5.3 Fonctions Hyperboliques

5.3.1 Définition

1. **On appelle cosinus hyperbolique, la fonction $\cosh x$, définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :**

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

2. **On appelle sinus hyperbolique, la fonction $\sinh x$, définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :**

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

3. **On appelle tangente hyperbolique, la fonction $\tanh x$, définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :**

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

5.3.2 Propriétés algébriques

1. **Pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$**
2. **Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}$, nous avons :**

$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y \quad \textbf{et} \quad \sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$$

3. **Pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$ et $\sinh 2x = 2\sinh x \cosh x$**

Démonstration

1. Nous avons $\cosh^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2}{2}$ et $\sinh^2 x = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2}{2}$.
   D'où, en additionnant, nous obtenons :

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2}{2} - \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2}{2} = 1$$

   Ce que nous voulions

2. (a) Tout d'abord, $\cosh(x+y) = \dfrac{e^{x+y} + e^{-x-y}}{2}$ et donc

$$2\cosh(x+y) = e^{x+y} + e^{-x-y} = \frac{e^x e^y}{2} + \frac{e^x e^y}{2} + \frac{e^{-x} e^{-y}}{2} + \frac{e^{-x} e^{-y}}{2}$$

   D'où :

$$\begin{aligned}
2\cosh(x+y) &= \frac{e^x e^y}{2} + \frac{e^x e^y}{2} + \frac{e^{-x} e^y}{2} - \frac{e^{-x} e^y}{2} + \frac{e^x e^{-y}}{2} - \frac{e^x e^{-y}}{2} + \frac{e^{-x} e^{-y}}{2} + \frac{e^{-x} e^{-y}}{2} \\
&= \frac{e^x e^y}{2} + \frac{e^x e^{-y}}{2} + \frac{e^{-x} e^y}{2} + \frac{e^{-x} e^{-y}}{2} + \frac{e^{-x} e^{-y}}{2} - \frac{e^x e^{-y}}{2} + \frac{e^x e^y}{2} - \frac{e^x e^{-y}}{2} \\
&= e^x \left(\frac{e^y}{2} + \frac{e^{-y}}{2}\right) + e^{-x}\left(\frac{e^y}{2} + \frac{e^{-y}}{2}\right) + e^y \left(\frac{e^x}{2} - \frac{e^{-x}}{2}\right) + e^{-y}\left(\frac{e^{-x}}{2} - \frac{e^x}{2}\right) \\
&= e^x \cosh y + e^{-x} \cosh y + e^y \sinh x + e^{-y} \times - \sinh x \\
&= \cosh y \left(e^x + e^{-x}\right) + \sinh x \left(e^y - e^{-y}\right) \\
&= 2\cosh y \cosh x + 2\sinh x \sinh y
\end{aligned}$$

   D'où $2\cosh(x+y) = 2\cosh y \cosh x + 2\sinh x \sinh y \Longleftrightarrow \cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$

(b) La démonstration de l'égalité $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$ est semblable et laissée au lecteur.

3. Pour démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$ et $\sinh 2x = 2\sinh x \cosh x$, il suffit de faire $x = y$ dans les identités $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$ et $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$

Exercice 15 :

Démontrer que nous avons aussi :

- $2\cosh x = 1 + 2\sinh^2 x$
- $1 + \cosh 2x = 2\cosh^2 x$
- $\tanh 2x = \dfrac{2\tanh x}{1+\tanh^2 x}$
- $\cosh 2x = \dfrac{1+\tanh^2 x}{1-\tanh^2 x}$
- $\sinh 2x = \dfrac{2\tanh x}{1-\tanh^2 x}$
- $\tanh^2 x = \dfrac{\cosh 2x - 1}{\cosh 2x + 1}$
- $1 - \tanh^2 x = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$

5.3.3 Propriétés analytiques

1. **Pour les fonctions $\cosh x$ et $\sinh x$**
   (a) **Pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $\cosh x \geqslant 1$**
   (b) **Pour tout $x \geqslant 0$, nous avons $\sinh x \geqslant 0$ et tout $x \leqslant 0$, nous avons $\sinh x \leqslant 0$**
   (c) **La fonction $\cosh$ est paire alors que la fonction $\sinh$ est impaire**
   (d) i. **La fonction $\cosh$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et de dérivée $\sinh$**
   ii. **La fonction $\sinh$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et de dérivée $\cosh$**
   (e) **Nous avons $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \cosh x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \sinh x = +\infty$, puis $\lim\limits_{x\to-\infty} \sinh x = -\infty$**
2. **Pour la fonction $\tanh x$**
   (a) **La fonction $\tanh$ est impaire**
   (b) **La fonction $\tanh$ est dérivable et de dérivée $\tanh' x = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$**
   (c) **Nous avons $\lim\limits_{x\to+\infty} \tanh x = 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \tanh x = -1$**

Démonstration

Les démonstrations sont très simples et laissées au lecteur

5.3.4 Graphes

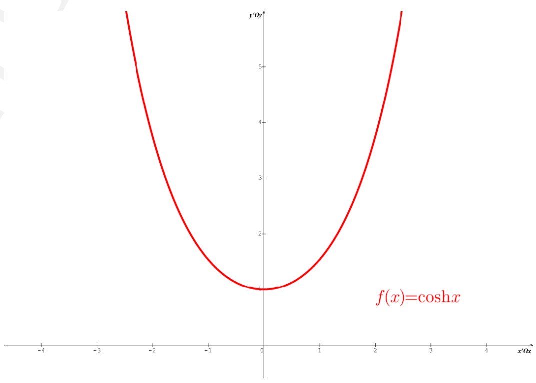

FIGURE 5.6 – Le graphe de la fonction $\cosh x$

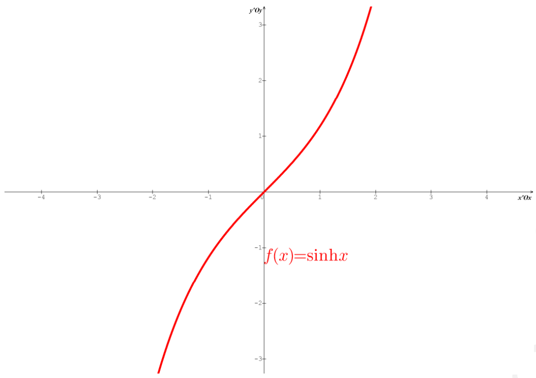

FIGURE 5.7 – Le graphe de la fonction $\sinh x$

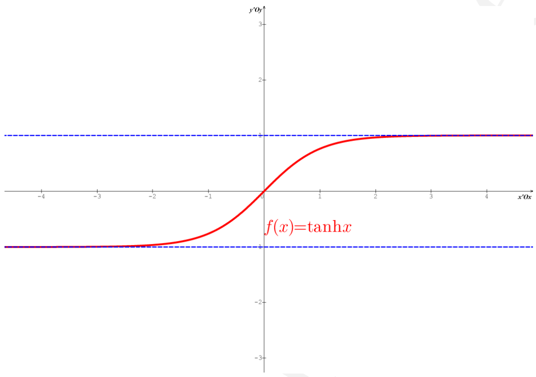

FIGURE 5.8 – Le graphe de la fonction $\tanh x$

Exercice 16 :

1. Quelle est la dérivée de la fonction $f(x) = \ln \tanh x$
2. Etudier et représenter la fonction $g(x) = \tanh \dfrac{x-1}{x+1}$
3. Quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes que doit vérifier $\lambda \in \mathbb{R}$ pour que la fonction $h_\lambda(x) = \dfrac{1}{\lambda + \cosh x}$ soit définie ? Etudier et représenter la fonction $h_2(x) = \dfrac{1}{2 + \cosh x}$

5.3.5 La fonction Argument sinus hyperbolique

1. **On appelle Argument sinus hyperbolique, la fonction $\mathbf{Arg}\sinh x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, définie sur $\mathbb{R}$ et qui est la fonction réciproque de la fonction $\sinh x$. Nous avons :**

$$y = \mathbf{Arg}\sinh x \Longleftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \textbf{ et } y \in \mathbb{R} \\ x = \sinh y \end{cases}$$

2. **Nous avons $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathbf{Arg}\sinh x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathbf{Arg}\sinh x = -\infty$**
3. **Pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $\mathbf{Arg}\sinh x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$**
4. **La fonction $\mathbf{Arg}\sinh x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est :**

$$\mathbf{Arg}\sinh' x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

Démonstration

1. La fonction $\sinh x$ est continue et croissante sur $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et est donc bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Ce qui justifie l'existence de la fonction $\operatorname{Arg}\sinh x$ et que nous avons $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{Arg}\sinh x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{Arg}\sinh x = -\infty$

2. Soit $y = \operatorname{Arg}\sinh x$; alors $x = \sinh y \iff x = \dfrac{e^y - e^{-y}}{2}$. Nous avons :

$$x = \frac{e^y - e^{-y}}{2} \iff 2x = e^y - e^{-y} \iff 2xe^y = e^{2y} - 1 \iff e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0$$

Faisons le changement $Y = e^y$; nous avons $Y > 0$ et l'équation $e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0$ devient $Y^2 - 2xY - 1 = 0$ dont les deux solutions sont :

$$Y_1 = x + \sqrt{x^2+1} \text{ et } Y_2 = x - \sqrt{x^2+1}$$

Nous avons $x^2 + 1 > x^2$ et donc $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x|$, c'est à dire $\sqrt{x^2+1} > x$ et $\sqrt{x^2+1} > -x$ et alors $Y_1 = x + \sqrt{x^2+1} > 0$ et $Y_2 = x - \sqrt{x^2+1} < 0$.
Nous ne retenons donc que $Y_1 = x + \sqrt{x^2+1}$
Donc $e^y = x + \sqrt{x^2+1}$, d'où $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$, c'est à dire $\operatorname{Arg}\sinh x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

3. Nous pourrions, effectivement utiliser la dérivation de $\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$, mais nous allons utiliser la dérivée de la fonction réciproque.
En utilisant le cours, nous pouvons écrire : $\operatorname{Arg}\sinh' x = \dfrac{1}{\sinh'(\operatorname{Arg}\sinh x)}$
Nous avons $\sinh'(\operatorname{Arg}\sinh x) = \cosh(\operatorname{Arg}\sinh x)$. En posant $y = \operatorname{Arg}\sinh x$, de l'identité $\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1$, nous tirons $\cosh^2 y = \sinh^2 y + 1$, et comme $\cosh y \geqslant 1$, nous tirons $\cosh y = \sqrt{\sinh^2 y + 1}$; comme $\sinh^2 y = x^2$, nous obtenons $\cosh y = \sqrt{x^2+1}$, d'où :

$$\operatorname{Arg}\sinh' x = \frac{1}{\sinh'(\operatorname{Arg}\sinh x)} = \frac{1}{\cosh(\operatorname{Arg}\sinh x)} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

Graphe de la fonction Argument sinus hyperbolique *(figure 5.9)*

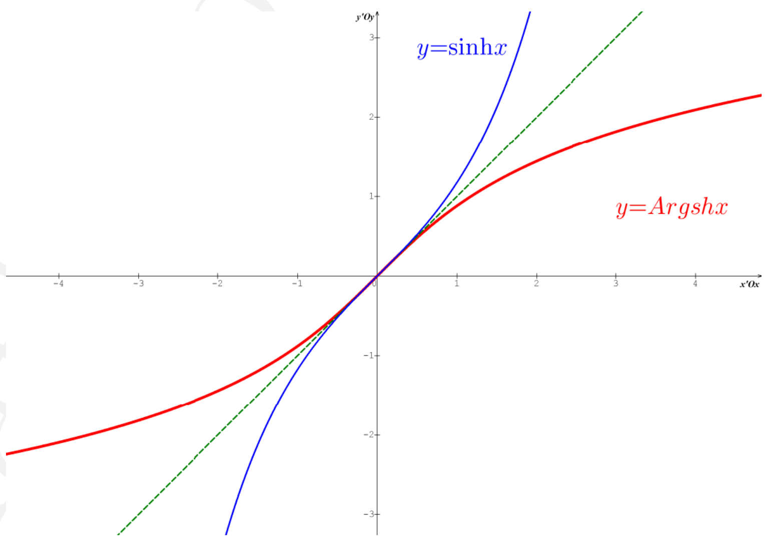

FIGURE 5.9 – Le graphe de la fonction $\operatorname{Arg}\sinh x$

5.3.6 La fonction Argument cosinus hyperbolique

1. **On appelle Argument cosinus hyperbolique, la fonction $\textbf{Arg}\cosh x : [+1; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^{*+}$, définie sur $[+1; +\infty[$ et qui est la fonction réciproque de la fonction $\cosh x$. Nous avons :**

$$y = \textbf{Arg}\cosh x \Longleftrightarrow \begin{cases} x \geqslant +1 \textbf{ et } y \geqslant 0 \\ x = \cosh y \end{cases}$$

2. **Nous avons $\lim\limits_{x \to +\infty} \textbf{Arg}\cosh x = +\infty$ et $\textbf{Arg}\cosh 0 = 1$**
3. **Pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $\textbf{Arg}\cosh x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$**
4. **La fonction $\textbf{Arg}\sinh x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est :**

$$\textbf{Arg}\cosh' x = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

Démonstration

1. La fonction $\cosh x$, n'est pas bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; il suffit de le voir dans la figure 5.6. Par contre, la fonction $\cosh x$ est continue et croissante de $\mathbb{R}^{*+}$ dans $[+1; +\infty[$ et est donc bijective de $\mathbb{R}^{*+}$ dans $[+1; +\infty[$. Ce qui justifie l'existence de la fonction $\text{Arg}\cosh x$ de $[+1; +\infty[$ dans $\mathbb{R}^{*+}$ et que nous avons $\lim\limits_{x \to +\infty} \text{Arg}\cosh x = +\infty$ et $\text{Arg}\cosh 1 = 0$

2. Soit $y = \text{Arg}\cosh x$; alors $x = \cosh y \Longleftrightarrow x = \dfrac{e^y + e^{-y}}{2}$. Nous avons :

$$x = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \Longleftrightarrow 2x = e^y + e^{-y} \Longleftrightarrow 2xe^y = e^{2y} + 1 \Longleftrightarrow e^{2y} - 2xe^y + 1 = 0$$

Faisons le changement $Y = e^y$; nous avons $Y \geqslant 1$, puisque $y \geqslant 0$, et l'équation $e^{2y} - 2xe^y + 1 = 0$ devient $Y^2 - 2xY + 1 = 0$.
Le discriminant de cette équation est $\Delta = 4\left(x^2 - 1\right)$; comme $x \geqslant +1$, nous avons $\Delta \geqslant 0$
Nous avons donc deux solutions qui sont :

$$Y_1 = x + \sqrt{x^2 - 1} \text{ et } Y_2 = x - \sqrt{x^2 - 1}$$

Il faut donc comparer Y_1 et Y_2 à 1
  ⋆ Nous avons :

$$\begin{aligned} Y_2 - 1 &= x - \sqrt{x^2 - 1} - 1 \\ &= x - 1 - \sqrt{x^2 - 1} \\ &= \sqrt{(x-1)^2} - \sqrt{x^2 - 1} \text{ possible car } x \geqslant 1 \\ &= \sqrt{x - 1}\left(\sqrt{x - 1} - \sqrt{x + 1}\right) \end{aligned}$$

  Or, comme pour $x \geqslant 1$ $\sqrt{x - 1} - \sqrt{x + 1} < 0$, nous avons $Y_2 - 1 \leqslant 0$, c'est à dire $Y_2 \leqslant 1$
  ⋆ Un raisonnement semblable montrerait que $Y_1 \geqslant 0$
Et nous choisissons donc $Y_1 = x + \sqrt{x^2 - 1}$, c'est à dire $e^y = x + \sqrt{x^2 - 1} \Longleftrightarrow y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$ et donc $\text{Arg}\cosh x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$

3. Comme tout à l'heure, nous pourrions utiliser la dérivation de $\ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$, mais nous allons, une nouvelle fois, utiliser la dérivée de la fonction réciproque.
En utilisant le cours, nous pouvons écrire : $\text{Arg}\cosh' x = \dfrac{1}{\cosh'\left(\text{Arg}\cosh x\right)}$
Nous avons $\cosh'\left(\text{Arg}\cosh x\right) = \sinh\left(\text{Arg}\cosh x\right)$. En posant $y = \text{Arg}\cosh x$, de l'identité $\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1$, nous tirons $\sinh^2 y = \cosh^2 y - 1$.
Comme $y = \text{Arg}\cosh x$, alors $y \geqslant 0$ et donc $\sinh y \geqslant 0$ et nous tirons alors $\sinh y = \sqrt{\cosh^2 y - 1}$; comme $\cosh^2 y = x^2$, nous obtenons $\sinh y = \sqrt{x^2 - 1}$, d'où :

$$\text{Arg}\cosh' x = \frac{1}{\cosh'\left(\text{Arg}\cosh x\right)} = \frac{1}{\sinh\left(\text{Arg}\cosh x\right)} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

Graphe de la fonction Argument cosinus hyperbolique *(figure 5.10)*

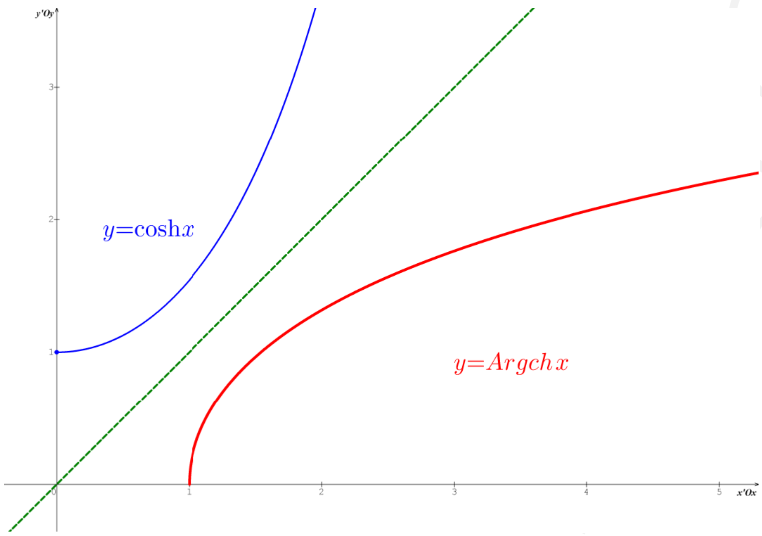

FIGURE 5.10 – Le graphe de la fonction $\operatorname{Arg}\cosh x$

Exercice 17 :

Etudier la fonction $\varphi(x) = \ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right|$

5.3.7 La fonction Argument tangente hyperbolique

1. **On appelle Argument tangente hyperbolique, la fonction $\mathbf{Arg}\tanh x :]-1;+1[\longrightarrow \mathbb{R}$, définie sur $]-1;+1[$ et qui est la fonction réciproque de la fonction $\tanh x$. Nous avons :**

$$y = \mathbf{Arg}\tanh x \Longleftrightarrow \begin{cases} x \in]-1;+1[\text{ et } y \in \mathbb{R} \\ x = \tanh y \end{cases}$$

2. **Nous avons $\lim\limits_{\substack{x\to+1\\x<+1}} \mathbf{Arg}\tanh x = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} \mathbf{Arg}\tanh x = -\infty$**

3. **Pour tout $x \in]-1;+1[$, nous avons $\mathbf{Arg}\tanh x = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$**

4. **La fonction $\mathbf{Arg}\tanh x$ est dérivable sur $]-1;+1[$ et sa fonction dérivée est :**

$$\mathbf{Arg}\tanh' x = \frac{1}{1-x^2}$$

Démonstration

1. La fonction $\tanh x$, est croissante et continue de $\mathbb{R}$ dans $]-1;+1[$; elle y est donc bijective. Ce qui justifie l'existence de la fonction $\operatorname{Arg}\tanh x$ de $]-1;+1[$ dans $\mathbb{R}$ et que nous avons $\lim\limits_{\substack{x\to+1\\x<+1}} \operatorname{Arg}\tanh x = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} \operatorname{Arg}\tanh x = -\infty$

2. Soit $y = \operatorname{Arg}\tanh x$; alors $x = \tanh y \Longleftrightarrow x = \dfrac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1}$. Nous avons :

$$x = \frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1} \Longleftrightarrow x\left(e^{2y}+1\right) = e^{2y}-1 \Longleftrightarrow e^{2y}(x-1) = -1-x \Longleftrightarrow e^{2y} = \frac{1+x}{1-x}$$

D'où, bien entendu, $2y = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) \Longleftrightarrow y = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

3. Il suffit de dériver $\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\ln(1+x) - \ln(1-x)\right)$.

   Nous obtenons donc comme dérivée : $\operatorname{Arg}\tanh' x = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{1-x}\right) = \dfrac{1}{1-x^2}$

Graphe de la fonction Argument tangente hyperbolique *(figure 5.11)*

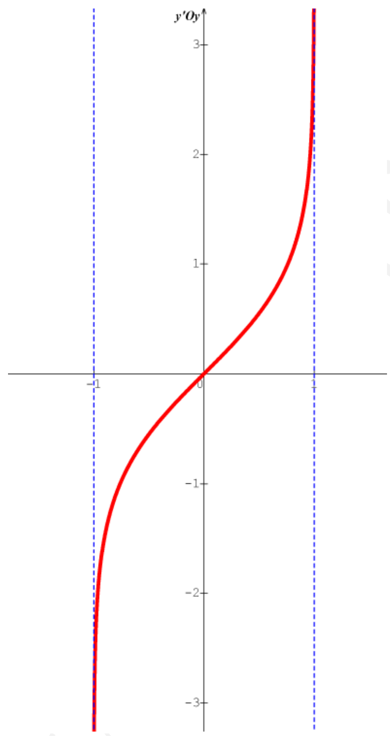

FIGURE 5.11 – Le graphe de la fonction $\operatorname{Arg}\tanh x$

Exercice 18 :

1. Calculer la dérivée de $f(x) = \operatorname{Arg}\tanh\sqrt{x}$
2. Exprimer en fonction de ln les fonctions :

$$g(x) = \operatorname{Arg}\sinh\frac{1}{x} \text{ et } h(x) = \operatorname{Arg}\tanh\frac{x^2-1}{x^2+1}$$