5.5 Exercices complémentaires

Exercice 21 :

Trouver $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(x^x\right)^x}{x^{\left(x^x\right)}}$

Exercice 22 :

Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. Nous notons :

$$\left\{\begin{array}{rcl} f_\alpha:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & f_\alpha(x)=e^{\alpha x}\end{array}\right.$$

Montrer que la famille de fonctions $\left(f_\alpha\right)_{\alpha\in\mathbb{R}}$ est une une famille libre du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

Exercice 23 :

1. Démontrer que la fonction logarithme ln n'est la restriction sur $]0;+\infty[$ d'aucune fonction fraction rationnelle
2. Démontrer que la fonction exponentielle exp n'est pas une fonction fraction rationnelle

Exercice 24 :

Démontrer que, pour tout $x\in\,]0;+1[$, nous avons $x^x\,(1-x)^{1-x}\geqslant\dfrac{1}{2}$

Exercice 25 :

1. Démontrer que pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, nous avons $\tanh x=\dfrac{2}{\tanh 2x}-\dfrac{1}{\tanh x}$
2. En déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}2^k\tanh\left(2^kx\right)$

Exercice 26 :

Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in\mathbb{R}$. Evaluer $\Pi_n(x)=\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\cosh\left(\frac{x}{2^k}\right)$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}\Pi_n(x)$

Exercice 27 :

Soit $G:\left]-\dfrac{\pi}{2};+\dfrac{\pi}{2}\right[\longrightarrow\mathbb{R}$ définie, pour tout $t\in\left]-\dfrac{\pi}{2};+\dfrac{\pi}{2}\right[$ par $G(t)=\operatorname{Argsh}(\tan t)$

1. Montrer que G est dérivable sur $\left]-\dfrac{\pi}{2};+\dfrac{\pi}{2}\right[$ et que, pour tout $t\in\left]-\dfrac{\pi}{2};+\dfrac{\pi}{2}\right[$, nous avons
$$G'(t)=\cosh(G(t))$$
2. Démontrer que, pour tout $t\in\left]-\dfrac{\pi}{2};+\dfrac{\pi}{2}\right[$ nous avons $\tanh(G(t))=\sin t$

Exercice 28 :

1. Soit $\Phi:[0:1[\longrightarrow\mathbb{R}$, l'application définie par :
$$\left\{\begin{array}{rcl}\Phi:[0:1[& \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & \Phi(x)=\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)-2x\end{array}\right.$$
Il faut montrer que, pour tout $x\in[0:1[$, nous avons $\Phi(x)\geqslant 0$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on appelle f_n, l'application définie par :

$$\begin{cases} f_n \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f_n(x) = x^n e^{-x} \end{cases}$$

   Il faut montrer que, pour tout $x \in [0 : n[$, nous avons $f_n(n+x) \geqslant f_n(n-x)$

3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons $\displaystyle\int_0^n f_n(t)\,dt \leqslant \int_n^{2n} f_n(t)\,dt$
4. Démontrer que, pour tout $x \geqslant 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons :

$$\int_0^x f_n(t)\,dt = n!\left(1 - e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right)$$

5. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, démontrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f_n(t)\,dt = n!$
6. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!} \geqslant \frac{e^n}{2}$