5.4 Croissances comparées

Nous allons, ici, faire plusieurs études de limites, et surtout comparer les comportements, en $+\infty$ des fonctions logarithmes, puissances ou exponentielles
La base de cette étude seront les limites, démontrées en 5.2.4 :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \text{ ET } \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln x = 0$$

5.4.1 Comparaison des fonctions puissances et logarithme népérien en $+\infty$

Pour tout $\alpha > 0$ **et tout** $\beta > 0$**, nous avons** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = 0$

Démonstration

Tout d'abord, remarquons que nous pouvons écrire, d'après les propriétés du logarithme,

$$\ln x = \frac{1}{\alpha}\ln x^\alpha = \frac{\beta}{\alpha}\ln x^{\frac{\alpha}{\beta}}$$

De telle sorte que :

$$\frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = \frac{\left(\frac{\beta}{\alpha}\ln x^{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^\beta}{\left(x^{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^\beta} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^\beta \times \left(\frac{\ln x^{\frac{\alpha}{\beta}}}{x^{\frac{\alpha}{\beta}}}\right)^\beta$$

En faisant le changement de variable $X = x^{\frac{\alpha}{\beta}}$, nous obtenons :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^\beta \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln x^{\frac{\alpha}{\beta}}}{x^{\frac{\alpha}{\beta}}}\right)^\beta = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^\beta \lim_{X\to+\infty} \left(\frac{\ln X}{X}\right)^\beta$$

Comme d'après 5.2.4 nous avons $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, nous avons donc $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} \left(\frac{\ln X}{X}\right)^\beta = 0$, c'est à dire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = 0$. Ce que nous voulions.

5.4.2 Comparaison des fonctions puissances et logarithme népérien en 0

Pour tout $\alpha > 0$ **et tout** $\beta > 0$**, nous avons** $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^\alpha (\ln x)^\beta = 0$

Démonstration

Comme précédemment, nous avons $\ln x = \dfrac{\beta}{\alpha}\ln x^{\frac{\alpha}{\beta}}$ et $x^\alpha = \left(x^{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^\beta$, de telle sorte que :

$$x^\alpha(\ln x)^\beta = \left(x^{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^\beta \times \left(\frac{\beta}{\alpha}\ln x^{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^\beta = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^\beta \times \left(x^{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^\beta \times \left(\ln x^{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^\beta = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^\beta \left(x^{\frac{\alpha}{\beta}}\ln x^{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^\beta$$

En faisant le changement de variable $X = x^{\frac{\alpha}{\beta}}$, nous obtenons :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^\alpha(\ln x)^\beta = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^\alpha(\ln x)^\beta = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^\beta \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(x^{\frac{\alpha}{\beta}}\ln x^{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^\beta = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^\beta \lim_{\substack{X\to 0\\ X>0}} (X\ln X)^\beta$$

Toujours d'après 5.2.4 où nous avons $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln x = 0$, nous avons donc $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (X\ln X)^\beta = 0$, c'est à dire $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^\alpha(\ln x)^\beta = 0$.

5.4.3 Comparaison des fonctions exponentielles et puissance en $+\infty$

Pour tout $\alpha > 0$ et tout $\beta > 0$, nous avons $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(e^x)^\beta}{x^\alpha} = +\infty$

Démonstration

Faisons le changement de variable $X = e^x \iff x = \ln X$. Alors :

$$\frac{(e^x)^\beta}{x^\alpha} = \frac{X^\beta}{(\ln X)^\alpha}$$

D'après 5.4.7, nous avons $\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{(\ln X)^\alpha}{X^\beta} = 0$ et donc $\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{X^\beta}{(\ln X)^\alpha} = +\infty$

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(e^x)^\beta}{x^\alpha} = \lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{X^\beta}{(\ln X)^\alpha} = +\infty$. Ce que nous voulions.

Remarque 12 :

Comme $(e^x)^\beta = e^{\beta x}$, nous avons, pour tout $\alpha > 0$ et tout $\beta > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{\beta x}}{x^\alpha} = +\infty$

5.4.4 Corollaire

Pour tout $\alpha > 0$ et tout $\beta > 0$, nous avons $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha e^{-\beta x} = 0$

Démonstration

Nous avons $x^\alpha e^{-\beta x} = \dfrac{x^\alpha}{e^{\beta x}}$. D'après 5.4.3, nous avons $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{\beta x}}{x^\alpha} = +\infty$, et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^\alpha}{e^{\beta x}} = 0$, c'est à dire $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha e^{-\beta x} = 0$

5.4.5 Comparaison des fonctions a^x avec $a > 1$ et puissance en $+\infty$

Pour tout $a > 1$ et tout $\alpha > 0$, nous avons $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{a^x}{x^\alpha} = +\infty$

Démonstration

Soit $a > 1$
La fonction exponentielle étant bijective, il existe un unique $\beta > 0$ tel que $a = e^\beta$ et donc $a^x = e^{\beta x}$
De là, nous avons $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{a^x}{x^\alpha} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{\beta x}}{x^\alpha} = +\infty$

5.4.6 Comparaison des fonctions a^x avec $0 < a < 1$ et puissance en $+\infty$

Pour tout $0 < a < 1$ et tout $\alpha > 0$, nous avons $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{a^x}{x^\alpha} = 0$

Démonstration

Soit $0 < a < 1$
La fonction exponentielle étant bijective, il existe un unique $\beta < 0$ tel que $a = e^\beta$ et donc $a^x = e^{\beta x}$. Donc :

$$\frac{a^x}{x^\alpha} = \frac{e^{\beta x}}{x^\alpha} = \frac{1}{x^\alpha e^{-\beta x}}$$

Comme $-\beta > 0$, nous avons, d'après 5.4.3, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha e^{-\beta x} = +\infty$ et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^\alpha e^{-\beta x}} = 0$

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{a^x}{x^\alpha} = 0$

5.4.7 Comparaison des fonctions $\log_a x$ avec $a > 1$ et puissance en $+\infty$

Pour tout $a > 1$, tout $\alpha > 0$ et tout $\beta > 0$, nous avons $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\log_a x)^\beta}{x^\alpha} = 0$

Démonstration

Soient $a > 1$, $\alpha > 0$ et $\beta > 0$; alors :

$$\frac{(\log_a x)^\beta}{x^\alpha} = \frac{\left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)^\beta}{x^\alpha} = \left(\frac{1}{\ln a}\right)^\beta \times \frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha}$$

D'après 5.4.7, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = 0$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\log_a x)^\beta}{x^\alpha} = 0$

Remarque 13 :

On démontrerait, facilement, en utilisant des arguments semblables que pour tout $a > 1$ et tout $\alpha > 0$, nous avons $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^\alpha}{\log_a x} = +\infty$ [1]

5.4.8 Comparaison des fonctions $\log_a x$ avec $0 < a < 1$ et puissance en $+\infty$

Pour tout $0 < a < 1$, tout $\alpha > 0$ nous avons $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\log_a x}{x^\alpha} = 0$

Démonstration

Comme tout à l'heure, nous avons $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$ avec, cette fois ci, comme $0 < a < 1$, $\ln a < 0$; on ne peut donc pas élever $\ln a$ à la puissance β avec $\beta \in \mathbb{R}$
C'est donc très simple :

$$\frac{\log_a x}{x^\alpha} = \frac{\frac{\ln x}{\ln a}}{x^\alpha} = \frac{1}{\ln a} \times \frac{\ln x}{x^\alpha}$$

Donc, d'après 5.4.7,*(avec $\beta = 1$ et $a = e$)* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\log_a x}{x^\alpha} = 0$

Remarque 14 :

Il est aussi facile de démontrer que, si $0 < a < 1$, alors $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{x^\alpha}{\log_a x} = -\infty$

5.4.9 Comparaison des fonctions $\log_a x$ et puissance en 0

1. **Pour tout $a > 1$, tout $\alpha > 0$ et tout $\beta > 0$, nous avons $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^\alpha (\log_a x)^\beta = 0$**
2. **Pour tout $0 < a < 1$ et tout $\alpha > 0$, nous avons $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^\alpha \log_a x = 0$**

1. Le faire !!

Démonstration

1. Soient $a > 1$, $\alpha > 0$ et $\beta > 0$

   Alors : $x^{\alpha} (\log_a x)^{\beta} = x^{\alpha} \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)^{\beta} = \left(\frac{1}{\ln a}\right)^{\beta} x^{\alpha} (\ln x)^{\beta}$

   D'après 5.4.2, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^{\alpha} (\ln x)^{\beta} = 0$ et donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^{\alpha} (\log_a x)^{\beta} = 0$

2. Soient maintenant $0 < a < 1$ et $\alpha > 0$. Alors, $x^{\alpha} \log_a x = x^{\alpha} \frac{\ln x}{\ln a}$. Et donc, toujours d'après 5.4.2, nous avons $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^{\alpha} \log_a x = 0$

5.4.10 Comparaison des fonctions $\log_b x$ et a^x en $+\infty$

1. **On suppose** $a > 1$
   (a) **Si** $b > 1$ **alors** $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{a^x}{\log_b x} = +\infty$
   (b) **Si** $0 < b < 1$ **alors** $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{a^x}{\log_b x} = -\infty$
2. **On suppose** $0 < a < 1$
   Alors $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x \log_b x = 0$

Démonstration

1. Supposons $a > 1$

   La clef de la résolution de cette question est d'écrire $\frac{a^x}{\log_b x} = \frac{a^x}{x^{\alpha}} \times \frac{x^{\alpha}}{\log_b x} = \ln b \times \frac{a^x}{x^{\alpha}} \times \frac{x^{\alpha}}{\ln x}$ avec $\alpha > 0$

   Alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^{\alpha}} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^{\alpha}}{\ln x} = +\infty$ Donc :

   - ⋆ Si $b > 1$, alors $\ln b > 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln b \times \frac{a^x}{x^{\alpha}} \times \frac{x^{\alpha}}{\ln x} = +\infty$, c'est à dire $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{a^x}{\log_b x} = +\infty$
   - ⋆ Et si $0 < b < 1$, alors $\ln b < 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln b \times \frac{a^x}{x^{\alpha}} \times \frac{x^{\alpha}}{\ln x} = -\infty$, c'est à dire $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{a^x}{\log_b x} = -\infty$

2. Supposons $0 < a < 1$

   Il existe $\beta > 0$ tel que $a = e^{-\beta}$ et nous pouvons donc écrire, pour tout $\alpha > 0$:

   $$a^x \log_b x = e^{-\beta x} \log_b x = e^{-\beta x} \times \frac{\ln x}{\ln b} = \frac{1}{\ln b} \times x^{\alpha} e^{-\beta x} \times \frac{\ln x}{x^{\alpha}}$$

   Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\alpha} e^{-\beta x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^{\alpha}} = 0$, nous avons bien $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x \log_b x = 0$

5.4.11 Exercices

Exercice 19 :

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et nous considérons la fonction f_n définie par :

$$\begin{cases} f_n : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 \text{ si } x = 0 \\ \frac{1}{x^n} e^{-\frac{1}{x^2}} \text{ si } x \neq 0 \end{cases} \end{cases}$$

   Montrer que f_n est continue en 0 et dérivable en 0

mathinfovannes.free.fr©

2. Démontrer que la fonction g définie par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} g:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left\{\begin{array}{c} 0 \text{ si } x=0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}} \text{ si } x\neq 0 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 20 :

Démontrer que la dérivée n-ième de la fonction $g(x)=e^{-x^2}$ est de la forme $g^{(x)}=P_n(x)\,e^{-x^2}$ où P_n est un polynôme de degré n et de coefficient dominant $(-2)^n$

mathinfovannes.free.fr©