. D'autre part, comme $f'(x) \geqslant 0$, f est une fonction croissante
- ⋆ Supposons que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = A$ où A est fini
  Alors, $\lim_{p \to +\infty} f(p) = A$ et donc $\lim_{p \to +\infty} (f(p) - f(0)) = A - f(0)$, et de la croissance de f, nous tirons que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $(f(p) - f(0)) \leqslant A - f(0)$ et donc, $S_p \leqslant A - f(0)$
  La suite $(S_p)_{p \geqslant 1}$ est donc une suite croissante et majorée, donc convergente.
- ⋆ Supposons que f n'admette pas de limite finie en $+\infty$
  De la positivité et de la croissante de f, nous déduisons que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, et donc, $\lim_{p \to +\infty} (f(p+1) - f(1)) = +\infty$.
  Comme $f(p+1) - f(1) < S_p$, nous déduisons que $\lim_{p \to +\infty} S_p = +\infty$; ainsi, la suite $(S_p)_{p \geqslant 1}$ est divergente

Ainsi, la suite $(S_p)_{p \geqslant 1}$ est convergente si et seulement si f admet une limite fonie A lorsque A tend vers $+\infty$

4. *Applications : Quelle est la nature des suites $(a_p)_{p \geqslant 1}$ et $(b_p)_{p \geqslant 1}$ suivantes :*

(a) $a_p = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{1+k^2}$

En posant $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, nous avons $a_p = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{1+k^2} = \sum_{k=1}^{p} f'(k)$.

f' est bien positive et décroissante sur $\mathbb{R}^+$ et, d'autre part, $f(x) = \arctan x$ et $\lim_{x \to +\infty} \arctan x = +\frac{\pi}{2}$, c'est à dire que la limite de f est finie.

Donc, la suite $(a_p)_{p \geqslant 1}$ est convergente

(b) $b_p = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{\sqrt{1+k}}$

En posant $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$, nous avons $b_p = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{\sqrt{1+k}} = \sum_{k=1}^{p} f'(k)$.

f' est bien positive et décroissante sur $\mathbb{R}^+$ et, d'autre part, $f(x) = 2\sqrt{1+x}$ et $\lim_{x \to +\infty} 2\sqrt{1+x} = +\infty$, c'est à dire que la limite de f est infinie.

Donc, la suite $(b_p)_{p \geqslant 1}$ est divergente et diverge vers $+\infty$

(c) $b_p = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k}$

En posant $f'(x) = \dfrac{1}{x}$, nous avons $c_p = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{p} f'(k)$.

f' est bien positive et décroissante sur $\mathbb{R}^{*+}$ et, d'autre part, $f(x) = \ln x$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$, c'est à dire que la limite de f est infinie.

Donc, la suite $(c_p)_{p\geqslant 1}$ est divergente et diverge vers $+\infty$

5. *Nous définissons les suites $(\sigma_p)_{p\geqslant 1}$ et $(\sigma'_p)_{p\geqslant 1}$ par :*

$$\sigma_p = S_p - f(p+1) \quad \text{et} \quad \sigma'_p = S_p - f(p)$$

(a) *Démontrer que les suites $(\sigma_p)_{p\geqslant 1}$ et $(\sigma'_p)_{p\geqslant 1}$ sont monotones*

⋆ Nous allons démontrer que la suite $(\sigma_p)_{p\geqslant 1}$ est croissante

Il suffit de calculer $\sigma_{p+1} - \sigma_p$:

$$\begin{aligned}\sigma_{p+1} - \sigma_p =& \ (S_{p+1} - f(p+2)) - (S_p - f(p+1)) \\ =& \ (S_{p+1} - S_p) - (f(p+2) - f(p+1)) \\ =& \ f'(p+1) - (f(p+2) - f(p+1))\end{aligned}$$

Pour tout $x \geqslant 1$, nous avons $f(x+1) - f(x) < f'(x) \iff f'(x) - (f(x+1) - f(x)) > 0$

Donc, pour tout p entier tel que $p \geqslant 1$, nous avons $f'(p+1) - (f(p+2) - f(p+1)) > 0$, c'est à dire $\sigma_{p+1} - \sigma_p > 0$

La suite $(\sigma_p)_{p\geqslant 1}$ est donc strictement croissante

⋆ Nous allons démontrer que la suite $(\sigma'_p)_{p\geqslant 1}$ est décroissante

Nous allons calculer $\sigma'_{p+1} - \sigma'_p$:

$$\begin{aligned}\sigma'_{p+1} - \sigma'_p =& \ (S_{p+1} - f(p+1)) - (S_p - f(p)) \\ =& \ (S_{p+1} - S_p) - (f(p+1) - f(p)) \\ =& \ f'(p+1) - (f(p+1) - f(p))\end{aligned}$$

Pour tout $x \geqslant 1$, nous avons $f'(x) < f(x) - f(x-1) \iff f'(x) - (f(x) + f(x-1)) < 0$

Donc, pour tout p entier tel que $p \geqslant 1$, nous avons $f'(p+1) - (f(p+1) - f(p)) < 0$, c'est à dire $\sigma'_{p+1} - \sigma'_p > 0$

La suite $(\sigma'_p)_{p\geqslant 1}$ est donc strictement décroissante

(b) *Démontrer que, pour tout $p \geqslant 1$, $\sigma_p < \sigma'_p$*

Il faut donc faire la différence $\sigma_p - \sigma'_p$; or

$$\sigma_p - \sigma'_p = (S_p - f(p+1)) - (S_p - f(p)) = f(p) - f(p+1)$$

Or, si f' est positive, f est croissante et donc $f(p) - f(p+1) < 0$, c'est à dire $\sigma_p < \sigma'_p$

(c) *Trouver une condition nécessaire et suffisante sur la fonction f' pour que les suites $(\sigma_p)_{p\geqslant 1}$ et $(\sigma'_p)_{p\geqslant 1}$ soient adjacentes*

Il faut donc trouver une condition nécessaire et suffisante sur f' pour que $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} (\sigma'_p - \sigma_p) = 0$.

Or, $\sigma'_p - \sigma_p = f(p+1) - f(p)$, et d'après l'inégalité prouvée dans la première question, et de la croissance de f, nous avons :

$$0 < f(p+1) - f(p) < f'(p)$$

⋆ Ainsi, si $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$, alors $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} f'(p) = 0$ et $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} (f(p+1) - f(p)) = 0$, c'est à dire $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} (\sigma'_p - \sigma_p) = 0$ et les suites $(\sigma_p)_{p\geqslant 1}$ et $(\sigma'_p)_{p\geqslant 1}$ sont adjacentes

- ⋆ Réciproquement, supposons $\lim\limits_{p\to+\infty}\left(\sigma'_p-\sigma_p\right)=0$.
  De l'inégalité $0<f'(p)<f(p)-f(p-1)$, c'est à dire $0<f'(p)<\sigma'_{p-1}-\sigma_{p-1}$, nous déduisons que $\lim\limits_{\substack{p\to+\infty\\p\in\mathbb{N}}} f'(p)=0$.
  Il faut montrer que $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\x\in\mathbb{R}}} f'(x)=0$.
  Soit $\varepsilon>0$
  Comme la suite $(f'(p))_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet pour limite 0, il existe $N_\varepsilon\in\mathbb{N}^*$ tel que pour tout $p\in\mathbb{N}^*$, nous ayions l'implication $(p>N_\varepsilon)\Longrightarrow(0<f'(p)<\varepsilon)$
  Par hypothèses, la fonction f' est décroissante et donc pour tout $x\in\mathbb{R}$ tels que si $x>N_\varepsilon+1$, alors, $0<f'(x)<f'(N_\varepsilon+1)<\varepsilon$, et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$

La condition nécessaire et siffisante pour que les suites $(\sigma_p)_{p\geqslant1}$ et $\left(\sigma'_p\right)_{p\geqslant1}$ soient adjacentes est que $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$

Exercice 21 :

Soit $a\in\mathbb{R}$ et $f:[a;+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$, définie, continue et dérivable sur $[a;+\infty[$.

1. *On suppose que $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=+\infty$. Démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$*

   Soit $A>0$
   Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=+\infty$, il existe $K_A>0$ tel que si $x>K_A$, alors $f'(x)>A$
   Soit$x>K_A$ et appliquons le théorème des accroissements finis entre K_A et x. Il existe donc $c\in\,]K_A;x[$ tel que $\dfrac{f(x)-f(K_A)}{x-K_A}=f'(c)$.
   Comme $c>K_A$, nous avons $\dfrac{f(x)-f(K_A)}{x-K_A}>A$, c'est à dire $f(x)>A(x-K_A)+f(K_A)$.
   D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

2. *On suppose, cette fois ci, que $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$. Démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$*

   Soit $\varepsilon>0$.
   Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$, il existe $K_\varepsilon>0$ tel que si $x>K_\varepsilon$, alors $|f'(x)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$
   Soit $x>K_\varepsilon$ et appliquons le théorème des accroissements finis entre K_ε et x ; il existe donc $c\in\,]K_\varepsilon;x[$ tel que $\dfrac{f(x)-f(K_\varepsilon)}{x-K_\varepsilon}=f'(c)$, ce qui est équivalent, pour $x>K_\varepsilon$ à

   $$f(x)=f(K_\varepsilon)+(x-K_\varepsilon)f'(c)$$

   Alors, pour $x>K_\varepsilon$:

   $$\begin{aligned}\left|\frac{f(x)}{x}\right| &= \left|\frac{f(K_\varepsilon)+(x-K_\varepsilon)f'(c)}{x}\right|\\ &\leqslant \left|\frac{f(K_\varepsilon)}{x}\right|+\frac{(x-K_\varepsilon)}{x}|f'(c)|\\ &\leqslant \left|\frac{f(K_\varepsilon)}{x}\right|+|f'(c)| \text{ car } 0<\frac{(x-K_\varepsilon)}{x}<1\end{aligned}$$

   Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\left|\dfrac{f(K_\varepsilon)}{x}\right|=0$, il existe $K_\varepsilon^1>0$ tel que si $x>K_\varepsilon^1$ alors $\left|\dfrac{f(K_\varepsilon)}{x}\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$.
   Ainsi, si $M=\sup\left(K_\varepsilon,K_\varepsilon^1\right)$, alors, si $x>M$, nous avons $x>K_\varepsilon$ et $x>K_\varepsilon^1$ et donc $\left|\dfrac{f(K_\varepsilon)}{x}\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$ et $|f'(c)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$
   D'où, si $x>M$, alors $\left|\dfrac{f(x)}{x}\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$, et donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$

3. *On suppose que* $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = l$ *où* $l > 0$. *Démontrer que* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = l$

Soit $\varepsilon > 0$
Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = l$, il existe $A_\varepsilon > 0$, tel que si $x > A_\varepsilon$, alors $|f'(x) - l| < \dfrac{\varepsilon}{3}$.
Nous appliquons le théorème des accroissements finis entre A_ε et x. Il existe $c \in]A_\varepsilon; x[$ tel que :

$$\frac{f(x) - f(A_\varepsilon)}{x - A_\varepsilon} = f'(c) \iff f(x) = f(A_\varepsilon) + (x - A_\varepsilon) f'(c)$$

Maintenant, pour $x > A_\varepsilon$

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(x)}{x} - l\right| &= \left|\frac{f(x) - lx}{x}\right| \\
&= \left|\frac{f(A_\varepsilon) + (x - A_\varepsilon) f'(c) - lx}{x}\right| \\
&= \left|\frac{f(A_\varepsilon) + f'(c)\,x - f'(c)\,A_\varepsilon - lx}{x}\right| \\
&= \left|\frac{f(A_\varepsilon) + f'(c)\,x - lx - f'(c)\,A_\varepsilon}{x}\right| \\
&= \left|\frac{f(A_\varepsilon)}{x} + f'(c) - l - \frac{f'(c)\,A_\varepsilon}{x}\right| \\
&\leqslant \left|\frac{f(A_\varepsilon)}{x}\right| + |f'(c) - l| + \frac{A_\varepsilon}{x}\,|f'(c)|
\end{aligned}$$

Alors :

- ⋆ Comme $c > A_\varepsilon$, alors $|f'(c) - l| < \dfrac{\varepsilon}{3}$
- ⋆ Si $x > \dfrac{3\,|f(A_\varepsilon)|}{\varepsilon}$ alors $\left|\dfrac{f(A_\varepsilon)}{x}\right| < \dfrac{\varepsilon}{3}$
- ⋆ Et, pour terminer, comme $c > A_\varepsilon$, alors $|f'(c) - l| < \dfrac{\varepsilon}{3} \iff l - \dfrac{\varepsilon}{3} < f'(c) < l + \dfrac{\varepsilon}{3}$, c'est à dire

$$|f'(c)| < \sup\left(\left|l - \frac{\varepsilon}{3}\right|, \left|l + \frac{\varepsilon}{3}\right|\right)$$

Et donc :

$$\frac{A_\varepsilon}{x}\,|f'(c)| < \frac{A_\varepsilon}{x} \sup\left(\left|l - \frac{\varepsilon}{3}\right|, \left|l + \frac{\varepsilon}{3}\right|\right)$$

Ce qui nous montre que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{A_\varepsilon}{x}\,|f'(c)| = 0$

Il existe donc $B > 0$ tel que si $x > B$ alors $0 < \dfrac{A_\varepsilon}{x}\,|f'(c)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$

Soit $M = \sup\left(B, A_\varepsilon, \dfrac{3\,|f(A_\varepsilon)|}{\varepsilon}\right)$. Alors, si $x > M$, nous avons $|f'(c) - l| < \dfrac{\varepsilon}{3}$, $\left|\dfrac{f(A_\varepsilon)}{x}\right| < \dfrac{\varepsilon}{3}$ et $\dfrac{A_\varepsilon}{x}\,|f'(c)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$.
Ce qui termine de montrer que, si $x > M$, alors $\left|\dfrac{f(x)}{x} - l\right| < \varepsilon$ et donc que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = l$

Démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Nous venons de montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = l$, c'est à dire, comme $l > 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{lx} = 1$.

Il existe donc $B > 0$ tel que si $x > B$, alors $\left|\dfrac{f(x)}{lx} - 1\right| < \dfrac{1}{2} \iff \dfrac{1}{2} < \dfrac{f(x)}{lx} < \dfrac{3}{2}$.

Comme $l > 0$, si $x > B$, alors $\dfrac{lx}{2} < f(x)$, et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, par minoration

4.8.3 Formule de Taylor

Exercice 22 :

$\mathbb{R}_n[X]$ est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n

1. Soit $a \in \mathbb{R}$, et on appelle $E_k(X) = (X-a)^k$
   Montrer que la famille $\{E_0, E_1, \ldots, E_n\}$ forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$
2. Nous pouvons donc écrire tout polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ sous la forme
$$P(X) = P_0E_0 + P_1E_1 + P_2E_2 + \cdots + P_nE_n$$
   En calculant les dérivées successives de P, montrer que pour tout $k = 0, \ldots, n$, $P_k = \dfrac{P^{(k))}(a)}{k\,!}$

Exercice 23 :

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $h > 0$. On considère $f : [a-h; a+h] \longrightarrow \mathbb{R}$, continue sur $[a-h; a+h]$ dérivable sur $]a-h; a+h[$

1. *Montrer qu'il existe $c \in]0;1[$ tel que : $\dfrac{f(a+h) - f(a-h)}{h} = f'(a+ch) + f'(a-ch)$*
   On considère la fonction $F : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in [0;1]$ par
$$F(x) = f(a+xh) - f(a-xh)$$
   Par construction, F est continue sur $[0;1]$ et dérivable sur $]0;1[$. La dérivée de F sur $]0;1[$ est donnée par :
$$F'(x) = hf'(a+xh) + hf'(a-xh)$$
   Nous appliquons le <u>théorème des accroissements finis à F</u> entre 0 et 1. Il existe donc $c \in]0;1[$ tel que :
$$\frac{F(1) - F(0)}{1-0} = F'(c) \Longleftrightarrow F(1) - F(0) = F'(c)$$
   Comme $F(0) = 0$, il existe donc $c \in]0;1[$ tel que $F(1) = F'(c)$, c'est à dire tel que :
$$f(a+h) - f(a-h) = hf'(a+ch) + hf'(a-ch) \Longleftrightarrow \frac{f(a+h) - f(a-h)}{h} = f'(a+ch) + f'(a-ch)$$
   Ce que nous voulions
2. *Démontrer cette fois ci qu'il existe $\theta \in]0;1[$ tel que :*
$$\frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h} = f'(a+\theta h) - f'(a-\theta h)$$
   La méthode est la même que celle de la question précédente.
   Nous considèrons la fonction $G : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in [0;1]$ par
$$G(x) = f(a+xh) + f(a-xh)$$
   Par construction, G est continue sur $[0;1]$ et dérivable sur $]0;1[$. La dérivée de G sur $]0;1[$ est donnée par :
$$G'(x) = hf'(a+xh) - hf'(a-xh)$$
   Nous appliquons le <u>théorème des accroissements finis à G</u> entre 0 et 1. Il existe donc $\theta \in]0;1[$ tel que :
$$\frac{G(1) - G(0)}{1-0} = G'(\theta) \Longleftrightarrow G(1) - G(0) = G'(\theta)$$
   Comme $G(0) = 2f(a)$, que $G(1) = f(a+h) + f(a-h)$, il existe donc $\theta \in]0;1[$ tel que
$$f(a+h) + f(a-h) - 2f(a) = G'(c)$$

C'est à dire tel que :

$$f(a+h) - 2f(a) + f(a-h) = hf'(a+\theta h) - hf'(a-\theta h)$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h} = f'(a+\theta h) - f'(a-\theta h)$$

Ce que nous voulions

3. *On suppose, cette fois-ci que $f''(a)$ existe. Nous posons pour $0 < |u| < h$, c'est à dire $-h < u < h$ et $u \neq 0$:*

$$\varphi(u) = \frac{f(a+u) - 2f(a) + f(a-u)}{u^2}$$

Démontrer que $\lim\limits_{u \to 0} \varphi(u) = f''(a)$

On applique 2 fois, la formule de Taylor-Young 4.4.5 ; pour $0 < |u| < h$, nous avons donc :

- $f(a+u) = f(a) + uf'(a) + \dfrac{u^2}{2} f''(a) + u^2 \varepsilon_1(u)$ où $\lim\limits_{u \to 0} \varepsilon_1(u) = 0$
- $f(a-u) = f(a) - uf'(a) + \dfrac{u^2}{2} f''(a) + u^2 \varepsilon_2(u)$ où $\lim\limits_{u \to 0} \varepsilon_2(u) = 0$

En additionnant, nous obtenons :

$$f(a+u) + f(a-u) = 2f(a) + u^2 f''(a) + u^2 (\varepsilon_1(u) + \varepsilon_2(u))$$

En divisant par u^2, nous obtenons :

$$\frac{f(a+u) - 2f(a) + f(a-u)}{u^2} = f''(a) + (\varepsilon_1(u) + \varepsilon_2(u)) \Longleftrightarrow \varphi(u) = f''(a) + (\varepsilon_1(u) + \varepsilon_2(u))$$

Comme $\lim\limits_{u \to 0} (\varepsilon_1(u) + \varepsilon_2(u)) = 0$, nous en déduisons que $\lim\limits_{u \to 0} \varphi(u) = f''(a)$

Ce que nous voulions

Exercice 24 :

Soit $a > 0$ et $f : [-a; +a] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie et continue sur l'intervalle $[-a; +a]$ et deux fois dérivable sur $]-a; +a[$

On suppose que $f(0) = 0$ et que f'' est bornée sur $]-a; +a[$, c'est à dire qu'il existe $M > 0$ tel que, pour tout $x \in]-a; +a[$, $|f''(x)| \leqslant M$

On construit la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie pur tout $n \in \mathbb{N}^*$ par : $U_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{k}{n^2}\right)$

Il faut démontrer que la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et donner sa limite

D'après la formule de Taylor 4.4.1, nous avons, pour $x \in [-a; +a]$:

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2} f''(\theta x) \text{ où } \theta \in]0; 1[$$

C'est à dire $f(x) = xf'(0) + \dfrac{x^2}{2} f''(\theta x)$ où $\theta \in]0; 1[$.

L'étude des limites d'une suite est toujours une étude asymptotique.

Soit donc $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{1}{n} < a \Longleftrightarrow n > \dfrac{1}{a}$. Pour $k \in \mathbb{N}$ tels que $1 \leqslant k \leqslant n$, nous avons toujours $\dfrac{k}{n^2} \leqslant \dfrac{1}{n}$, c'est à dire, en particulier $0 < \dfrac{k}{n^2} < a$

Ainsi, pour $1 \leqslant k \leqslant n$, nous avons :

$$f\left(\frac{k}{n^2}\right) = \frac{k}{n^2} f'(0) + \frac{k^2}{2n^4} f''\left(\theta \frac{k}{n^2}\right)$$

Et donc :

$$\begin{aligned} U_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} f'(0) + \frac{k^2}{2n^4} f''\left(\theta \frac{k}{n^2}\right) \\ &= f'(0) \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{2n^4} f''\left(\theta \frac{k}{n^2}\right) \\ &= \frac{f'(0)}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k + \frac{1}{2n^4} \sum_{k=1}^{n} k^2 f''\left(\theta \frac{k}{n^2}\right) \end{aligned}$$

D'où nous déduisons $U_n - \dfrac{f'(0)}{n^2} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \dfrac{1}{2n^4} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 f''\left(\theta \dfrac{k}{n^2}\right)$

Et en passant à la valeur absolue : $\left| U_n - \dfrac{f'(0)}{n^2} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \right| = \dfrac{1}{2n^4} \left| \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 f''\left(\theta \dfrac{k}{n^2}\right) \right|$

D'après l'hypothèse, nous avons $\left| f''\left(\theta \dfrac{k}{n^2}\right) \right| \leqslant M$ et alors :

$$\frac{1}{2n^4} \left| \sum_{k=1}^{n} k^2 f''\left(\theta \frac{k}{n^2}\right) \right| \leqslant \frac{1}{2n^4} \sum_{k=1}^{n} k^2 \left| f''\left(\theta \frac{k}{n^2}\right) \right| \leqslant \frac{M}{2n^4} \sum_{k=1}^{n} k^2$$

Or :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Nous avons donc :

$$\left| U_n - f'(0) \frac{n(n+1)}{2n^2} \right| \leqslant M \frac{n(n+1)(2n+1)}{12n^4}$$

Nous avons $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} M \frac{n(n+1)(2n+1)}{12n^4} = 0$, et donc en utilisant les résultats sur les limites et les inégalités, nous déduisons que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(U_n - f'(0) \frac{n(n+1)}{2n^2} \right) = 0$, c'est à dire

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} f'(0) \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{f'(0)}{2}$$

En conclusion, nous avons donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) = \frac{f'(0)}{2}$

4.8.4 Convexité

Exercice 25 :

Démontrer que si la fonction f est croissante et convexe et que si la fonction g est convexe, alors la fonction $f \circ g$ est convexe.

On suppose donc f croissante et convexe et g convexe.
Soient $x \in I$, $y \in I$ et $\lambda \in [0;1]$. Alors $g(\lambda x + (1-\lambda) y) \leqslant \lambda g(x) + (1-\lambda) g(y)$
f étant croissante, alors $f(g(\lambda x + (1-\lambda) y)) \leqslant f(\lambda g(x) + (1-\lambda) g(y))$
f étant convexe $f(\lambda g(x) + (1-\lambda) g(y)) \leqslant \lambda f(g(x)) + (1-\lambda) f(g(y))$ et nous avons donc :

$$f(g(\lambda x + (1-\lambda) y)) \leqslant \lambda f(g(x)) + (1-\lambda) f(g(y))$$

C'est à dire

$$f \circ g(\lambda x + (1-\lambda) y) \leqslant \lambda f \circ g(x) + (1-\lambda) f \circ g(y)$$

Ainsi, si la fonction f est croissante et convexe et que si la fonction g est convexe, alors la fonction $f \circ g$ est convexe.

Exercice 26 :

1. *Démontrer qu'une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$, pour tout choix de points $x_1 \in I \dots x_n \in I$, et de coefficients $\lambda_1 \in \mathbb{R}^+ \dots \lambda_n \in \mathbb{R}^+$ tels que, pour tout $i = 1, \dots, n$ $\lambda_i \geqslant 0$ et $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ nous avons $f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$*

   (a) **Supposons que f soit convexe**

   Nous allons démontrer, **par une récurrence sur** n que pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$, pour tout choix de points $x_1 \in I \dots x_n \in I$, et de coefficients $\lambda_1 \in \mathbb{R}^+ \dots \lambda_n \in \mathbb{R}^+$ tels que, pour tout $i = 1, \dots, n$ $\lambda_i \geqslant 0$ et $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ nous avons $f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$

   ▷ C'est évidemment vrai pour $n = 2$, puisque si $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, alors

   $$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = f(\lambda_1 x_1 + (1-\lambda_1) x_2) \leqslant \lambda_1 f(x_1) + (1-\lambda_1) f(x_2) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$$

   ▷ Supposons la propriété vraie à l'ordre n

   ▷ Démontrons la propriété à l'ordre $n+1$

   Soient donc $x_1 \in I \dots x_{n+1} \in I$, et de coefficients $\lambda_1 \in \mathbb{R}^+ \dots \lambda_{n+1} \in \mathbb{R}^+$ tels que, pour tout $i = 1, \dots, n+1$ nous avons $\lambda_i \geqslant 0$ et $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$

   Alors :

   $$\begin{aligned}
   \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i &= \lambda_{n+1} x_{n+1} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \\
   &= \lambda_{n+1} x_{n+1} + \frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \\
   &= \lambda_{n+1} x_{n+1} + \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) \frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i} \\
   &= \lambda_{n+1} x_{n+1} + (1-\lambda_{n+1}) \frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i} \\
   &= \lambda_{n+1} x_{n+1} + (1-\lambda_{n+1}) Y
   \end{aligned}$$

   Ainsi, $f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) = f(\lambda_{n+1} x_{n+1} + (1-\lambda_{n+1}) Y) \leqslant \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) + (1-\lambda_{n+1}) f(Y)$ car f est convexe

   Or, $Y = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i} = \sum_{i=1}^{n} \left(\dfrac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i}\right) x_i$

   En posant $\mu_i = \dfrac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i}$, nous avons $\sum_{i=1}^{n} \mu_i = 1$ et donc, d'après l'hypothèse de récurrence,

   $$f\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mu_i f(x_i)$$

En faisant la synthèse, nous avons :

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i x_i\right) \leqslant\ & \lambda_{n+1}x_{n+1} + \left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right) f(Y) \\ \leqslant\ & \lambda_{n+1}x_{n+1} + \left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i} f(x_i)\right) \\ =\ & \sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i f(x_i) \end{aligned}$$

C'est donc vrai à l'ordre $n+1$

Et nous avons démontré la proposition

(b) **Réciproquement** si pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$, pour tout choix de points $x_1 \in I \dots x_n \in I$, et de coefficients $\lambda_1 \in \mathbb{R} \dots \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $i = 1, \dots, n$ $\lambda_i \geqslant 0$ et $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i = 1$ nous avons $f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i)$.

Soient donc $x_1 \in I$, $x_2 \in I$ $\lambda_1 \in \mathbb{R}^+$, $\lambda_2 \in \mathbb{R}^+$ tels que $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$.

D'après la propriété, nous avons $f(\lambda_1 x_1 + (1-\lambda_1)x_2) \leqslant \lambda_1 f(x_1) + (1-\lambda_1) f(x_2)$. f est donc convexe.

2. *Soit une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe ; démontrer que pour $x_1 \in I, \dots, x_n \in I$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ n nombres réels positifs, nous avons :*

$$f\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i}{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i}\right) \leqslant \frac{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i)}{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i}$$

Rien de plus simple : il suffit de poser $\mu_i = \dfrac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i}$; nous avons $\sum_{i=1}^{n}\mu_i = 1$ et il suffit d'appliquer la question précédente.

Exercice 27 :

Soit $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{*+}$ une fonction telle que $\ln h$ soit convexe ; démontrer que h est une fonction convexe.

Nous savons que la fonction exponentielle $\exp(x) = e^x$ est une fonction convexe et croissante. Comme $\ln h$ est convexe, alors $\exp \circ \ln h$ est convexe. Or, $h = \exp \circ \ln h$ et h est bien convexe

Exercice 28 :

1. *Utiliser la convexité de $f(x) = x^2$ pour montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x_1, \dots, x_n$ réels, nous avons :*

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{n}\right| \leqslant \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k^2}$$

La fonction $f(x) = x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x_1, \dots, x_n$ réels, nous avons :

$$f\left(\frac{x_1 + \cdots x_n}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \Longleftrightarrow \left(\frac{x_1 + \cdots x_n}{n}\right)^2 \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f x_k^2$$

Ce qui nous, en passant à la racine carrée : $\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{n}\right| \leqslant \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k^2}$

Ce que nous voulions

2. *Pour $p \in \mathbb{N}^*$, utiliser la convexité de $f(x) = x^p$ sur $\mathbb{R}^+$ pour montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x_1, \ldots, x_n$ réels positifs, nous avons :*

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{n} \leqslant \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

La dérivée seconde de $f(x) = x^p$ sur $\mathbb{R}^+$ est donnée par $f''(x) = p(p-1)x^{p-2}$. La dérivée seconde étant positive ou nulle sur $\mathbb{R}^+$ et donc $f(x) = x^p$ est convexe sur $\mathbb{R}^+$

Comme tout à l'heure, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x_1, \ldots, x_n$ réels positifs, nous avons :

$$f\left(\frac{x_1 + \cdots x_n}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(x_k) \Longleftrightarrow \left(\frac{x_1 + \cdots x_n}{n}\right)^p \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k^p$$

Ce qui nous, en passant à la racine p-ième : $\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{n} \leqslant \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k^p\right)^{\frac{1}{p}}$

Ce que nous voulions

3. *Utiliser la convexité de $f(x) = -\ln x$ sur $\mathbb{R}^{*+}$ pour montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x_1, \ldots, x_n$ réels strictement positifs, nous avons :*

$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

$f''(x)$ la dérivée seconde de f est donnée par $f''(x) = \frac{1}{x^2}$; elle est positive sur $\mathbb{R}^{*+}$ et donc $f(x) = -\ln x$ est convexe sur $\mathbb{R}^{*+}$, et donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x_1, \ldots, x_n$ réels strictement positifs, nous avons :

$$f\left(\frac{x_1 + \cdots x_n}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(x_k) \Longleftrightarrow -\ln\left(\frac{x_1 + \cdots x_n}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}-\ln x_k$$

Or,

$$-\ln\left(\frac{x_1 + \cdots x_n}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}-\ln x_k \Longleftrightarrow \ln\left(\frac{x_1 + \cdots x_n}{n}\right) \geqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln x_k$$

D'après les propriétés du logarithme, $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln x_k = \frac{1}{n}\ln(x_1x_2\cdots x_n) = \ln(x_1x_2\cdots x_n)^{\frac{1}{n}}$ et, en prenant l'exponentielle, nous avons :

$$\left(\frac{x_1 + \cdots x_n}{n}\right) \geqslant (x_1x_2\cdots x_n)^{\frac{1}{n}} \Longleftrightarrow \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n} \leqslant \frac{x_1 + \cdots x_n}{n}$$

En déduire que :

(a) $a^3 + b^3 + c^3 \geqslant 3abc$

On considère 3 réels a^3, b^3 et c^3. Nous avons donc : $\sqrt[3]{a^3b^3c^3} \leqslant \frac{a^3 + b^3 + c^3}{3}$, ce qui nous donns donc :

$$abc \leqslant \frac{a^3 + b^3 + c^3}{3} \Longleftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 \geqslant 3abc$$

(b) $(a+b+c)^3 \geqslant 27abc$

On applique l'inégalité à a, b et c : $\sqrt[3]{abc} \leqslant \dfrac{a+b+c}{3}$. D'où, en élevant au cube :

$$\sqrt[3]{abc} \leqslant \frac{a+b+c}{3} \Longleftrightarrow abc \leqslant \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \Longleftrightarrow 27abc \leqslant (a+b+c)^3$$

(c) *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt[n]{n!} \leqslant \dfrac{n+1}{2}$

Nous appliquons l'inégalité $\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leqslant \dfrac{x_1 + \cdots x_n}{n}$ aux n entiers $x_k = k$. Alors :

$$\sqrt[n]{1 \times 2 \times \cdots \times n} \leqslant \frac{1+2+3+\cdots+n}{n} \Longleftrightarrow \sqrt[n]{n\,!} \leqslant \frac{n\,(n+1)}{2n} \Longleftrightarrow \sqrt[n]{n!} \leqslant \frac{n+1}{2}$$

Exercice 29 :

1. *Que dire de la somme de deux fonctions convexes ?*

   Soient f et g 2 fonctions convexes sur un intervalle I et 2 nombres x_inI et $y \in I$ tels que $x < y$
   - ⋆ Alors, pour tout $\lambda \in [0;1]$, nous avons $f(\lambda x + (1-\lambda)\,y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda)\, f(y)$
   - ⋆ Et pour tout $\lambda \in [0;1]$, nous avons $g(\lambda x + (1-\lambda)\,y) \leqslant \lambda g(x) + (1-\lambda)\, g(y)$
   - ⋆ Donc :

   $$\begin{aligned}(f+g)(\lambda x + (1-\lambda)\,y) = &\ f(\lambda x + (1-\lambda)\,y) + g(\lambda x + (1-\lambda)\,y)\\ \leqslant &\ \lambda f(x) + (1-\lambda)\, f(y) + \lambda g(x) + (1-\lambda)\, g(y)\\ \leqslant &\ \lambda\,(f(x) + g(x)) + (1-\lambda)\,(f(y) + f(y))\\ \leqslant &\ \lambda\,(f+g)(x) + (1-\lambda)\,(f+g)(y)\end{aligned}$$

   Ce qui montre que $f+g$ est convexe.

   La somme de 2 fonctions convexes est convexe

2. *Que dire de la combinaison linéaire de deux fonctions convexes ?*

   On considère 2 fonctions $f(x) = e^x$ et $g(x) = e^{-x}$
   - ▷ On sait que $f(x) = e^x$ est convexe.
   - ▷ Nous avons $g''(x) = e^{-x}$; comme, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g''(x) > 0$, g est convexe sur $\mathbb{R}$
   - ▷ Nous avons maintenant, $(f-g)(x) = f(x) - g(x) = e^x - e^{-x}$ et donc $(f-g)''(x) = e^x - e^{-x}$
     Si $x \geqslant 0$, alors $(f-g)''(x) \geqslant 0$ et si $x \leqslant 0$, alors $(f-g)''(x) \leqslant 0$. Ce qui veut dire que la dérivée seconde n'est pas positive sur $\mathbb{R}$ et donc que $f-g$ n'est pas convexe sur $\mathbb{R}$

   La combinaison linéaire de 2 fonctions convexes n'est pas forcément convexe

Exercice 30 :

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction convexe et positive. On suppose qu'il existe* $a \in \mathbb{R}$ *et* $b \in \mathbb{R}$ *tel que* $f(a) = f(b) = 0$. *Montrer que* f *est nulle sur l'intervalle* $[a;b]$

Voilà un exercice sans trop de difficulté.
Tout $x \in [a;b]$ s'écrit $x = \lambda a + (1-\lambda)\, b$. D'après l'hypothèse, $f(x) \geqslant 0$ et $f(x) \leqslant \lambda f(a) + (1-\lambda)\, f(b)$.
Comme $f(a) = f(b) = 0$, nous avons aussi $f(x) \leqslant 0$, et donc, pour tout $x \in [a;b]$, $f(x) = 0$
f est donc nulle sur l'intervalle $[a;b]$

Exercice 31 :

Soient f *et* g *2 fonctions convexes sur un intervalle* I

1. *Montrer que* $h = \sup(f,g)$ *est une fonction convexe*

   Soient $x \in I$, $y \in I$ et $\lambda \in [0;1]$. Alors :
   $\longrightarrow$ $f(x) \leqslant h(x)$ et $f(y) \leqslant h(y)$ et, de même $g(x) \leqslant h(x)$ et $g(y) \leqslant h(y)$

$\longrightarrow$ D'autre part $f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$ et $g(\lambda x + (1-\lambda) y) \leqslant \lambda g(x) + (1-\lambda) g(y)$

$\longrightarrow$ Comme $\lambda \geqslant 0$ et $(1-\lambda) \geqslant 0$, nous avons $\lambda f(x) \leqslant \lambda h(x)$ et $(1-\lambda) f(y) \leqslant (1-\lambda) h(y)$, c'est à dire $\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \leqslant \lambda h(x) + (1-\lambda) h(y)$
De la même manière,$\lambda g(x) + (1-\lambda) g(y) \leqslant \lambda h(x) + (1-\lambda) h(y)$

$\longrightarrow$ Or, nous avons $f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \leqslant \lambda h(x) + (1-\lambda) h(y)$
De même, nous avons $g(\lambda x + (1-\lambda) y) \leqslant \lambda h(x) + (1-\lambda) h(y)$
Donc $\sup\{f(\lambda x + (1-\lambda) y) ; g(\lambda x + (1-\lambda) y)\} \leqslant \lambda h(x) + (1-\lambda) h(y)$

$\longrightarrow$ Comme $h(\lambda x + (1-\lambda) y) = \sup\{f(\lambda x + (1-\lambda) y) ; g(\lambda x + (1-\lambda) y)\}$, nous avons :

$$h(\lambda x + (1-\lambda) y) \leqslant \lambda h(x) + (1-\lambda) h(y)$$

Ainsi, $h = \sup(f, g)$ est une fonction convexe

2. *Que dire de $j = \inf(f, g)$?*

A contrario, $j = \inf(f, g)$ **n'est pas forcément convexe**

Soient $f(x) = x + 1$ et $g(x) = \dfrac{x}{2}$; ces deux fonctions sont convexes, mais $j(x) = \inf(f(x), g(x))$ ne l'est pas.

Nous avons, en fait : $j(x) = \begin{cases} x + 1 \text{ si } x \leqslant -2 \\ \dfrac{x}{2} \end{cases}$

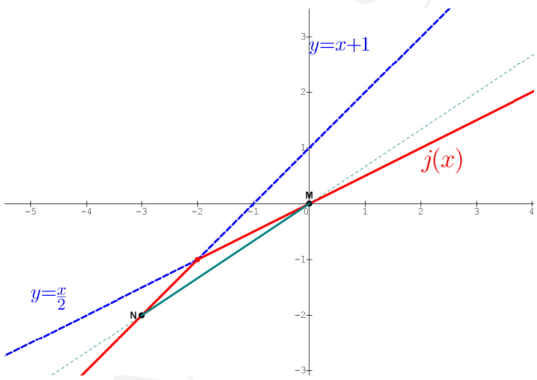

FIGURE 4.11 – $j(x) = \inf(f(x), g(x))$ n'est pas convexe

Exercice 32 :

1. *Démontrer que, pour tout $x > 0$ et tout $t \in [0; x]$, nous avons $1 + t \leqslant e^t \leqslant 1 + \dfrac{t}{x}(e^x - 1)$*

La fonction exponentielle est au-dessus de ses tangentes et sous ses cordes.
Soit donc $x > 0$ et considérons l'intervalle $[0; x]$
Si nous considérons la tangente en $x = 0$ à la courbe e^t, elle a pour équation $y = t + 1$, et nous pouvons dire que, pour tout $t \in \mathbb{R}$ que $t \leqslant e^t$
La sécante qui passe par les points $(0; 1)$ et $(x; e^x)$ a pour équation $y = 1 + \dfrac{t}{x}(e^x - 1)$, et donc, pour tout $t \in [0; x]$, nous avons $e^t \leqslant 1 + \dfrac{t}{x}(e^x - 1)$
Finalement, pour tout $x > 0$ et tout $t \in [0; x]$, nous avons $1 + t \leqslant e^t \leqslant 1 + \dfrac{t}{x}(e^x - 1)$

2. *Que se passe-t-il si $x < 0$?*

Il se passe la même chose, et pour les mêmes raisons !!
Pour tout $x < 0$ et tout $t \in [x; 0]$, nous avons $1 + t \leqslant e^t \leqslant 1 + \dfrac{t}{x}(e^x - 1)$

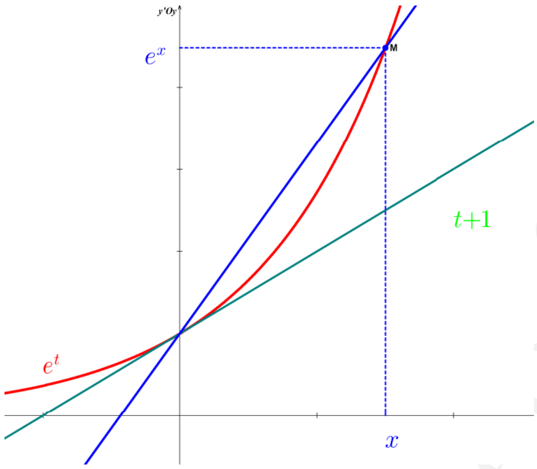

FIGURE 4.12 – La fonction exponentielle est convexe, donc au-dessus de ses tangentes et sous ses cordes

Exercice 33 :

Utiliser la fonction f définie sur l'intervalle $]+1;+\infty[$ par $f(x)=\ln(\ln x)$ pour démontrer que

$$(\forall x>1)(\forall y>1)\left(\ln\left(\frac{x+y}{2}\right)\right)\geqslant\sqrt{(\ln x)(\ln y)}$$

Calculons, pour $x>1$, la dérivée seconde de f. Nous avons :

$$f'(x)=\frac{1}{x\ln x}\quad\text{et}\quad f''(x)=\frac{-(1+\ln x)^2}{(x\ln x)^2}$$

Comme $x>1$, $-(1+\ln x)^2<0$ et $f''(x)<0$, ce qui veut dire que f est concave. Donc, pour tout $x>1$ et tout $y>1$:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)\geqslant\frac{f(x)+f(y)}{2}\Longleftrightarrow\ln\left[\ln\left(\frac{x+y}{2}\right)\right]\geqslant\frac{1}{2}(\ln\ln x+\ln\ln y)$$

Or :

$$\frac{1}{2}(\ln\ln x+\ln\ln y)=\frac{1}{2}\ln(\ln x\ln y)=\ln\sqrt{\ln x\ln y}$$

Nous avons donc $\ln\left[\ln\left(\frac{x+y}{2}\right)\right]\geqslant\ln\sqrt{\ln x\ln y}$, et en passant par l'exponentielle qui est une fonction croissante, nous avons :

$$\ln\left(\frac{x+y}{2}\right)\geqslant\sqrt{\ln x\ln y}$$

Exercice 34 :

1. *Démontrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\ln(1+e^x)$ est convexe*

   Il suffit d'en calculer la dérivée seconde et de vérifier qu'elle est positive.

   $f''(x)=\dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}$; f'' est bien positive sur $\mathbb{R}$, donc convexe sur $\mathbb{R}$

2. *Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $x_1>0,\cdots,x_n>0$ nous avons :*

$$1+\left(\prod_{k=1}^{n}x_k\right)^{\frac{1}{n}}\leqslant\prod_{k=1}^{n}(1+x_k)^{\frac{1}{n}}$$

▷ La fonction f étant convexe sur $\mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et tout $x_1 \in \mathbb{R}, \cdots, x_n \in \mathbb{R}$nous avons :

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

C'est à dire :

$$\ln\left(1 + e^{\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}}\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln(1 + e^{x_i})$$

▷ Des propriétés de l'exponentielle, nous avons :

⋆ Pour le premier membre de l'inéquation :

$$\begin{aligned} e^{\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}} &= e^{\frac{x_1}{n}} \times e^{\frac{x_2}{n}} \times \cdots \times e^{\frac{x_n}{n}} \\ &= (e^{x_1})^{\frac{1}{n}} \times (e^{x_2})^{\frac{1}{n}} \times \cdots \times (e^{x_n})^{\frac{1}{n}} \\ &= \prod_{k=1}^{n} (e^{x_k})^{\frac{1}{n}} \\ &= \left(\prod_{k=1}^{n} (e^{x_k})\right)^{\frac{1}{n}} \end{aligned}$$

⋆ Et pour le second membre de l'inéquation :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln(1 + e^{x_i}) = \frac{1}{n}\ln\prod_{i=1}^{n}(1 + e^{x_i}) = \ln\left(\prod_{i=1}^{n}(1 + e^{x_i})\right)^{\frac{1}{n}}$$

De telle sorte que nous avons une nouvelle inégalité :

$$\ln\left(1 + \left(\prod_{k=1}^{n}(e^{x_k})\right)^{\frac{1}{n}}\right) \leqslant \ln\left(\prod_{i=1}^{n}(1 + e^{x_i})\right)^{\frac{1}{n}}$$

Comme la fonction ln est bijective, nous avons :

$$1 + \left(\prod_{k=1}^{n}(e^{x_k})\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \left(\prod_{i=1}^{n}(1 + e^{x_i})\right)^{\frac{1}{n}}$$

▷ Soient $y_1 > 0, y_2 > 0 \ldots y_n > 0$. La fonction exp étant bijective, il existe une unique $x_i \in \mathbb{R}$ tel que $y_i = e^{x_i}$ et alors, nous avons l'inégalité :

$$1 + \left(\prod_{k=1}^{n} y_k\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \left(\prod_{k=1}^{n}(1 + y_k)\right)^{\frac{1}{n}} \Longleftrightarrow 1 + \prod_{k=1}^{n} y_k^{\frac{1}{n}} \leqslant \prod_{k=1}^{n}(1 + y_k)^{\frac{1}{n}}$$

Ce que nous voulions

3. *En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et $a_1 > 0, \cdots, a_n > 0$ et $b_1 > 0, \cdots, b_n > 0$, nous avons :*

$$\left(\prod_{k=1}^{n}(a_k + b_k)\right)^{\frac{1}{n}} \geqslant \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\prod_{k=1}^{n} b_k\right)^{\frac{1}{n}}$$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et soient $a_1 > 0, \cdots, a_n > 0$ et $b_1 > 0, \cdots, b_n > 0$ $2n$ réels strictement positifs. En posant $y_k = \dfrac{a_k}{b_k}$ et en utilisant l'inégalité précédente, nous avons

$$1 + \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{b_k}\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{a_k}{b_k}\right)^{\frac{1}{n}}$$

⋆ D'une part :

$$\begin{aligned} 1+\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{b_k}\right)^{\frac{1}{n}} &= 1+\frac{\prod_{k=1}^{n} a_k^{\frac{1}{n}}}{\prod_{k=1}^{n} b_k^{\frac{1}{n}}} \\ &= \frac{\prod_{k=1}^{n} b_k^{\frac{1}{n}}+\prod_{k=1}^{n} a_k^{\frac{1}{n}}}{\prod_{k=1}^{n} b_k^{\frac{1}{n}}} \end{aligned}$$

⋆ D'autre part :

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{a_k}{b_k}\right)^{\frac{1}{n}} &= \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{b_k+a_k}{b_k}\right)^{\frac{1}{n}} \\ &= \frac{\prod_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^{\frac{1}{n}}}{\prod_{k=1}^{n}(b_k)^{\frac{1}{n}}} \end{aligned}$$

D'où nous obtenons :

$$\frac{\prod_{k=1}^{n} b_k^{\frac{1}{n}}+\prod_{k=1}^{n} a_k^{\frac{1}{n}}}{\prod_{k=1}^{n} b_k^{\frac{1}{n}}} \leqslant \frac{\prod_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^{\frac{1}{n}}}{\prod_{k=1}^{n}(b_k)^{\frac{1}{n}}}$$

C'est à dire, après simplification :

$$\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}}+\left(\prod_{k=1}^{n} b_k\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \left(\prod_{k=1}^{n}(a_k+b_k)\right)^{\frac{1}{n}}$$

Ce que nous voulions

Exercice 35 :

1. *Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $a_1>0,\cdots,a_n>0$, nous avons : $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i}\geqslant \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i}$*

   Il est facile à démontrer que la fonction $f(x)=\sqrt{x}$ définie sur $\mathbb{R}^{*+}$ est concave ; il suffit, pour cela, de vérifier la dérivée seconde est négative : nous avons $f''(x)=\frac{-1}{4x\sqrt{x}}$

   Dès lors, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $a_1>0,\cdots,a_n>0$, nous avons :

$$f\left(\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\right)\geqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a_k)$$

   C'est à dire :

$$\sqrt{\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}}\geqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{a_k}\iff\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{a_1+\cdots+a_n}\geqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{a_k}\iff\sqrt{a_1+\cdots+a_n}\geqslant\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{a_k}$$

   Ce que nous voulions

2. *Démontrer que, pour tout $x>1$, nous avons $\sqrt{x^{2n}-1}\geqslant\sqrt{\frac{x+1}{x-1}\times\frac{x^n-1}{\sqrt{n}}}$*

Pour $x > 1$, posons $a_k = x^{2k}$. Alors $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} x^{2k} = \frac{x^{2n}-1}{x^2-1}$, et donc $\sqrt{\sum_{k=1}^{n} x^{2k}} = \sqrt{\frac{x^{2n}-1}{x^2-1}} = \frac{\sqrt{x^{2n}-1}}{\sqrt{x^2-1}}$

De même, $\sum_{k=1}^{n} \sqrt{a_k} = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{x^{2k}} = \sum_{k=1}^{n} x^k = \frac{x^n-1}{x-1}$.

D'où, l'inégalité $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i} \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i}$ devient :

$$\frac{\sqrt{x^{2n}-1}}{\sqrt{x^2-1}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{x^n-1}{x-1} \iff \sqrt{x^{2n}-1} \geqslant \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \times \frac{x^n-1}{\sqrt{n}}$$

Exercice 36 :

1. *Vérifier que f, définie sur $\mathbb{R}^{*+}$ par $f(x) = x \ln x$ est convexe sur $\mathbb{R}^{*+}$*

   Il suffit donc de calculer la dérivée seconde $f''(x) = \frac{1}{x}$ qui est positive sur $\mathbb{R}^{*+}$
2. *Démontrer que, pour tout $x > 0$, tout $y > 0$, tout $a > 0$ et tout $b > 0$ nous avons :*

$$(x+y)\ln\left(\frac{x+y}{a+b}\right) \leqslant x \ln\left(\frac{x}{a}\right) + y \ln\left(\frac{y}{b}\right)$$

Soient $x > 0$, $y > 0$, $a > 0$ et $b > 0$

Nous écrivons que f est convexe entre $\frac{x}{a}$ et $\frac{y}{b}$; pour tout $\lambda \in [0; 1]$, nous avons :

$$f\left(\lambda\frac{x}{a} + (1-\lambda)\frac{y}{b}\right) \leqslant \lambda f\left(\frac{x}{a}\right) + (1-\lambda) f\left(\frac{y}{b}\right)$$

Ainsi, en posant $\lambda = \frac{a}{a+b}$, nous avons $1 - \lambda = \frac{b}{a+b}$ et l'inégalité devient :

$$f\left(\frac{a}{a+b} \times \frac{x}{a} + \frac{b}{a+b} \times \frac{y}{b}\right) \leqslant \frac{a}{a+b} f\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{b}{a+b} f\left(\frac{y}{b}\right)$$
$$\iff$$
$$f\left(\frac{x+y}{a+b}\right) \leqslant \frac{a}{a+b} f\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{b}{a+b} f\left(\frac{y}{b}\right)$$

Et maintenant, mettons nous au calcul :

$\longrightarrow f\left(\frac{x+y}{a+b}\right) = \left(\frac{x+y}{a+b}\right) \ln\left(\frac{x+y}{a+b}\right)$

$\longrightarrow \frac{a}{a+b} f\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{a}{a+b} \times \left(\frac{x}{a}\right) \ln\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{x}{a+b} \ln\left(\frac{x}{a}\right)$

$\longrightarrow \frac{b}{a+b} f\left(\frac{y}{b}\right) = \frac{b}{a+b} \times \left(\frac{y}{b}\right) \ln\left(\frac{y}{b}\right) = \frac{y}{a+b} \ln\left(\frac{y}{b}\right)$

D'où, l'inégalité devient :

$$\left(\frac{x+y}{a+b}\right) \ln\left(\frac{x+y}{a+b}\right) \leqslant \frac{x}{a+b} \ln\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{y}{a+b} \ln\left(\frac{y}{b}\right)$$

Ce qui donne, en simplifiant :

$$(x+y)\ln\left(\frac{x+y}{a+b}\right) \leqslant x \ln\left(\frac{x}{a}\right) + y \ln\left(\frac{y}{b}\right)$$

Exercice 37 :

Cet exercice est fait de questions plus ou moins indépendantes, utilisant le même outil
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe

1. *On suppose f strictement croissante. Etudier* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

   Nous allons démontrer la question de 2 façons

   (a) Une première façon

   f étant convexe est toujours « sous les tangentes », c'est à dire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $a \in \mathbb{R}$, nous avons $f(x) \geqslant f'_d(a)(x-a) + f(a)$
   Fixons $a \in \mathbb{R}$; f étant croissante $f'_d(a) \geqslant 0$ et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f'_d(a)(x-a) + f(a) = +\infty$ et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

   (b) Une seconde façon

   On considère $h_0(x) = \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{f(x) - f(0)}{x}$. D'après 4.5.3, la fonction h_0 est croissante.
   Donc, pour tout $x > 1$, $h_0(x) \geqslant h_0(1)$ et donc $\dfrac{f(x) - f(0)}{x} \geqslant \dfrac{f(1) - f(0)}{1} = f(1) - f(0)$
   Donc $f(x) \geqslant (f(1) - f(0))x + f(0)$. Comme, f est croissante, $f(1) - f(0) \geqslant 0$. Donc, $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(1) - f(0))x + f(0) = 0$ et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

2. *On suppose que f est bornée. Montrer que f est constante*

   Si f est constante, alors, pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $b \in \mathbb{R}$, avec $a \neq b$, nous avons $f(a) = f(b)$.
   Supposons le contraire, c'est à dire $f(a) \neq f(b)$. Pour nous simplifier la vie, nous supposons $a < b$

   ▷ Si $f(a) > f(b)$

   Alors, nous utilisons la fonction $h_a(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$. D'après 4.5.3, la fonction h_a est croissante.
   Donc, pour tout $x > b$, nous avons $h_a(x) \geqslant h_a(b)$, c'est à dire $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \leqslant \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ et donc $f(x) - f(a) \leqslant \left(\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}\right)(x - a)$, puisque $x - a > 0$ et donc :

   $$f(x) \leqslant \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right)(x - a) + f(a)$$

   Comme $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \leqslant 0$, nous avons $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}\right)(x - a) + f(a) = +\infty$ et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, ce qui contredit le fait que f est bornée.

   — Si $f(a) < f(b)$

   Alors, nous utilisons toujours la fonction $h_b(x) = \dfrac{f(x) - f(b)}{x - b}$. D'après 4.5.3, la fonction h_b est croissante.
   Donc, pour tout $x < a$, nous avons $h_b(x) \leqslant h_b(a)$, c'est à dire $\dfrac{f(x) - f(b)}{x - b} \leqslant \dfrac{f(a) - f(b)}{a - b}$ et donc $f(x) - f(b) \geqslant \left(\dfrac{f(a) - f(b)}{a - b}\right)(x - b)$, puisque $x - a < 0$ et donc :

   $$f(x) \geqslant \left(\frac{f(a) - f(b)}{a - b}\right)(x - b) + f(b)$$

   Comme $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \geqslant 0$, nous avons $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{f(a) - f(a)}{a - b}\right)(x - a) + f(b) = +\infty$ et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, ce qui contredit une nouvelle fois le fait que f est bornée.

   Donc l'hypothèse $f(a) \neq f(b)$ est contradictoire et $f(a) = f(b)$ et f est constante sur $\mathbb{R}$

3. *On suppose que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Montrer que f est positive*

   Il faut donc que nous démontrions que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, nous avons $f(a) \geqslant 0$
   Supposons le contraire, c'est à dire qu'il existe $a_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(a_0) < 0$
   Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, il existe $b \in \mathbb{R}$, (et on peut choisir $b > a_0$) tel que si $x > b$, alors

   $$|f(x)| \leqslant \frac{1}{2}|f(a_0)| \Longleftrightarrow \frac{1}{2}f(a_0) \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{2} \times -f(a_0)$$

   Nous avons, en particulier $\frac{1}{2}f(a_0) \leqslant f(b) \leqslant \frac{1}{2} \times -f(a_0)$
   Considérons, maintenant $h_{a_0}(x) = \dfrac{f(x) - f(a_0)}{x - a_0}$. D'après 4.5.3, la fonction h_{a_0} est croissante. Alors, pour tout $x > b$ nous avons : $h_{a_0}(x) \geqslant h_{a_0}(b)$, c'est à dire :

   $$\frac{f(x) - f(a_0)}{x - a_0} \geqslant \frac{f(b) - f(a_0)}{b - a_0}$$

   De l'inégalité $\frac{1}{2}f(a_0) \leqslant f(b) \leqslant \frac{1}{2} \times -f(a_0)$, nous tirons : $\frac{1}{2} \times -f(a_0) \leqslant f(b) - f(a_0) \leqslant \frac{3}{2} \times -f(a_0)$, de telle sorte, puisque $b > a_0$:

   $$\frac{f(b) - f(a_0)}{b - a_0} \geqslant \frac{-f(a_0)}{2(b - a_0)}$$

   Et donc : $\dfrac{f(x) - f(a_0)}{x - a_0} \geqslant \dfrac{-f(a_0)}{2(b - a_0)}$
   D'où nous avons, pour $x > b$, $f(x) \geqslant \left(\dfrac{-f(a_0)}{2(b - a_0)}\right)(x - a) + f(a_0)$. Comme $\dfrac{-f(a_0)}{2(b - a_0)} \geqslant 0$, nous avons $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{-f(a_0)}{2(b - a_0)}\right)(x - a) + f(a_0) = +\infty$, et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
   Ce qui est en totale contradiction avec l'hypothèse. Donc f est positive sur $\mathbb{R}$

4. *On suppose que f admet une droite asymptote en $+\infty$. Etudier la position de $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f par rapport à la droite asymptote.*

   Soit $y = ax + b$ l'équation de cette droite asymptote ; alors $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$
   La fonction $g(x) = -(ax + b)$ est convexe *(et aussi concave puisque c'est une application affine)* et donc la fonction $f + g$ est convexe comme somme de 2 fonctions convexes.
   Nous avons $(f + g)(x) = f(x) - (ax + b)$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} (f + g)(x) = 0$
   D'après la question précédente, comme $f + g$ convexe et $\lim\limits_{x\to+\infty} (f + g)(x) = 0$, nous avons, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(f + g)(x) \geqslant 0$, c'est à dire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

   $$f(x) - (ax + b) \geqslant 0 \Longleftrightarrow f(x) \geqslant (ax + b)$$

   Ainsi, $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f est au-dessus de la droite asymptote.

Exercice 38 :

Voici un exercice réellement "tiré par les cheveux", pas exactement transcendant......apportant peu, en fait, sinon une pratique des propriétés des fonctions convexes
Soit $f :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe.

1. *Démontrer que la fonction $\dfrac{f(x)}{x}$ admet, en $+\infty$, la même limite que $h_1(x) = \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ et que cette limite est finie ou égale à $+\infty$*

D'après 4.5.3, la fonction h_1 est croissante et alors, de deux choses l'une :

$$\lim_{x\to+\infty} h_1(x) = L \text{ ou bien } \lim_{x\to+\infty} h_1(x) = +\infty$$

Nous avons :

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{x} &= \frac{f(x)-f(1)+f(1)}{x-1}\times\frac{(x-1)}{x}\\ &= \frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\frac{(x-1)}{x}+\frac{f(1)}{x}\\ &= h_1(x)\times\frac{(x-1)}{x}+\frac{f(1)}{x}\end{aligned}$$

Nous avons $\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-1)}{x}=1$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(1)}{x}=0$ et donc, nous avons bien $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}h_1(x)$

Ce que nous voulions.

2. *Montrer que si $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=L$, alors $g(x)=f(x)-Lx$ admet une limite finie ou $-\infty$ lorsque x tens vers $+\infty$*

   Soit $x>0$; nous considérons $h_x(t)=\frac{f(t)-f(x)}{t-x}$ définie sur $]x;+\infty[$.
   Nous avons h_x croissante sur $]x;+\infty[$ et donc, comme précédemment :

   $$\lim_{t\to+\infty} h_x(t) = L \text{ ou bien } \lim_{t\to+\infty} h_x(t) = +\infty$$

   h_x étant croissante, pour tout $y>x$, nous avons $h_x(y)\leqslant L$, c'est à dire :

   $$\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\leqslant L \iff f(y)-f(x)\leqslant L(y-x)\iff f(y)-Ly\leqslant f(x)-Lx$$

   En considérant $g(x)=f(x)-Lx$, nous venons de montrer que g est décroissante et donc :

   $$\lim_{t\to+\infty} g(x) = l \text{ ou bien } \lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$$

Exercice 39 :

Soit $f:]0;+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$ une application. Nous définissons $g:]0;+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$ par $g(x)=\frac{f(x)}{x}$ pour tout $x>0$.

1. *Montrer si g est décroissante, alors f est sous-additive sur $]0;+\infty[$.*

   Soient $a>0$ et $b>0$
   - ⋆ g étant décroissante, alors $g(a+b)\leqslant g(a)$, c'est à dire $\frac{f(a+b)}{a+b}\leqslant\frac{f(a)}{a}$, inégalité équivalente à $\frac{af(a+b)}{a+b}\leqslant f(a)$
   - ⋆ Pour les mêmes raisons, nous avons : $\frac{bf(a+b)}{a+b}\leqslant f(b)$
   - ⋆ Maintenant, en additionnant les deux inégalités, nous obtenons :

   $$\frac{af(a+b)}{a+b}+\frac{bf(a+b)}{a+b}\leqslant f(a)+f(b)\iff f(a+b)\leqslant f(a)+f(b)$$

   f est bien sous-additive

2. *Montrer que si f est convexe et sous-additive, alors g est décroissante*

   Soient $a>0$ et $b>0$ tels que $a\leqslant b$; il nous faut donc montrer que $g(b)\leqslant g(a)$
   $\longrightarrow$ Soit $\alpha=\frac{a}{b}$. Par construction, nous avons $0<\alpha\leqslant+1$, et donc, de la convexité de f :

   $$f(\alpha a+(1-\alpha)(a+b))\leqslant\alpha f(a)+(1-\alpha)f(a+b)$$

$\longrightarrow$ f est sous-additive, donc $f(a+b) \leqslant f(a)+f(b)$ et en injectant cette inégalité, nous avons :

$$\alpha f(a) + (1-\alpha) f(a+b) \leqslant \alpha f(a)(1-\alpha)(f(a)+f(b))$$

Ce qui nous donne en synthèse :

$$f(\alpha a + (1-\alpha)(a+b)) \leqslant \alpha f(a)(1-\alpha)(f(a)+f(b))$$

$\longrightarrow$ Maintenant, calculons les différents membres de cette dernière inégalité :
- $\star$ $\alpha a + (1-\alpha)(a+b) = \alpha a + a + b - \alpha a - \alpha b = a + (1-\alpha) b = a + \left(1 - \frac{a}{b}\right) b = a + b - a = b$
- $\star$ $\alpha f(a)(1-\alpha)(f(a)+f(b)) = \alpha f(a) + f(a) + f(b) - \alpha f(a) - \alpha f(b) = f(a) + (1-\alpha) f(b)$

$\longrightarrow$ D'où nous tirons : $f(b) \leqslant f(a) + (1-\alpha) f(b) \Longleftrightarrow f(a) - \alpha f(b) \geqslant 0$

Or, $f(a) - \alpha f(b) \geqslant 0 \Longleftrightarrow f(a) \geqslant \dfrac{a}{b} f(b) \Longleftrightarrow \dfrac{f(a)}{a} \geqslant \dfrac{f(b)}{b}$, c'est à dire $g(b) \leqslant g(a)$

Ce que nous voulions.

4.8.5 Miscelleanous

Exercice 40 :

1. *Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{2n} = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{n+k}$ est convergente. On appelle l sa limite*

Nous allons démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée *(donc convergente)*

▷ Elle est minorée

Effectivement, et de manière évidente, elle est strictement positive.
Plus généralement, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite bornée.
En effet, pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, nous avons $\dfrac{1}{2n} \leqslant \dfrac{1}{n+k} \leqslant \dfrac{1}{n}$, et en passant à la sommation, nous avons :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2n} \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+k} \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n} \Longleftrightarrow \frac{n+1}{2n} \leqslant u_n \leqslant \frac{n+1}{n}$$

Et nous avons donc bien $\dfrac{1}{2} < u_n \leqslant 2$

▷ La suite est décroissante

Pour montrer la décroissante de la suite, nous calculons donc $u_{n+1} - u_n$

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{n+1+k} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+k} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{n+(1+k)} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+k} \\
&= \sum_{k=1}^{n+2} \frac{1}{n+k} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+k} \\
&= \frac{1}{n+n+1} + \frac{1}{n+n+2} - \frac{1}{n} \\
&= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n} \\
&= \frac{2n(n+1) + n(2n+1) - 2(2n+1)(n+1)}{(2n+1)(2n+2)n} \\
&= \frac{-3n-2}{(2n+1)(2n+2)n}
\end{aligned}$$

Donc, $u_{n+1} - u_n < 0$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc strictement décroissante.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ étant décroissante et minorée est donc convergente, et nous appelons l sa limite

2. *Soit f une fonction numérique définie sur $[-1;+1]$, dérivable en 0 et nulle en 0 (c'est à dire $f(0)=0$). On considère la suite $(S_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :*

$$S_n(f) = f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{1}{n+1}\right) + f\left(\frac{1}{n+2}\right) + \cdots + f\left(\frac{1}{2n}\right) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{1}{n+k}\right)$$

Montrer que la suite $(S_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une limite $S(f)$ qu'il possible d'exprimer en fonction de l et de $f'(0)$

Soit $\varepsilon > 0$

▷ Comme f est différentiable en 0, il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x \in]-\alpha;+\alpha[$, nous ayions :

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + x\varphi(x) \text{ où } \lim_{x\to 0}\varphi(x) = 0$$

Comme $f(0)=0$, nous pouvons remplacer la précédente égalité par :

$$f(x) = xf'(0) + x\varphi(x) \text{ où } \lim_{x\to 0}\varphi(x) = 0$$

Comme $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x) = 0$, il existe $\alpha_1 > 0$ tel que si $|x| \leqslant \alpha_1$ alors $|\varphi(x)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$

▷ Appelons $\beta = \inf\{\alpha;\alpha_1\}$.

Comme la suite $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante et tendant vers 0, il existe $N_\beta \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, si $n \geqslant N_\beta$, alors $\dfrac{1}{n} < \beta$

Soit $n \geqslant N_\beta$; alors, pour $k\in\mathbb{N}$, avec $0 \leqslant k \leqslant n$, nous avons :

$$f\left(\frac{1}{n+k}\right) = \frac{1}{n+k}f'(0) + \frac{1}{n+k}\varphi\left(\frac{1}{n+k}\right)$$

Et, en sommant de $k=0$ à $k=n$, nous avons :

$$\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{1}{n+k}\right) = f'(0)\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n+k} + \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n+k}\varphi\left(\frac{1}{n+k}\right)$$

C'est à dire :

$$S_n(f) = f'(0)\,u_n + \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n+k}\varphi\left(\frac{1}{n+k}\right)$$

▷ <u>Supposons $f'(0)=0$</u>

Alors :

$$|S_n(f)| = \left|\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n+k}\varphi\left(\frac{1}{n+k}\right)\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n+k}\left|\varphi\left(\frac{1}{n+k}\right)\right|$$

- Si $n \geqslant N_\beta$, alors $0 < \dfrac{1}{n+k} < \alpha_1$ et $\left|\varphi\left(\dfrac{1}{n+k}\right)\right| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$
- Nous avons démontré que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n+k} < 2$

Donc, $n \geqslant N_\beta$, alors $|S_n(f)| \leqslant 2\times\dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Nous avons donc, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(f) = 0$

▷ <u>Supposons $f'(0)\neq 0$</u>, c'est à dire $|f'(0)| > 0$

Nous allons démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(f) = f'(0)\,l$. Pour ce faire, nous avons :

$$\begin{aligned} S_n(f) - f'(0)\,l = &\; f'(0)\,u_n - f'(0)\,l + \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n+k}\varphi\left(\frac{1}{n+k}\right) \\ = &\; f'(0)\,(u_n - l) + \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n+k}\varphi\left(\frac{1}{n+k}\right) \end{aligned}$$

De telle sorte que :

$$|S_n(f) - f'(0)\, l| \leqslant |f'(0)|\, |u_n - l| + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+k} \left|\varphi\left(\frac{1}{n+k}\right)\right|$$

Nous avons montré que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$; il existe donc $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que, si $n \geqslant N_1$, alors $|u_n - l| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2\,|f'(0)|}$

Et,pour $n \geqslant N_\beta$, nous avons $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+k} \left|\varphi\left(\frac{1}{n+k}\right)\right| \leqslant 2 \times \frac{\varepsilon}{2}$

Ainsi, pour $n \geqslant \max\{N_1, N_\beta\}$, nous avons :

$$|S_n(f) - f'(0)\, l| \leqslant |f'(0)| \times \frac{\varepsilon}{2\,|f'(0)|} + 2 \times \frac{\varepsilon}{2} = \frac{3\varepsilon}{2}$$

Ce qui démontre que, de manière générale, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(f) = f'(0)\, l$

3. *Appliquer le résultat précédent à la fonction $f(x) = \ln(1+x)$ et en déduire la valeur de l*

   Réécrivons $S_n(f)$ pour $f(x) = \ln(1+x)$:

$$\begin{aligned}
S_n(f) &= \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{1}{n+k}\right)\\
&= \sum_{k=0}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{n+k}\right)\\
&= \sum_{k=0}^{n} \ln\left(\frac{n+k+1}{n+k}\right)\\
&= \sum_{k=0}^{n} \ln(n+k+1) - \ln(n+k)\\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \ln(n+k) - \sum_{k=0}^{n} \ln(n+k)\\
&= \ln(2n+1) - \ln n\\
&= \ln\left(2 + \frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(f) = \ln 2$. Or, nous avons aussi $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(f) = f'(0)\, l$ et donc $\ln 2 = f'(0)\, l$.

Comme $f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$ donc $f'(0) = 1$ et on conclue que $l = \ln 2$

Des prolongements

- Considérons $f(x) = \sin x$. Alors :

$$S_n(f) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{1}{n+k}\right) = \sum_{k=0}^{n} \sin\left(\frac{1}{n+k}\right) = \sum_{k=n}^{2n} \sin\frac{1}{k}$$

  D'après les résultats de l'exercice, $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \sin\frac{1}{k} = \ln 2 \cos 0 = \ln 2$

- Considérons $f(x) = \sin^2 x$. Alors :

$$S_n(f) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{1}{n+k}\right) = \sum_{k=0}^{n} \sin^2\left(\frac{1}{n+k}\right) = \sum_{k=n}^{2n} \sin^2\frac{1}{k}$$

  D'après les résultats de l'exercice, $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \sin^2\frac{1}{k} = \ln 2 \times 2 \sin 0 \cos 0 = 0$

▷ Considérons $f(x) = x^2$. Alors :

$$S_n(f) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{1}{n+k}\right) = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{n+k}\right)^2 = \sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k^2} = \ln 2 \times 0 = 0$$

D'après les résultats de l'exercice, $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k^2} = \ln 2 \times 0 = 0$

Ce dernier cas n'est pas surprenant puisque la suite $S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$ est convergente, qu'elle vérifie donc le critère de Cauchy, et que $\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k^2}$ est un cas particulier du critère de Cauchy

Exercice 41 :

Soient $\alpha > 1$, $\beta > 1$ et $f : [0;1] \longrightarrow]0;+\infty[$ une application dérivable sur $]0;1[$. On suppose que :

$$f(0) = 0 \text{ et } (\forall x \in]0;1[)\,(f'(x) > 0)$$

En étudiant $g(x) = (f(x))^{\alpha} \times (f(1-x))^{\beta}$, démontrer qu'il existe $c \in]0;1[$ tel que :

$$\alpha\frac{f'(c)}{f(c)} = \beta\frac{f'(1-c)}{f'(c)}$$

Nous considérons donc $g(x) = (f(x))^{\alpha} \times (f(1-x))^{\beta}$. Nous avons donc $g(0) = g(1) = 0$.
g est continue sur $[0;1]$ et dérivable sur $]0;1[$. D'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]0;1[$ tel que $g'(c) = 0$ Or,

$$\begin{aligned} g'(x) = &\ \alpha(f(x))^{\alpha-1} \times f'(x) \times (f(1-x))^{\beta} + \beta(f(x))^{\alpha} \times (f(1-x))^{\beta-1} \times -f'(1-x) \\ = &\ (f(x))^{\alpha-1}(f(1-x))^{\beta-1}[\alpha f'(x) \times (f(1-x)) - \beta(f(x)) \times f'(1-x)] \end{aligned}$$

Comme, pour tout $x \in]0;1[$, nous avons $f(x) > 0$, nous en déduisons que

$$g'(c) = 0 \iff \alpha f'(c) \times (f(1-c)) - \beta(f(c)) \times f'(1-c) = 0$$

C'est à dire :

$$\alpha f'(c) \times (f(1-c)) = \beta(f(c)) \times f'(1-c) \iff \alpha\frac{f'(c)}{f(c)} = \beta\frac{f'(1-c)}{f(1-c)}$$

Ce que nous voulions

Exercice 42 :

Soient donc $p > 1$ et $q > 1$ 2 nombres réels conjugués.

1. *Démontrer que, pour tout $u \in \mathbb{C}^*$ et tout $v \in \mathbb{C}^*$, nous avons :*

$$|uv| \leqslant \frac{|u|^p}{p} + \frac{|v|^q}{q}$$

⋆ La fonction $\ln x$ est une fonction concave sur $\mathbb{R}^{*+}$, ce qui veut dire que, pour tout $x > 0$, tout $y > 0$ et tout $\lambda \in [0;1]$:

$$\ln(\lambda x + (1-\lambda)y) \geqslant \lambda\ln x + (1-\lambda)\ln y$$

- ⋆ En posant $\lambda = \dfrac{1}{p}$, nous avons $1 - \lambda = \dfrac{1}{q}$ et l'inégalité devient :

$$\ln\left(\frac{1}{p}x + \frac{1}{q}y\right) \geqslant \frac{1}{p}\ln x + \frac{1}{q}\ln y$$

- ⋆ En passant à l'exponentielle, nous avons

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} \geqslant x^{\frac{1}{p}} \times y^{\frac{1}{q}}$$

- ⋆ En posant, maintenant, $x = a^p$ et $y = b^q$, nous avons, pour tout $a > 0$ et tout $b > 0$,

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

- ⋆ Soient $u \in \mathbb{C}^*$ et $v \in \mathbb{C}^*$, nous avons $|u| > 0$ et $|v| > 0$ et nous pouvons appliquer l'inégalité précédemment trouvée :

$$|uv| \leqslant \frac{|u|^p}{p} + \frac{|v|^q}{q}$$

2. *Soit $a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n$, une famille de $2n$ nombres complexes. On pose :*

$$\alpha = \left[\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right]^{\frac{1}{p}} \qquad \beta = \left[\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q\right]^{\frac{1}{q}}$$

Et on suppose $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ Démontrer que, pour tout $i = 1, \cdots, n$, nous avons :

$$\frac{|a_i b_i|}{\alpha\beta} \leqslant \frac{|a_i|^p}{p \times \alpha^p} + \frac{|b_i|^q}{q \times \alpha^q}$$

Posons $A_i = \dfrac{a_i}{\alpha}$ et $B_i = \dfrac{b_i}{\beta}$. D'après l'inégalité de la question 1, nous avons :

$$|A_i B_i| \leqslant \frac{|A_i|^p}{p} + \frac{|B_i|^q}{q}$$

Maintenant, faisons quelques calculs :

$$|A_i B_i| = \frac{|a_i b_i|}{\alpha\beta} \qquad \frac{|A_i|^p}{p} = \frac{|a_i|^p}{p \times \alpha^p} \qquad \frac{|B_i|^q}{q} = \frac{|b_i|^q}{q \times \beta^q}$$

D'où, en remplaçant, nous obtenons :

$$\frac{|a_i b_i|}{\alpha\beta} \leqslant \frac{|a_i|^p}{p \times \alpha^p} + \frac{|b_i|^q}{q \times \alpha^q}$$

3. *Démontrer l'inégalité de Hölder :* $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i| \leqslant \left[\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right]^{\frac{1}{p}} \times \left[\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q\right]^{\frac{1}{q}}$

Pour chaque $i = 1, \cdots, n$, nous avons démontré l'inégalité :

$$\frac{|a_i b_i|}{\alpha\beta} \leqslant \frac{|a_i|^p}{p \times \alpha^p} + \frac{|b_i|^q}{q \times \alpha^q}$$

D'où, en sommant de 1 à n, nous avons :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{|a_i b_i|}{\alpha\beta} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{|a_i|^p}{p \times \alpha^p} + \sum_{i=1}^{n} \frac{|b_i|^q}{q \times \alpha^q}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\frac{1}{\alpha\beta}\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i| \leqslant \frac{1}{p \times \alpha^p}\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p + \frac{1}{q \times \alpha^q}\sum_{i=1}^{n} |a_i|^q$$

En faisant remarquer que $\alpha^p = \sum_{i=1}^{n} |a_i|^p$ et que $\beta^q = \sum_{i=1}^{n} |b_i|^q$, nous avons :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{|a_i b_i|}{\alpha\beta} \leqslant \frac{\alpha^p}{p\alpha^p} + \frac{\beta^q}{q\beta^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Ainsi, nous avons montré que $\sum_{i=1}^{n} \frac{|a_i b_i|}{\alpha\beta} \leqslant 1$ et donc que $\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i| \leqslant \alpha\beta$, c'est à dire

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i| \leqslant \left[\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right]^{\frac{1}{p}} \times \left[\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q\right]^{\frac{1}{q}}$$

Pour $p = q = 2$, nous obtenons l'inégalité de Schwarz

4. *Démontrer l'inégalité de Minkowski :* $\left[\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p\right]^{\frac{1}{p}} \leqslant \left[\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q\right]^{\frac{1}{q}}$

Pour tout $i = 1, \cdots, n$, nous commençons à écrire que $|a_i + b_i|^p = |a_i + b_i| \times |a_i + b_i|^{p-1}$.
Nous utilisons, maintenant, l'inégalité triangulaire $|a_i + b_i| \leqslant |a_i| + |b_i|$, de telle sorte que :

$$|a_i + b_i|^p = |a_i + b_i| \times |a_i + b_i|^{p-1} \leqslant (|a_i| + |b_i|)\, |a_i + b_i|^{p-1} = |a_i| \times |a_i + b_i|^{p-1} + |b_i| \times |a_i + b_i|^{p-1}$$

En passant aux sommations, nous avons :

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p \leqslant \sum_{i=1}^{n} |a_i| \times |a_i + b_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} |b_i| \times |a_i + b_i|^{p-1}$$

Etudions chaque somme :
$\longrightarrow$ En utilisant l'inégalité de Hölder, nous avons :

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i| \times |a_i + b_i|^{p-1} \leqslant \left[\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right]^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^{(p-1)q}\right]^{\frac{1}{q}}$$

— De même, nous avons :

$$\sum_{i=1}^{n} |b_i| \times |a_i + b_i|^{p-1} \leqslant \left[\sum_{i=1}^{n} |b_i|^p\right]^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^{(p-1)q}\right]^{\frac{1}{q}}$$

D'où, en ré-injectant dans l'inégalité de départ, nous avons :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p \leqslant & \left[\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right]^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^{(p-1)q}\right]^{\frac{1}{q}} + \left[\sum_{i=1}^{n} |b_i|^p\right]^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^{(p-1)q}\right]^{\frac{1}{q}} \\ = & \left(\left[\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\sum_{i=1}^{n} |b_i|^p\right]^{\frac{1}{p}}\right) \left[\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^{(p-1)q}\right]^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

Etudions maintenant $\left[\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^{(p-1)q}\right]^{\frac{1}{q}}$

Tout d'abord, de la relation $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, nous tirons $pq = p + q$ et donc que $(p-1)\,q = p$. Doù, nous pouvons écrire que :

$$\left[\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^{(p-1)q}\right]^{\frac{1}{q}} = \left[\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p\right]^{\frac{1}{q}}$$

D'autre part, de $\dfrac{1}{q} = 1 - \dfrac{1}{p}$, nous avons :

$$\left[\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p\right]^{\frac{1}{q}} = \left[\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p\right]^{1-\frac{1}{p}} = \left[\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p\right]\left[\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p\right]^{-\frac{1}{p}}$$

Nous avons donc :

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p \leqslant \left(\left[\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\sum_{i=1}^{n} |b_i|^p\right]^{\frac{1}{p}}\right)\left[\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p\right]\left[\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p\right]^{-\frac{1}{p}}$$

Ce qui est équivalent, par simplification à :

$$1 \leqslant \left(\left[\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\sum_{i=1}^{n} |b_i|^p\right]^{\frac{1}{p}}\right)\left[\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p\right]^{-\frac{1}{p}}$$

Ce qui nous donne l'inégalité demandée : $\left[\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p\right]^{\frac{1}{p}} \leqslant \left[\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q\right]^{\frac{1}{q}}$