Chapitre 5

Fonctions transcendantes

5.1 Fonctions Exponentielles

En L_0, nous avons vu la fonction exponentielle comme fonction réciproque de la fonction logarithme, la fonction logarithme étant elle-même définie par une intégrale
Nous nous proposons ici, de définir d'abord la fonction exponentielle (ou les fonctions exponentielles) comme solution d'une équation fonctionnelle. La fonction logarithme sera, cette fois ci, définie comme la fonction réciproque de la fonction exponentielle.

5.1.1 Problème

Nous souhaitons connaître toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, continues, dérivables en 0 et non nulles telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}$, nous ayions :

$$f(x+y) = f(x) \times f(y) \tag{5.1}$$

Remarque 1 :

De manière évidente, la fonction nulle $\mathcal{O}$ est solution de l'équation fonctionnelle du type 5.1

La fonction nulle est la fonction $\mathcal{O} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathcal{O}(x) = 0$

Pour nous mettre dans le cadre de l'équation fonctionnelle proposée, nous supposons désormais, f solution de 5.1 et non nulle
Nous allons progresser petit à petit dans la résolution de ce problème.

5.1.2 Utilisation de la seule continuité

1. **Si f est solution de 5.1 et non nulle alors $f(0) = 1$**

   Démonstration

   En effet :
   $\longrightarrow$ Nous avons $f(0+0) = f(0) \times f(0) \iff f(0) = f(0)^2$, d'où nous tirons $f(0) = 1$ ou $f(0) = 0$
   $\longrightarrow$ Si $f(0) = 0$, alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $f(x+0) = f(x) \times f(0) = 0$ et f est la fonction nulle ; il y a donc contradiction.
   $\longrightarrow$ Donc, $f(0) = 1$
2. **Si f est solution de 5.1 et non nulle alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) > 0$**

Démonstration

$\longrightarrow$ Nous allons d'abord démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \neq 0$
Supposons le contraire, c'est à dire qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = 0$
Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(x - x_0 + x_0) = f(x - x_0) \times f(x_0) = 0$.
Ce qui signifie que f est la fonction nulle. Contradiction.
Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \neq 0$

$\longrightarrow$ Nous allons démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) > 0$
Supposons le contraire, c'est à dire qu'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $f(A) \leqslant 0$
Pour plus de facilité, nous allons supposer $A > 0$, mais ce n'est pas le plus important *(la démonstration est semblable si nous supposons $A < 0$)*
Considérons l'intervalle $[0; A]$; sur cet intervalle, f est continue et nous avons $f(0) \times f(A) \leqslant 0$; d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x_0 \in [0; A]$ tel que $f(x_0) = 0$; ce qui est impossible.
Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) > 0$

3. **Si f est solution de 5.1 et non nulle alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = (f(x))^{-1}$**

Démonstration

Nous avons, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$1 = f(0) = f(x - x) = f(x) \times f(-x)$$

C'est à dire $f(x) \times f(-x) = 1 \Longleftrightarrow f(-x) = \dfrac{1}{f(x)} = (f(x))^{-1}$

4. **Si f est solution de 5.1 et non nulle alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, et tout $n \in \mathbb{N}$, $f(nx) = (f(x))^n$**

Démonstration

Nous allons faire cette démonstration par récurrence.
Soit donc $x \in \mathbb{R}$
$\longrightarrow$ C'est vrai pour $n = 0$, puisque $f(0 \times x) = f(0) = (f(x))^0$
$\longrightarrow$ Supposons que $f(nx) = (f(x))^n$ est vrai au rang n
$\longrightarrow$ Démontrons que la propriété est vraie au rang $n + 1$:

$$f((n+1)x) = f(nx + x) = f(nx) \times f(x) = (f(x))^n \times f(x) = (f(x))^{n+1}$$

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, et tout $n \in \mathbb{N}$, $f(nx) = (f(x))^n$

5. **Si f est solution de 5.1 et non nulle alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, et tout $n \in \mathbb{Z}$, $f(nx) = (f(x))^n$**

Démonstration

$\longrightarrow$ Nous venons de démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, et tout $n \in \mathbb{N}$, $f(nx) = (f(x))^n$
$\longrightarrow$ Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}^-$, c'est à dire que n est un entier naturel négatif.
Il existe $n' \in \mathbb{N}$ tel que $n = -n'$ et donc $f(nx) = f(-n'x)$
Nous avons démontré que $f(-n'x) = \dfrac{1}{f(n'x)}$.
Donc :

$$f(-n'x) = \frac{1}{f(n'x)} = \frac{1}{(f(x))^{n'}} = (f(x))^{-n'} = (f(x))^n$$

Ce que nous voulions
Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, et tout $n \in \mathbb{Z}$, $f(nx) = (f(x))^n$

6. **Si f est solution de 5.1 et non nulle alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, et tout $r \in \mathbb{Q}$, $f(rx) = (f(x))^r$**

Démonstration

Soient $x \in \mathbb{R}$, et $r \in \mathbb{Q}$. Il existe $n \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{N}^*$ tels que $r = \dfrac{n}{p}$

$\longrightarrow$ Nous montrons que si $p \in \mathbb{N}^*$, alors $f\left(\dfrac{1}{p} \times x\right) = (f(x))^{\frac{1}{p}}$

Nous avons : $f(x) = f\left(p \times \dfrac{1}{p} \times x\right) = \left(f\left(\dfrac{1}{p} \times x\right)\right)^p$

Donc, de $f(x) = \left(f\left(\dfrac{1}{p} \times x\right)\right)^p$, nous tirons $f\left(\dfrac{1}{p} \times x\right) = (f(x))^{\frac{1}{p}}$

$\longrightarrow$ Ainsi $f(rx) = f\left(\dfrac{n}{p} \times x\right) = f\left(n \times \dfrac{1}{p} \times x\right) = \left(f\left(\dfrac{1}{p} \times x\right)\right)^n = (f(x))^{\frac{n}{p}} = (f(x))^r$

7.

(a) Pour tout $r \in \mathbb{Q}$, nous avons, en particulier, $f(r) = f(1)^r$

(b) En posant $a = f(1)$, nous avons $f(r) = a^r$

Justification

(a) Dans l'égalité $f(rx) = (f(x))^r$, il suffit de faire $x = 1$

(b) D'autre part, comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $f(x) > 0$, nous avons, en particulier $a > 0$

8. **Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe une suite de rationnels $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} r_n = x$ nous posons :**

$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} f(r_n) \text{ et } a^x = \lim_{n \to +\infty} a^{r_n}$$

Justification

f est continue sur $\mathbb{R}$, et de cette continuité, nous pouvons écrire, d'après 3.4.6, $\lim\limits_{n \to +\infty} f(r_n) = f\left(\lim\limits_{n \to +\infty} r_n\right)$

9. **En conclusion, les fonctions continues $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, non nulles telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}$, nous ayions : $f(x+y) = f(x) \times f(y)$ sont les fonctions du type $f(x) = a^x$ où $a > 0$**

5.1.3 Etude de la dérivabilité

Soit f, solution de 5.1 et non nulle. Alors :

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$

2. Sa dérivée vérifie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = kf(x)$ où $k = f'(0)$

3. f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons : $f^{(n]}(x) = k^n f(x)$

Démonstration

1. Montrons que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en entier

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, et montrons que f est dérivable en x_0. Etudions le rapport $\dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$. Nous avons donc :

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{f(x_0)f(h) - f(x_0)}{h} = \frac{f(x_0)(f(h) - 1)}{h} = f(x_0) \times \frac{(f(h) - f(0))}{h}$$

Donc,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} f(x_0) \times \frac{(f(h) - f(0))}{h} = f(x_0) \times \lim_{h \to 0} \frac{(f(h) - f(0))}{h} = f(x_0) \times f'(0)$$

Ainsi, f est dérivable en tout $x_0 \in \mathbb{R}$ et nous avons $f'(x_0) = f'(0) f(x_0)$

2. **Une autre démonstration du résultat $f'(x) = kf(x)$, en supposant f dérivable sur $\mathbb{R}$**
   On appelle $h(y) = f(x+y) = f(x) \times f(y)$.
   h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h'(y) = f'(x+y) = f(x) \times f'(y)$
   Pour $x \in \mathbb{R}$ et $y = 0$, nous avons $f'(x+0) = f(x) \times f'(0) \Longleftrightarrow f'(x) = f'(0) \times f(x)$
   Ce que nous voulions
3. Du résultat précédent, nous avons $f''(x) = k \times f'(x) = k^2 f(x)$. Le résultat se démontre par une récurrence simple.
   - ▷ C'est vrai pour $n = 0$, puisque $f^{[0]}(x) = f(x) = k^0 f(x)$
   - ▷ Supposons qu'à l'ordre n, nous ayions $f^{[n]}(x) = k^n f(x)$
   - ▷ Démontrons que nous avons la propriété à l'ordre $n+1$
     La fonction f étant dérivable sur $\mathbb{R}$, nous avons :
   $$f^{(n+1]}(x) = \left(f^{(n]}(x)\right)' = (k^n f(x))' = k^n f'(x) = k^n \times kf(x) = k^{n+1} f(x)$$
   Donc, f est dérivable pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons : $f^{(n]}(x) = k^n f(x)$

5.1.4 Proposition : étude de la réciproque

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui vérifie :

$$\begin{cases} f'(x) = kf(x) & \textbf{pour tout } x \in \mathbb{R} \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}$, nous avons $f(x+y) = f(x) \times f(y)$

Démonstration

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ et nous considérons la fonction de la variable x définie par :$\varphi(x) = \dfrac{f(x+y)}{f(x)}$.
Alors, la dérivée φ' est donnée par :

$$\varphi'(x) = \frac{f'(x+y) f(x) - f'(x) f(x+y)}{(f(x))^2} = \frac{kf(x+y) f(x) - kf(x) f(x+y)}{(f(x))^2} = 0$$

Cette dérivée est donc nulle sur $\mathbb{R}$ en entier et donc, φ est conctante sur $\mathbb{R}$ en entier.
Nous avons, en particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \varphi(0)$. Donc :

$$\frac{f(x+y)}{f(x)} = \frac{f(y)}{f(0)} = f(y) \Longleftrightarrow f(x+y) = f(x) \times f(y)$$

Remarque 2 :

Ainsi, rechercher une fonction différentiable sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x+y) = f(x) \times f(y)$ est équivalent à rechercher une fonction différentiable telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = kf(x)$ et $f(0) = 1$

5.1.5 Utilisation de la formule de Taylor

$\longrightarrow$ Soit $x \in \mathbb{R}$. Nous pouvons appliquer, sur le segment $[0; x]$ (ou $[x; 0]$) la formule de Taylor jusqu'à un ordre arbitraire n :

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2} f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x) \text{ où } 0 < \theta < 1$$

$\longrightarrow$ Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $f^{(n]}(0) = k^n f(0) = k^n$, la formule de Taylor devient :

$$f(x) = 1 + kx + \frac{(kx)^2}{2} + \cdots + \frac{(kx)^n}{n!} + \frac{(kx)^{n+1}}{(n+1)!} f(\theta x) \text{ où } 0 < \theta < 1$$

$\longrightarrow$ Pour $k=1$, nous appelons $f(x)=\exp(x)$, et donc $f'(x)=f(x)$ et $f'(0)=\cdots=f^{(n]}(0)=1$
Ces considérations nous amènent à étudier la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$g_n(x)=1+x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^n}{n!}=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$$

5.1.6 Théorème

On considère la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par : $g_n(x)=1+x+\dfrac{x^2}{2}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$

La suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout intervalle $[0;A]$ où $A>0$

Démonstration

Nous allons faire 2 démonstrations de ce résultat

1. **Première démonstration**
   (a) Montrons que la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$

   Soit $x\geqslant 0$
   $\longrightarrow$ Alors, la suite $(g_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante
   En effet :

$$g_{n+1}(x)-g_n(x)=\frac{x^{k+1}}{(n+1)!}\geqslant 0$$

   Nous avons donc $g_{n+1}(x)\geqslant g_n(x)$ et la suite $(g_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est bien croissante
   $\longrightarrow$ Montrons que la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée
   Soit $p\in\mathbb{N}$ tel que $p>2x$, ou, ce qui est équivalent, $x<\dfrac{p}{2}$; on peut donc prendre $p=[2x]+1$; c'est à dire que p est fixé.
   - Pour tout $k\geqslant p$, nous avons :

$$\frac{x^k}{k!}=\frac{x^p}{p!}\times\frac{x^{k-p}}{(p+1)(p+2)\cdots(k-1)k}$$

   De plus, $x^{k-p}<\left(\dfrac{p}{2}\right)^{k-p}=p^{k-p}\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-p}$ et d'autre part :

$$\frac{p^{k-p}}{(p+1)(p+2)\cdots(k-1)k}=\frac{p}{p+1}\times\frac{p}{p+2}\times\cdots\times\frac{p}{k-1}\times\frac{p}{k}<1$$

   Puisque, pour tout $j=1,\cdots,k-p$, nous avons $\dfrac{p}{p+j}<1$. D'où nous pouvons tirer :

$$\frac{x^k}{k!}\leqslant\frac{x^p}{p!}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{k-p}\times\frac{p^{k-p}}{(p+1)(p+2)\cdots(k-1)k}\leqslant\frac{x^p}{p!}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{k-p}$$

   Ainsi, pour tout $k\geqslant p$, nous avons $\dfrac{x^k}{k!}\leqslant\dfrac{x^p}{p!}\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-p}$
   - Maintenant, pour tout $n\geqslant p$, nous avons :

$$\begin{aligned}
g_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}= &\sum_{k=0}^{p-1}\frac{x^k}{k!}+\sum_{k=p}^{n}\frac{x^k}{k!}\\
\leqslant &\sum_{k=0}^{p-1}\frac{x^k}{k!}+\sum_{k=p}^{n}\frac{x^p}{p!}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{k-p}\\
\leqslant &\sum_{k=0}^{p-1}\frac{x^k}{k!}+\frac{x^p}{p!}\sum_{k=p}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-p}=g_{p-1}(x)+\frac{x^p}{p!}\times\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-p+1}}{1-\frac{1}{2}}\right)\\
\leqslant &\ g_{p-1}(x)+2\frac{x^p}{p!}
\end{aligned}$$

$\longrightarrow$ La suite numérique $(g_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante et majorée et converge vers une limite que nous notons $g(x)$

$\longrightarrow$ Cette limite est donnée par $g(x) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \{g_n(x)\}$, et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $g_n(x) < g(x)$

$\longrightarrow$ Mieux, nous avons, pour tout $n \geqslant p$, $g(x) < g_{p-1}(x) + 2\dfrac{x^p}{p!}$

Remarque

Cette majoration dépend de $x \geqslant 0$ et n'est donc pas uniforme sur $\mathbb{R}$

L'inégalité est en particulier vraie pour $p = n$, où nous avons $g(x) < g_{n-1}(x) + 2\dfrac{x^n}{n!}$ et donc :

$$g_n(x) < g(x) < g_{n-1}(x) + 2\frac{x^n}{n!} \iff g_n(x) < g(x) < g_n(x) + \frac{x^n}{n!} \iff 0 < g(x) - g_n(x) < \frac{x^n}{n!}$$

(b) Montrons que la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout intervalle $[0; A]$ où $A > 0$

Nous avons toujours $0 < g(x) - g_n(x) < \dfrac{x^n}{n!}$ et donc, pour tout $x \in [0; A]$, nous avons $\dfrac{x^n}{n!} \leqslant \dfrac{A^n}{n!}$.

Nous en déduisons que, pour tout $x \in [0; A]$, nous avons $0 < g(x) - g_n(x) < \dfrac{A^n}{n!}$, et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{A^n}{n!} = 0$

Donc, pour tout $x \in [0; A]$, nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} (g(x) - g_n(x)) = 0$, ce qui montre que la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout intervalle $[0; A]$ où $A > 0$

2. **Seconde démonstration : la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément de Cauchy sur $[0; A]$ où $A > 0$**

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$, nous avons $g_{n+p}(x) - g_n(x) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=1}^{p} \frac{x^{n+k}}{(n+k)!}$

$\dfrac{x^{n+k}}{(n+k)!} = \dfrac{x^n}{n!} \times \dfrac{x^k}{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}$

Soit $n > 2A \iff A < \dfrac{n}{2}$

Comme $x \leqslant A$, nous avons aussi $x \leqslant \dfrac{n}{2}$ et donc :

$$\frac{x^k}{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)} \leqslant \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^k}{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)} = \left(\frac{1}{2}\right)^k \times \frac{n^k}{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}$$

Comme tout à l'heure, nous avons $\dfrac{n^k}{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)} \leqslant 1$ et donc

$$\frac{x^k}{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

D'où :

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=1}^{p} \frac{x^{n+k}}{(n+k)!} &= \frac{x^n}{n!} \sum_{k=1}^{p} \frac{x^k}{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)} \\ &\leqslant \frac{x^n}{n!} \sum_{k=1}^{p} \left(\frac{1}{2}\right)^k \\ &\leqslant \frac{2x^n}{n!} \leqslant \frac{2A^n}{n!}\end{aligned}$$

Comme $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2A^n}{n!} = 0$, alors, pour tout $x \in [0; A]$ $\lim\limits_{n\to\infty} g_{n+p}(x) - g_n(x) = 0$.

Ce qui montre que la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément de Cauchy sur $[0; A]$ et donc uniformément convergente sur $[0; A]$

5.1.7 Définition

On appelle e le nombre $g(1)$. Ainsi : $e = \lim\limits_{n \to +\infty} g_n(1) = \lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$

Remarque 3 :

1. Nous avons démontré que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \geqslant 0$, nous avons $0 < g(x) - g_n(x) < \frac{x^n}{n!}$, en particulier pour $x = 1$ où nous obtenons l'inégalité $0 < e - g_n(1) < \frac{1}{n!}$, ce qui nous autorise à donner une approximation décimale de e ; nous avons $e \simeq 2,718$
2. Bien entendu, comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $g_n(0) = 1$, nous avons $g(0) = 1$

5.1.8 Proposition

Le nombre e n'est pas rationnel, cest à dire $e \notin \mathbb{Q}$

Démonstration

D'après les résultats précédents, nous avons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < e - g_n(1) < \frac{1}{n!}$.
Supposons que e soit rationnel, c'est à dire $e \in \mathbb{Q}$ et posons $e = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.
L'inégalité $0 < e - g_n(1) < \frac{1}{n!}$ est vrai aussi pour $n = q$ et nous avons donc :

$$0 < e - g_q(1) < \frac{1}{q!} \Longleftrightarrow 0 < \frac{p}{q} - \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} < \frac{1}{q!}$$

Multiplions cette inégalité par $(q-1)!$; nous obtenons alors :

$$0 < p \times (q-1)! - q! \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} < 1$$

- Nous avons $p \times (q-1)! \in \mathbb{N}$
- Ensuite : $q! \sum\limits_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} = q! \left(1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{q!}\right) = 2 \times q! + \frac{q!}{2} + \frac{q!}{3!} + \cdots + 1$

  Et donc, $q! \sum\limits_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} \in \mathbb{N}$

Donc $p \times (q-1)! - q! \sum\limits_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} \in \mathbb{N}$, mais, il n'y a pas d'entier strictement compris entre 0 et 1

Donc, $e \notin \mathbb{Q}$

5.1.9 Continuité

g est une fonction continue sur $\mathbb{R}$

Démonstration

C'est une démonstration simple.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction g_n est un polynôme de degré n, donc continu.
La suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fonctions qui converge uniformément vers une fonc g. g est donc une fonction continue.

5.1.10 Dérivabilité

La fonction g est dérivable et sa dérivée vérifie $g' = g$

Démonstration

C'est une application directe de 4.6.2

1. La suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions continues de classe $\mathcal{C}^1$ qui converge uniformément, donc simplement vers g
2. Etudions la dérivée :
$$g'_n(x) = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right)' = \sum_{k=0}^{n} \frac{kx^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} = g_{n-1}(x)$$
La suite de fonctions $(g'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers g
3. Et donc, d'après 4.6.2, nous avons $g' = g$

5.1.11 Expression de g

1. **Pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $g(x) = e^x$**
2. **Pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $g'(x) = g(x) = e^x$**

Démonstration

Nous avons établi que g est dérivable sur $\mathbb{R}$, que $g' = g$ et que $g(0) = 1$.
D'après la réciproque 5.1.4, nous avons $g(x+y) = g(x)g(y)$.
Or, toutes ces fonctions sont du type $g(x) = a^x$ avec $a = g(1)$. Ici, nous avons $g(1) = e$.
Donc, $g(x) = e^x$

5.1.12 Propriété de $g(x) = e^x$

1. **Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$ et $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$**
2. **Nous avons $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$**
3. **La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$**
4. **La fonction exponentielle est une bijection continue de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^{*+}$**
5. **La fonction e^x est convexe**

Le graphe de la fonction exponentielle est sur la figure 5.1

Démonstration

Voilà un énoncé qui s'apparente à un enfonçage de portes ouvertes ; il m'a, par contre, semblé nécessaire de résumer en cet énoncé des propriétés très importantes

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$ et $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$

   Cette propriété résulte de l'étude précédente des fonctions vérifiant $g(x+y) = g(x)g(y)$

2. Nous avons $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $g_n(x) < g(x) = e^x$, nous avons, en particulier, $\dfrac{x^n}{n!} < e^x$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^n}{n!} = +\infty$, nous déduisons $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

   D'autre part, de l'égalité $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$, nous pouvons écrire : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0$, puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

3. La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

   Evidemment, puisque sa dérivée est e^x et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$

4. La fonction exponentielle est une bijection continue de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^{*+}$

   La fonction exponentielle étant croissante et continue est donc bijective.

5. La fonction e^x est convexe

   La dérivée seconde de e^x étant e^x, toujours positive sur $\mathbb{R}$, on en déduit la convexité

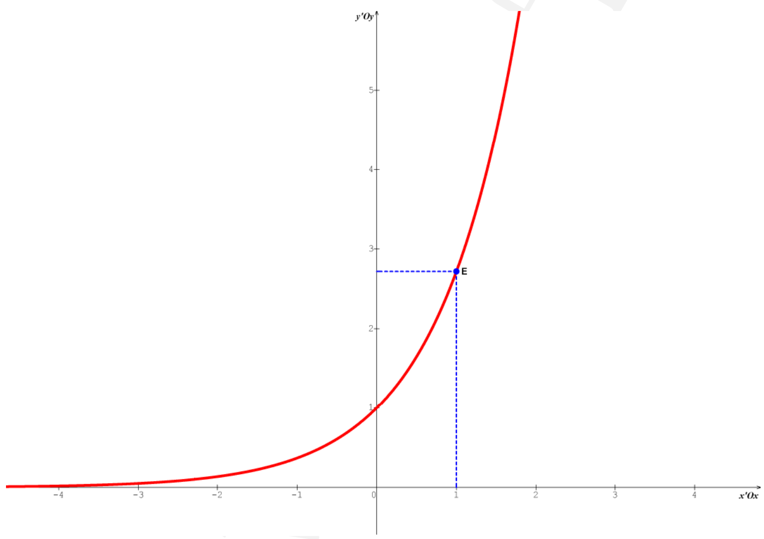

FIGURE 5.1 – Le graphe de la fonction exponentielle e^x

Remarque 4 :

Soit u une fonction dérivable définie sur un domaine $D \subset \mathbb{R}$. Par le théorème de la dérivée des fonctions composées, nous avons :

$$\left(e^{u(x)}\right)' = u'(x)\, e^{u(x)}$$

5.1.13 Proposition

Toutes les fonctions dérivables solutions de l'équation $f(x+y) = f(x)f(y)$ sont les fonctions exponentielles du type $f(x) = e^{kx}$ où $k \in \mathbb{R}$

Démonstration

On a démontré que toutes les fonctions continues et dérivables telles que $f(x+y) = f(x)f(y)$ sont du type $f(x) = a^x$ avec $a > 0$ et $f(1) = a$.
La fonction $g(x) = e^x$ étant bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^{*+}$, pour tout $a > 0$, il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $a = e^k$ et donc $f(x) = a^x = \left(e^k\right)^x = e^{kx}$

Remarque 5 :

En guise de conclusion, faisons une petite intrusion en Algèbre.
En fait, la fonction $\exp(x) = e^x$ est un isomorphisme continu du groupe $(\mathbb{R}, +)$ dans le groupe $(\mathbb{R}^{*+}, \times)$ puisque, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}$, $\exp(x+y) = \exp x \times \exp y$

5.1.14 Quelques exercices

Exercice 1 :

1. Etudier la continuité de $f(x) = \dfrac{1}{1 - e^{\frac{1}{x}}}$
2. Etudier la continuité et faire le graphe de la fonction $g(x) = e^{\frac{1}{x}}$

Exercice 2 :

Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $|e^x - 1 - x| \leqslant \dfrac{x^2}{2} e^{|x|}$

Exercice 3 :

Soit $u_0 \in \mathbb{R}$; nous considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par son premier terme u_0 et par $u_{n+1} = \dfrac{e^{-u_n}}{n+1}$.
Donner la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Exercice 4 :

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = x^{n-1} e^{\frac{1}{x}}$. Démontrer que la dérivée n-ième de f_n est $f_n^{(n)}(x) = (-1)^n x^{-n-1} e^{\frac{1}{x}}$

Exercice 5 :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = e^{x\cos\alpha}\cos(x\sin\alpha)$. Démontrer que la dérivée n-ième de f est donnée par $f^{(n)}(x) = e^{x\cos\alpha}\cos(x\sin\alpha + n\alpha)$