5.2 Fonctions Logarithmes

5.2.1 La fonction logarithme népérien

On définit la fonction logarithme népérien comme la fonction réciproque de la fonction exponentielle $\exp(x) = e^x$, c'est à dire :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \ln : \mathbb{R}^{*+} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln x \end{array}\right.$$

Justification :

Cette fonction réciproque existe puisque nous avons démontré que la fonction $\exp(x) = e^x$ est continue et croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^{*+}$.

5.2.2 Propriété de la fonction logarithme népérien

On considère la fonction logarithme népérien $\ln : \mathbb{R}^{*+} \longrightarrow \mathbb{R}$. Alors :

1. **Nous avons l'équivalence suivante :**

$$y = \ln x \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x > 0 \textbf{ et } y \in \mathbb{R} \\ x = e^y \\ \ln 1 = 0 \end{array}\right.$$

2. **Pour tout $a > 0$ et tout $b > 0$, nous avons $\ln ab = \ln a + \ln b$.**
   En particulier, $\ln \dfrac{1}{a} = -\ln a$ et, pour tout rationnel $r \in \mathbb{Q}$, et tout $a > 0$, $\ln a^r = r \ln a$
3. **La dérivée de $\ln$ est donnée par $\ln' x = \dfrac{1}{x}$**

Démonstration

1. La démonstration du point 1 est l'application simple de ce qu'est une fonction réciproque
2. • Soient $a > 0$ et $b > 0$. Alors :

$$e^{\ln a + \ln b} = e^{\ln a} \times e^{\ln b} = ab \text{ et } ab = e^{\ln(ab)}$$

   Nous avons donc $e^{\ln a + \ln b} = e^{\ln(ab)}$, et de la bijection de la fonction exponentielle nous avons $\ln ab = \ln a + \ln b$

   • Soit $a > 0$; clairement : $0 = \ln 1 = \ln\left(a \times \dfrac{1}{a}\right) = \ln a + \ln \dfrac{1}{a}$

   Donc, $\ln a + \ln \dfrac{1}{a} = 0$, et donc $\ln \dfrac{1}{a} = -\ln a$

   • Nous avons, pour tout $y \in \mathbb{R}$ et tout $r \in \mathbb{Q}$:

$$\exp(ry) = (\exp(y))^r \Longleftrightarrow e^{ry} = (e^y)^r$$

   Donc, pour tout $x > 0$, nous avons :

$$\exp(r \ln x) = (\exp(\ln x))^r \Longleftrightarrow \exp(r \ln x) = x^r$$

   En passant au logarithme, nous avons donc :

$$\ln(\exp(r \ln x)) = \ln x^r \Longleftrightarrow \ln x^r = r \ln x$$

3. La fonction exponentielle étant une fonction continue, monotone, croissante et différentiable, sa fonction réciproque ln est, elle aussi continue, monotone, croissante et différentiable.
   D'après les théorèmes de dérivation des fonctions réciproques, nous avons, pour tout $x > 0$:

$$\ln' x = \frac{1}{\exp' \circ \ln x} = \frac{1}{\exp \circ \ln x} = \frac{1}{x}$$

Remarque 6 :

Intrusion en algèbre : la fonction ln est l'isomorphisme de groupe réciproque de l'isomorphisme de groupe exp et les propriétés exposées en 5.2.2 ; les démonstrations de 5.2.2 sont la copie des démonstrations des propriétés de tous les isomorphismes réciproques.

Remarque 7 :

Soit u une fonction dérivable définie sur un domaine $D \subset \mathbb{R}$ et telle que, pour tout $x \in D$ nous ayons $u(x) > 0$. Par le théorème de la dérivée des fonctions composées, nous avons :

$$(\ln u(x))' = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

Exemple 1 :

Soit f la fonction définie par :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \ln|x| \end{array} \right.$$

Cette fonction est bien définie sur $\mathbb{R}^*$, car, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $|x| > 0$. Par les théorèmes de composition des fonctions continues, f est continue sur $\mathbb{R}^*$.
D'autre part, $\lim\limits_{x \to 0} \ln|x| = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \ln|x| = +\infty$

Etude des dérivées

- Si $x > 0$, alors $f(x) = \ln x$ et $f'(x) = \dfrac{1}{x}$
- Si $x < 0$, alors $f(x) = \ln(-x)$ et $f'(x) = \dfrac{-1}{-x} = \dfrac{1}{x}$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = (\ln|x|)' = \dfrac{1}{x}$

Remarque 8 :

Soit u une fonction dérivable définie sur un domaine $D \subset \mathbb{R}$ et telle que, pour tout $x \in D$ nous ayons $u(x) \neq 0$. Par le théorème de la dérivée des fonctions composées, nous avons :

$$(\ln|u(x)|)' = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

5.2.3 Graphe de $\ln x$

1. **Nous avons** $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ **et** $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$
2. **La fonction** $\ln x$ **est croissante et concave, car sa dérivée seconde est donnée par** $\dfrac{-1}{x^2}$**, laquelle est négative.**

5.2.4 Quelques limites remarquables

1. **Pour tout** $x > 0$**,nous avons** $\ln x < \sqrt{x}$
2. **Pour tout** $x \geqslant 1$**, nous avons** $0 \leqslant \dfrac{\ln x}{x} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{x}}$
3. **Nous avons** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$
4. **Nous avons** $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x \ln x = 0$

Démonstration

1. $\longrightarrow$ Si nous avons $0 < x \leqslant 1$, il n'y a pas de problème, puisque dans ce cas, nous avons $\ln x \leqslant 0$ et $\sqrt{x} \geqslant 0$. La question est donc résolue
   $\longrightarrow$ Supposons $x \geqslant 1$.
   Nous allons étudier les variations de la fonction $f(x) = \ln x - \sqrt{x}$.
   La dérivée de f est donnée par $f'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{2-\sqrt{x}}{2x}$. Le signe de la dérivée ne dépend donc que de celui de $2 - \sqrt{x}$.
   D'où le tableau de variations :

x	0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	$2\ln 2 - 2$	$\searrow$	

   Ce qui veut dire que, pour tout $x \geqslant 1, f(x) = \ln x - \sqrt{x} \leqslant 2\ln 2 - 2$. Or, Comme $1 < 2 < e$, nous avons $\ln 2 < 1$ et donc $2\ln 2 - 2 < 0$.
   Nous en déduisons donc que, pour $x \geqslant 1$, $\ln x < \sqrt{x}$
   Donc, pour tout $x > 0$, $\ln x < \sqrt{x}$
2. Nous venons de démontrer que pour $x \geqslant 1$, $0 \leqslant \ln x < \sqrt{x}$; en divisant par x, nous obtenons $0 \leqslant \dfrac{\ln x}{x} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, et comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$, par les théorèmes de limites par encadrement, nous obtenons $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$
   Nous pouvons donc dire que la direction asymptotique du graphe de $\ln x$ est l'axe des abscisses $x'Ox$
3. Faisons le changement de variable $X = \dfrac{1}{x}$. Nous avons alors :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x \ln x = \lim_{X \to +\infty} \frac{-\ln X}{X} = 0$$

   Ce que nous voulions.

Graphe de $\ln x$

5.2.5 Exercices

Exercice 6 :

Calculez les dérivées des fonctions f, g et h suivantes :

1. $f(x) = \ln(\ln x)$
2. $g(x) = \arctan(\ln x)$
3. $h(x) = \ln\sqrt{1 - 2\sin^2 x}$

Exercice 7 :

1. Soit f la fonction définie pour $x > 1$ par $f(x) = \ln(\ln x)$. Montrer qu'elle est concave.
2. En déduire l'inégalite vraie pour $a > 1$ et $b > 1$: $\ln\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \geqslant \sqrt{\ln a \ln b}$

Exercice 8 :

Quelques inégalités

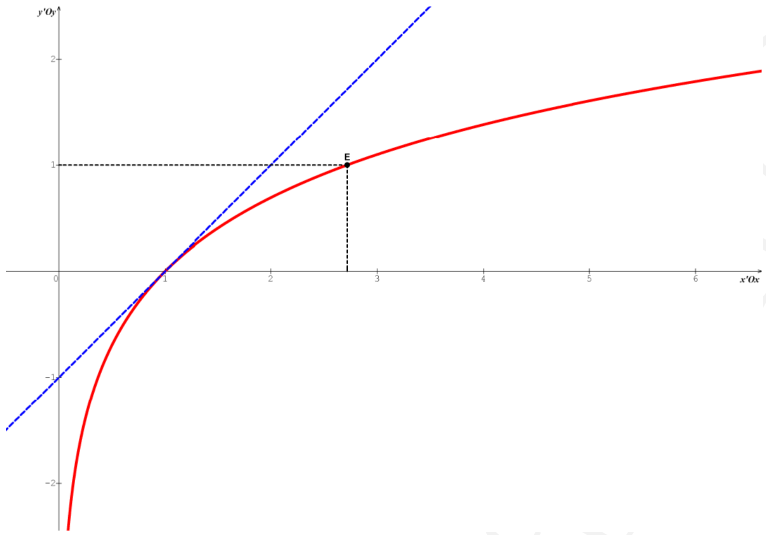

FIGURE 5.2 – Le graphe de la fonction logarithme népérien $\ln x$

1. Démontrer que, pour $x > 0$, nous avons $\ln x \leqslant \dfrac{x}{e}$
2. Démontrer que, pour $x > -1$, $\dfrac{x}{x+1} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$
3. Démontrer que, pour tout a et b tels que $0 < b \leqslant a$, nous avons $\dfrac{a-b}{a} \leqslant \ln\left(\dfrac{a}{b}\right) \leqslant \dfrac{a-b}{b}$

Exercice 9 :

Etudier les fonctions suivantes et les représenter graphiquement :

1. $f(x) = \ln(\sin x)$
2. $g(x) = \ln\left(\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\right)$

5.2.6 Fonctions exponentielles de base a où $a > 0$

- Nous avons démontré que toutes les fonctions continues et différentiables vérifiant $f(x+y) = f(x) \times f(y)$ sont toutes du type $f(x) = a^x$ où $a = f(1) > 0$
- La fonction exponentielle $\exp(x) = e^x$ étant continue, croissante et donc bijective, il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $a = e^k$, c'est à dire que $k = \ln a$
- **Nous posons, par définition, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $a > 0$, $a^x = e^{x \ln a}$**

Remarque 9 :

De $a^x = e^{x \ln a}$, nous tirons, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ln a^x = x \ln a$

5.2.7 Propriétés de la fonction exponentielle de base $a > 0$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, tout $y \in \mathbb{R}$ et tout $a > 0$, nous avons :

1. $a^{x+y} = a^x \times a^y$
2. $(a^x)^y = a^{xy}$
3. $(ab)^x = a^x \times b^x$

Démonstration

1. Par définition, $a^{x+y} = e^{(x+y)\ln a} = e^{x \ln a + y \ln a} = e^{x \ln a} \times e^{y \ln a} = a^x \times a^y$
2. Toujours par définition $(a^x)^y = e^{y \ln a^x} = e^{xy \ln a} = a^{xy}$
3. De même, $(ab)^x = e^{x \ln ab} = e^{x(\ln a + \ln b)} = e^{x \ln a} \times e^{x \ln b} = a^x \times b^x$

5.2.8 Proposition

Soit $a > 0$

1. **La dérivée de la fonction** $f(x) = a^x$ **est** $f'(x) = \ln a \times a^x$
2. **Si** $a > 1$
   - ▷ **La fonction** $f(x) = a^x$ **est croissante et continue donc bijective**
   - ▷ **Nous avons** $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$ **et** $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$
3. **Si** $a < 1$
   - ▷ **La fonction** $f(x) = a^x$ **est décroissante et continue donc bijective**
   - ▷ **Nous avons** $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$ **et** $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$
4. **Pour** $a > 1$ **et**$a < 1$**, la fonction** $f(x) = a^x$ **est convexe sur** $\mathbb{R}$

Démonstration

Cette proposition est simple à démontrer et sa démonstration prend comme point de départ l'identité $a^x = e^{x \ln a}$; ensuite, tout en découle.
Pour démontrer la convexité, il suffit de calculer la dérivée seconde. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $f''(x) = (\ln a)^2 \times a^x$, laquelle est positive sur $\mathbb{R}$. f est donc convexe sur $\mathbb{R}$

Remarque 10 :

Il est clair que si $a = 1$, la fonction f est contante : pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $f(x) = 1$

Graphe de la fonction a^x

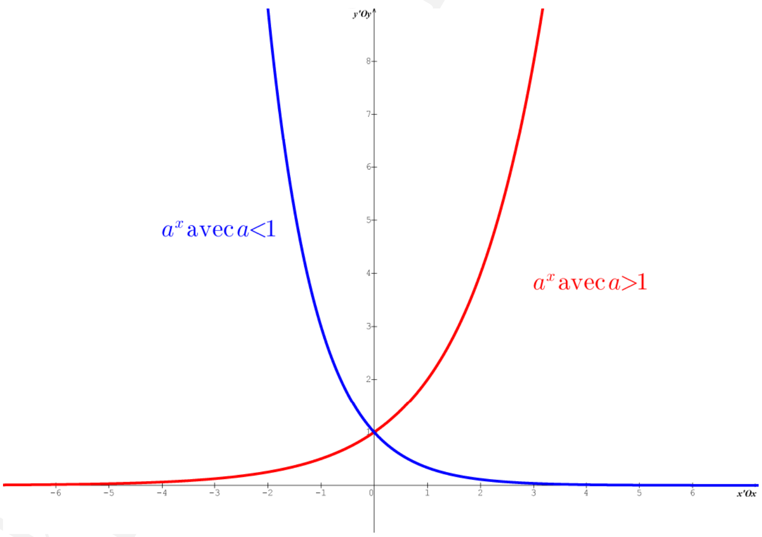

FIGURE 5.3 – Les graphes des fonctions du type $f(x) = a^x$ avec $a > 1$ et $a < 1$

5.2.9 Proposition : limites remarquables

1. **Nous avons** $\lim\limits_{h \to 0} (1+h)^{\frac{1}{h}} = e$ **et** $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$
2. **La suite de fonctions** $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ **définie pour tout** $x \in \mathbb{R}$ **par** $f_n(x) = \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$ **converge simplement vers la fonction** $f(x) = e^x$

Démonstration

1. En utilisant le rapport de dérivation, nous avons $\lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$. Or, $(1+h)^{\frac{1}{h}} = e^{\frac{\ln(1+h)}{h}}$.
   En utilisant les théorèmes sur la composition des applications, nous avons $\lim_{h\to 0} e^{\frac{\ln(1+h)}{h}} = \lim_{h\to 0} (1+h)^{\frac{1}{h}} = e$. Ce que nous voulions.
   Et, en faisant le changement de variables $h = \frac{1}{x}$, nous avons $\lim_{x\to +\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{h\to 0} (1+h)^{\frac{1}{h}} = e$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$.
   Nous avons $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}$. Intéressons nous à l'expression $n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)$:

$$\begin{aligned} n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) &= n \times \frac{\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}} \times \frac{x}{n} \\ &= x \times \frac{\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}} \end{aligned}$$

   Or, $\lim_{n\to +\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}} = 1$ et donc $\lim_{n\to +\infty} x \times \frac{\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}} = \lim_{n\to +\infty} n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) = x$

Exercice 10 :

Soit $a > 0$. Trouver toutes les valeurs de x et y strictement positives vérifiant le système

$$\left\{ \begin{aligned} x^y &= y^x \\ y &= ax \end{aligned} \right.$$

Exercice 11 :

Soit $a > 0$. Donner $\lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h}$ puis $\lim_{k\to \pm\infty} k\left(a^{\frac{1}{k}} - 1\right)$

Exercice 12 :

Nous considérons la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_n = \frac{n^n}{n!}$. Donner $\lim_{n\to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$

5.2.10 Fonction logarithme de base a avec $a > 0$ et $a \neq 1$

Soit $a > 0$ avec $a \neq 1$

1. **On appelle fonction logarithme de base a la fonction réciproque de la fonction exponentielle de base a notée $\log_a(x)$. Nous avons donc :**

$$y = a^x \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y > 0 \text{ et } x \in \mathbb{R} \\ x = \log_a(y) \end{array} \right.$$

2. **Pour $a > 0$ et $a \neq 1$ nous avons $\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$**
3. **Pour tout $x > 0$ et tout $y > 0$, nous avons $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$**
4. **La fonction $\log_a(x)$ est :**
   (a) **Admet pour dérivée première $\log_a'(x) = \frac{1}{x\ln a}$**
   (b) **Croissante et concave si $a > 1$**
   (c) **Décroissante et convexe si $a < 1$**

Démonstration

1. Comme la fonction a^x est continue et strictement monotone, elle est bijective ; d'où l'existence de $\log_a(x)$
2. Pour $a > 0$ et $a \neq 1$, nous avons $y = \log_a(x) \iff x = a^y = e^{y \ln a}$.
   Donc $\ln x = y \ln a \iff y = \dfrac{\ln x}{\ln a} = \log_a(x)$. Ce que nous voulions
3. Pour démontrer que pour tout $x > 0$ et tout $y > 0$, nous avons $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$, il suffit d'utiliser le fait que $\log_a(x) = \dfrac{\ln x}{\ln a}$ et les propriétés de la fonction logarithme.
4. Il est évident que la dérivée de $\log_a(x)$ est $\log_a'(x) = \dfrac{1}{x \ln a}$ et la dérivée seconde est $\log_a''(x) = \dfrac{-1}{x^2 \ln a}$
   (a) Donc, si $a > 1$, alors $\ln a > 0$ et donc $\log_a'(x) > 0$ et $\log_a''(x) < 0$ d'où $\log_a(x)$ est bien croissante et concave.
   (b) Et si $a < 1$, alors $\ln a < 0$ et donc $\log_a'(x) < 0$ et $\log_a''(x) V0$ d'où $\log_a(x)$ est bien décroissante et convexe.

Graphe de la fonction $\log_a(x)$

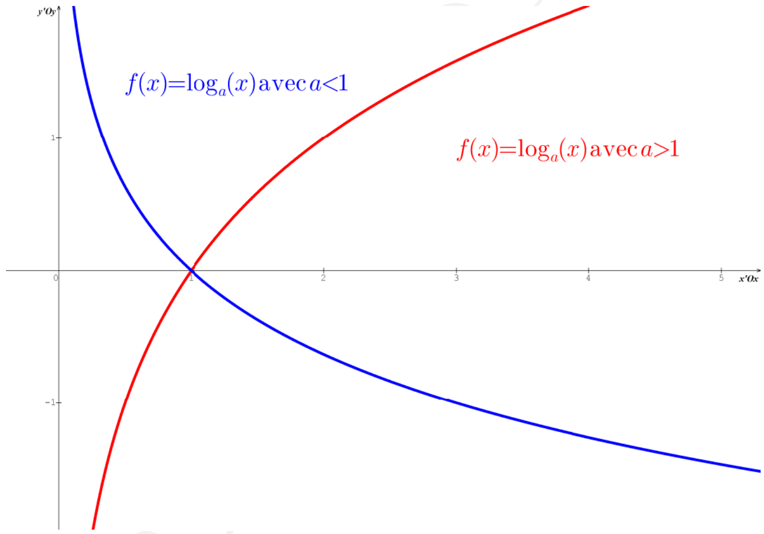

FIGURE 5.4 – Le graphe de la fonction $\log_a(x)$ pour $a > 1$ et $a < 1$

5.2.11 Fonction puissance x^α avec $\alpha \in \mathbb{R}$

1. **Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.**
   On appelle fonction puissance la fonction f définie par $f(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$.
   Le domaine de définition de f est donc $\mathbb{R}^{*+}$
2. **La fonction puissance est continue et différentiable sur $\mathbb{R}^{*+}$.**
   Sa dérivée est donnée par $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$
3. **On suppose $\alpha < 0$**
   ▷ **La fonction f est décroissante et convexe sur $\mathbb{R}^{*+}$**
   ▷ $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$ **et** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$
4. **On suppose $\alpha > 0$**

- ▷ **On peut prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0)=0$**
- ▷ **Nous avons $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$**
- ▷ **Si $\alpha>1$, alors, f est dérivable en 0 et $f'(0)=0$. f est convexe**
- ▷ **Si $0<\alpha<1$, alors, f n'est pas dérivable en 0 et admet, en 0, une tangente verticale. f est concave**

Démonstration

1. La fonction f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$ comme composée de fonctions continues et dérivables sur $\mathbb{R}^{*+}$

$$f'(x)=\left(e^{\alpha\ln x}\right)'=\frac{\alpha}{x}\times e^{\alpha\ln x}=\frac{\alpha}{x}\times x^{\alpha}=\alpha x^{\alpha-1}$$

2. Si $\alpha<0$,
   - Alors sur $\mathbb{R}^{*+}$, nous avons $\alpha x^{\alpha-1}<0$ et donc f est décroissante.
     La dérivée seconde est donnée par $\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$. Si $\alpha<0$, alors $\alpha-1<0$ et $\alpha(\alpha-1)>0$ et donc la dérivée seconde est positive sur $\mathbb{R}^{*+}$. f est donc convexe sur $\mathbb{R}^{*+}$
   - Comme $\alpha<0$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha\ln x=-\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\alpha\ln x}=\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\alpha}=0$
   - Toujours, comme $\alpha<0$, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\alpha\ln x=+\infty$ et donc $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}e^{\alpha\ln x}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}x^{\alpha}=+\infty$
3. Si $\alpha>0$
   - Si $\alpha>0$, alors $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\alpha\ln x=-\infty$ et donc $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}e^{\alpha\ln x}=0$, c'est à dire $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}x^{\alpha}=0$. Il nous est donc possible de prolonger f par continuité, en posant $f(0)=0$
   - Si $\alpha>0$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha\ln x=+\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\alpha\ln x}=\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\alpha}=+\infty$
   - Supposons $\alpha>1$
     - ⋆ Etudions la dérivabilité de f en 0 :
       $$\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{f(x)}{x}=\frac{x^{\alpha}}{x}=x^{\alpha-1}$$
       Comme $\alpha-1>0$, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}x^{\alpha-1}=0$, ce qui montre que si $\alpha>1$ f est dérivable à droite de 0 et de dérivée $f'(0)=0$
     - ⋆ La dérivée seconde de f est toujours donnée par $\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$ et est donc positive. f est donc convexe sur $\mathbb{R}^{*+}$
   - Supposons $0<\alpha<1$
     - ⋆ Etudions la dérivabilité de f en 0 :
       $$\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{f(x)}{x}=\frac{x^{\alpha}}{x}=x^{\alpha-1}=e^{(\alpha-1)\ln x}$$
       Comme $\alpha-1<0$, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}(\alpha-1)\ln x=+\infty$, c'est à dire $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}e^{(\alpha-1)\ln x}=+\infty$ ce qui montre que si $0<\alpha<1$, f n'est pas dérivable à droite de 0 ; elle admet, en 0, une tangente verticale.
     - ⋆ La dérivée seconde de f, toujours donnée par $\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$ est donc négative. f est donc concave sur $\mathbb{R}^{*+}$

Remarque 11 :

1. Il est évident que que si $\alpha=0$ alors f est la fonction constante toujours égale à 1
2. Il est tout aussi évident que si $\alpha=1$ alors $f(x)=x$ est la fonction f est la première bissectrice.

Exercice 13 :

1. On suppose $\alpha>1$. Démontrer que si $0\leqslant x\leqslant1$, alors $x^{\alpha}\leqslant x$ et que si $x\geqslant1$, alors $x^{\alpha}\geqslant x$
2. On suppose $0<\alpha<1$. Démontrer que si $0\leqslant x\leqslant1$, alors $x^{\alpha}\geqslant x$ et que si $x\geqslant1$, alors $x^{\alpha}\leqslant x$

Graphe de x^α

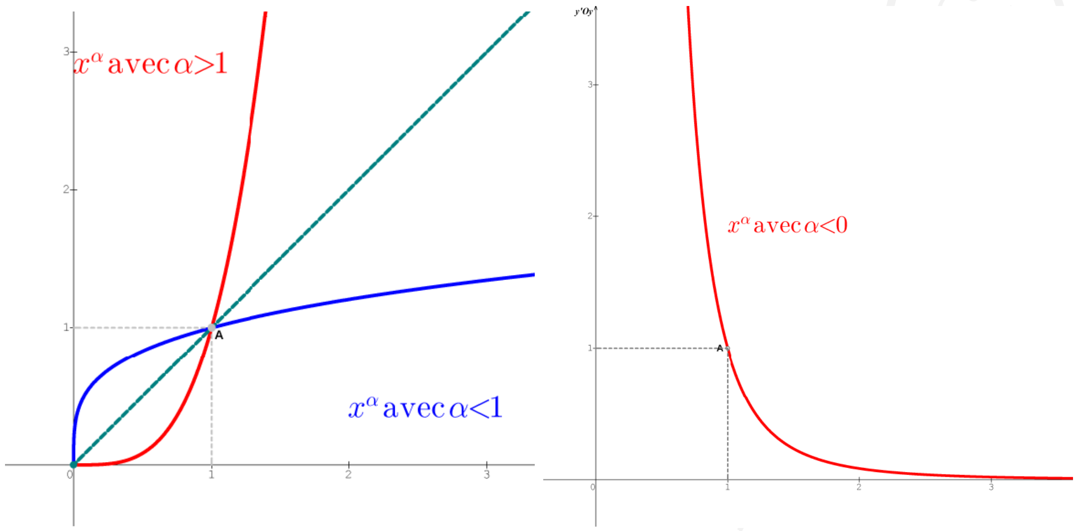

Figure 5.5 – Le graphe de la fonction x^α pour $\alpha > 1$, $0 < \alpha < 1$ et $\alpha < 0$

5.2.12 Généralisation

Soient u et v 2 fonctions numériques d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}$, de domaine respectif $\mathcal{D}_u \subset \mathbb{R}$ et $\mathcal{D}_v \subset \mathbb{R}$.
On suppose que, pour tout $x \in \mathcal{D}_u$, nous avons $u(x) > 0$

1. **On pose, par définition, $(u(x))^{v(x)} = e^{v(x)\ln(u(x))}$**
2. **Si u et v sont différentiables, alors $(u(x))^{v(x)}$ l'est aussi et sa dérivée est donnée par :**

$$\left((u(x))^{v(x)}\right)' = (u(x))^{v(x)}\left(v'(x)\ln(u(x)) + v(x) \times \frac{u'(x)}{u(x)}\right)$$

Exercice 14 :

Donner le domaine de définition et la dérivée des fonctions suivantes

1. $f_1(x) = x^x$
2. $f_2(x) = x^{\frac{1}{x}}$
3. $f_3(x) = a^{b^x}$ avec $a > 0$ et $b > 0$
4. $f_4(x) = a^{x^b}$ avec $a > 0$ et $b > 0$