5.6 Quelques exercices corrigés

5.6.1 Sur la fonction exponentielle

Exercice 1 :

1. *Etudier la continuité de* $f(x) = \dfrac{1}{1 - e^{\frac{1}{x}}}$

   ▷ A priori, cette fonction est définie pour $x \neq 0$
   ▷ D'autre part, elle est définie pour les $x \in \mathbb{R}$ tels que $1 - e^{\frac{1}{x}} \neq 0$, c'est à dire tels que $1 \neq e^{\frac{1}{x}}$.
   Or , il n'existe pas de $x \in \mathbb{R}$ tels que $\dfrac{1}{x} = 0$
   ▷ Donc f est définie sur $\mathbb{R}^*$

   Pour $x \neq 0$, la fonction $1 - e^{\frac{1}{x}}$ est continue et ne s'annule pas, donc $f(x) = \dfrac{1}{1 - e^{\frac{1}{x}}}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$

   <u>Etude des limites en 0</u>

   - A droite de 0, c'est à dire si $x > 0$, nous avons $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$, et donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} 1 - e^{\frac{1}{x}} = -\infty$ d'où $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{1}{1 - e^{\frac{1}{x}}} = 0$, c'est à dire $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = 0$
   - Et maintenant, à gauche de 0, c'est à dire $x < 0$, nous avons $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \dfrac{1}{x} = -\infty$ et donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \dfrac{1}{e^{\frac{1}{x}}} = 0$, et donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} 1 - e^{\frac{1}{x}} = 1$
   d'où $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \dfrac{1}{1 - e^{\frac{1}{x}}} = 1$, c'est à dire $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = 1$

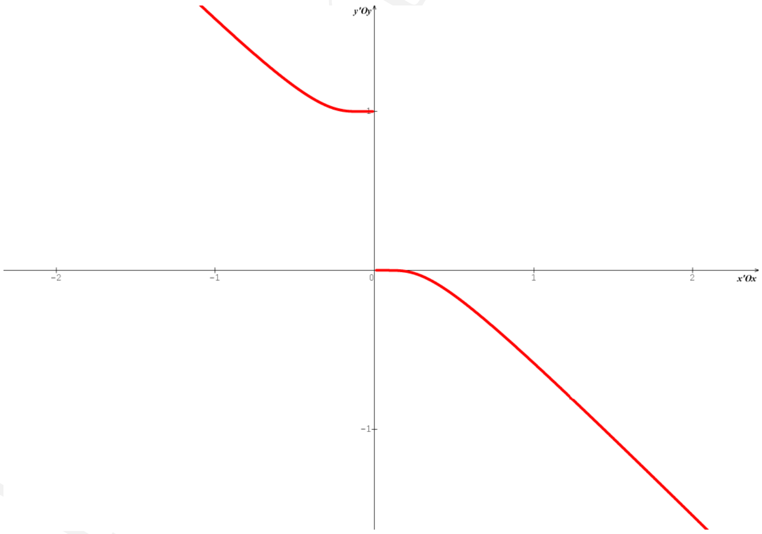

FIGURE 5.12 – Le graphe de la fonction $f(x) = \dfrac{1}{1 - e^{\frac{1}{x}}}$ au voisinage de 0

2. *Etudier la continuité et faire le graphe de la fonction* $g(x) = e^{\frac{1}{x}}$

   ▷ Tout d'abord, il est clair que g n'est définie que sur $\mathbb{R}^*$
   ▷ Etudions la continuité en $x = 0$.

   - A droite de 0, nous avons $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$ et donc, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$
   - A gauche de 0, nous avons $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \dfrac{1}{x} = -\infty$ et donc, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} e^{\frac{1}{x}} = 0$

- En $+\infty$, nous avons $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$, et donc $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x}}=1$
- En $-\infty$, nous avons $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$, et donc $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x}}=1$

La fonction dérivée de g est donnée par $g'(x)=-\dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$ est négative sur $\mathbb{R}^*$ et donc la fonction g est décroissante sur $\mathbb{R}^*$

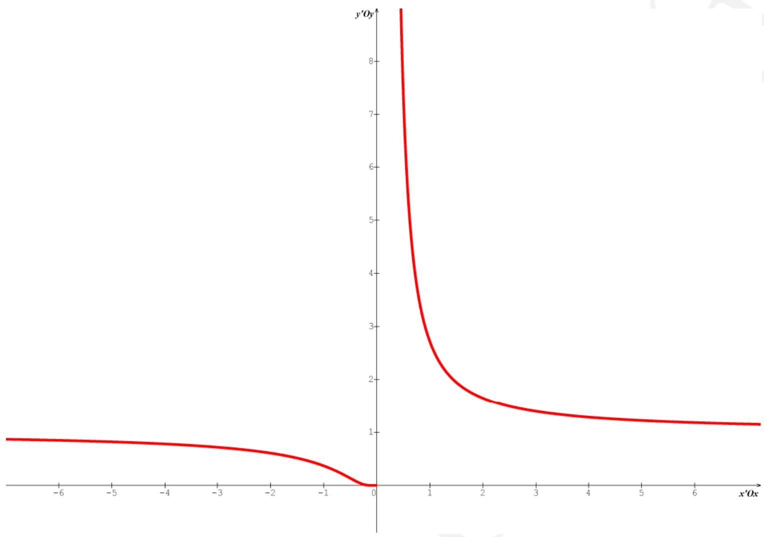

Figure 5.13 – Le graphe de la fonction $g(x)=e^{\frac{1}{x}}$ sur $\mathbb{R}^*$

Exercice 2 :

Démontrer que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, nous avons $|e^x-1-x|\leqslant\dfrac{x^2}{2}e^{|x|}$

La fonction exponentielle est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Nous pouvons utiliser la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 en $x=0$:

$$(\exists\theta\in\,]0;1[)\left(e^x=1+x+\frac{x^2}{2}e^{\theta x}\right)$$

Nous avons donc aussi $e^x-1-x=\dfrac{x^2}{2}e^{\theta x}$, ce qui montre que $e^x-1-x\geqslant 0$.
D'autre part, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\theta x\leqslant|\theta x|=\theta\,|x|\leqslant|x|$
De la croissance de la fonction exponentielle, nous obtenons, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $e^{\theta x}\leqslant e^{|x|}$. Donc :

$$e^x-1-x=|e^x-1-x|=\frac{x^2}{2}e^{\theta x}\leqslant\frac{x^2}{2}e^{|x|}$$

Nous avons bien, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $|e^x-1-x|\leqslant\dfrac{x^2}{2}e^{|x|}$ et même, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $e^x-1-x\leqslant\dfrac{x^2}{2}e^{|x|}$

Exercice 3 :

Soit $u_0\in\mathbb{R}$; nous considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par son premier terme u_0 et par $u_{n+1}=\dfrac{e^{-u_n}}{n+1}$. Donner la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

- Il est facile de démontrer par récurrence que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n>0$
- Comme, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n>0$, nous avons $0<e^{-u_n}\leqslant 1$
- Donc, nous avons : $0<\dfrac{e^{-u_n}}{n+1}<\dfrac{1}{n+1}$

Comme, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n+1}=0$, nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{e^{-u_n}}{n+1}=0$, c'est à dire $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$

Exercice 4 :

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}$. Démontrer que la dérivée n-ième de f_n est $f_n^{(n)}(x) = (-1)^n x^{-n-1}e^{\frac{1}{x}}$

Nous allons faire la démonstration par récurrence sur n

- Vérifions que c'est vrai pour $n = 0$
  $f_0(x) = x^{-1}e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}} = f_0^{(0)}(x)$ et en remplaçant n par 0, nous obtenons

$$f_0^{(0)}(x) = (-1)^0 x^{-0-1}e^{\frac{1}{x}} = x^{-1}e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}$$

  C'est donc vrai pour $n = 0$
- Supposons que jusqu'à n, nous ayons $f_n^{(n)}(x) = (-1)^n x^{-n-1}e^{\frac{1}{x}}$
- Démontrons le à l'ordre $n+1$
  Une première remarque est de voir que $f_{n+1}(x) = xf_n(x)$ et donc $f_{n+1}^{(n+1)}(x) = (xf_n(x))^{(n+1)}$, et en utilisant la formule de Leibniz, en posant $h(x) = x$, nous avons :

$$(xf_n(x))^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n+1} \mathrm{C}_{n+1}^k h^{(k)}(x) f_n^{(n+1-k)}(x) = xf_n^{(n+1)}(x) + (n+1) f_n^{(n)}(x)$$

  Nous connaissons, par hypothèse de récurrence $f_n^{(n)}(x)$
  Et $f_n^{(n+1)}(x)$ est la dérivée première de $f_n^{(n)}(x)$; donc :

$$f_n^{(n+1)}(x) = (-1)^n \left((-n-1)x^{-n-2}e^{\frac{1}{x}} + x^{-n-1} \times \frac{-1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\right) = (-1)^{n+1} x^{-n-3}e^{\frac{1}{x}}((n+1)x+1)$$

  Donc :

$$\begin{aligned} f_{n+1}^{(n+1)}(x) = & \ (-1)^{n+1} x^{-n-2}e^{\frac{1}{x}}((n+1)x+1) + (n+1)(-1)^n x^{-n-1}e^{\frac{1}{x}} \\ = & \ (-1)^{n+1} x^{-n-2}e^{\frac{1}{x}}((n+1)x+1-(n+1)x) \\ = & \ (-1)^{n+1} x^{-n-2}e^{\frac{1}{x}} \end{aligned}$$

  C'est à dire $f_{n+1}^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1} x^{-(n+1)-1}e^{\frac{1}{x}}$; ce que nous voulions

Donc, la dérivée n-ième de f_n est bien $f_n^{(n)}(x) = (-1)^n x^{-n-1}e^{\frac{1}{x}}$

Exercice 5 :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = e^{x\cos\alpha}\cos(x\sin\alpha)$. Démontrer que la dérivée n-ième de f est donnée par $f^{(n)}(x) = e^{x\cos\alpha}\cos(x\sin\alpha + n\alpha)$

Nous faisons cette démonstration par récurrence sur n

$\longrightarrow$ Elle est évidemment vraie pour $n = 0$
$\longrightarrow$ Supposons que, pour n, nous ayons $f^{(n)}(x) = e^{x\cos\alpha}\cos(x\sin\alpha + n\alpha)$
$\longrightarrow$ Démontrons le à l'ordre $n+1$
$f^{(n+1)}(x)$ est la dérivée première de $f^{(n)}(x)$. Calculons donc cette dérivée.

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) = & \ \left(e^{x\cos\alpha}\cos(x\sin\alpha + n\alpha)\right)' \\ = & \ \cos\alpha e^{x\cos\alpha}\cos(x\sin\alpha + n\alpha) - \sin\alpha e^{x\cos\alpha}\sin(x\sin\alpha + n\alpha) \\ = & \ e^{x\cos\alpha}(\cos\alpha\cos(x\sin\alpha + n\alpha) - \sin\alpha\sin(x\sin\alpha + n\alpha)) \\ = & \ e^{x\cos\alpha}\cos(x\sin\alpha + n\alpha + \alpha) \ \text{ d'après les formules d'addition} \\ = & \ e^{x\cos\alpha}\cos(x\sin\alpha + (n+1)\alpha) \end{aligned}$$

C'est donc vrai à l'ordre $n+1$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la dérivée n-ième de f est donnée par $f^{(n)}(x) = e^{x\cos\alpha}\cos(x\sin\alpha + n\alpha)$

5.6.2 Sur la fonction logarithme

Exercice 6 :

Calculez les dérivées des fonctions f, g et h suivantes :

Voici un exercice qui s'apparente à un exercice d'application directes. Dans le corrigé, je tenterai d'aller *(un peu)* plus loin que la question posée

1. $f(x) = \ln(\ln x)$
   - Une première question à se poser est celle du domaine de définition.
     Nous devons avoir $\ln x > 0$, et donc, le domaine de définition de f est clairement $]+1; +\infty[$
   - En second lieu, f est de la forme $f(x) = \ln(u(x))$ où $u(x) = \ln x$.
     la dérivée f' est donc donnée par $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)} = \dfrac{\frac{1}{x}}{\ln x} = \dfrac{1}{x \ln x}$
   - Dans un exercice qui suit, nous démontrons que pour $x > 0$, nous avons $\ln x \leqslant \dfrac{x}{e}$.
     Pour $x > 1$, nous avons $\ln x > 0$, et donc nous avons l'inégalité

$$\ln(\ln x) \leqslant \frac{\ln x}{e} < \ln x$$

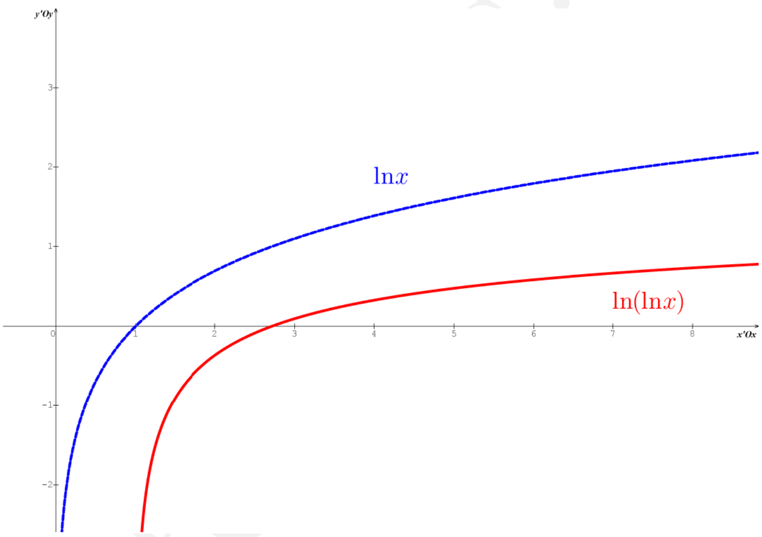

FIGURE 5.14 – Le graphe de la fonction $f(x) = \ln(\ln x)$ et une comparaison avec celui de $\ln x$

2. $g(x) = \arctan(\ln x)$
   - Le domaine de définition n'est pas difficile à trouver : nous devons avoir $x > 0$
   - Le calcul de dérivées est celui de la dérivée des fonctions composées :

$$g'(x) = \ln' x \times \arctan'(\ln x) = \frac{1}{x} \times \frac{1}{1 + \ln^2 x}$$

     C'est donc une fonction croissante.
   - Il n'est pas difficile de constater que $\lim\limits_{x \to +\infty} \arctan(\ln x) = \dfrac{\pi}{2}$, mais, il faut remarquer que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \arctan(\ln x) = -\dfrac{\pi}{2}$, ce qui nous autorise à prolonger g par continuité, en posant $g(0) = -\dfrac{\pi}{2}$

   On trouvera le graphe de la fonction $g(x) = \arctan(\ln x)$ dans la figure 5.15

3. $h(x) = \ln \sqrt{1 - 2\sin^2 x}$

   Faisons, tout d'abord, un peu de trigonométrie ; nous avons $1 - 2\sin^2 x = \cos 2x$ [2]

2. Comment faisons nous pour le retrouver ? Nous avons $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2_sin^2 x$

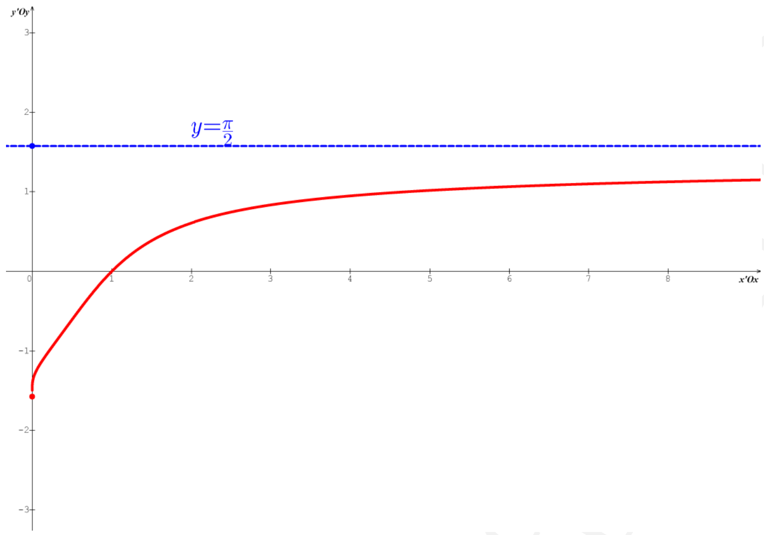

FIGURE 5.15 – Le graphe de la fonction $g(x) = \arctan(\ln x)$

Et donc, $h(x) = \ln\sqrt{1-2\sin^2 x} = \ln\sqrt{\cos 2x}$. Nous pouvons, d'ores et déjà dire que la fonction h est périodique et de période π

- Le domaine de définition est donné par $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } \cos 2x > 0\}$. Nous avons :

$$\cos 2x > 0 \iff \frac{-\pi}{2} + 2k\pi < 2x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi \iff \frac{-\pi}{4} + k\pi < 2x < \frac{\pi}{4} + k\pi$$

  Donc $\mathcal{D} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]\frac{-\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{4} + k\pi\right[$

  La fonction h étant périodique et de période π, nous ne l'étudierons que sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right[$

- Nous pouvons utiliser les propriétés de la fonction logarithme pour simplifier h.

$$\ln\sqrt{1-2\sin^2 x} = \ln\sqrt{\cos 2x} = \frac{1}{2}\ln\cos 2x$$

- Le calcul de dérivées est celui de la dérivée des fonctions du type $\ln u(x)$:

$$h'(x) = \frac{1}{2} \times \frac{-2\sin 2x}{\cos 2x} = -\frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \tan 2x$$

  C'est donc une fonction croissante sur $\left]-\frac{\pi}{4}; 0\right[$ et décroissante sur $\left]0; \frac{\pi}{4}\right[$ puisque si $x \in \left]-\frac{\pi}{4}; 0\right[$, alors $2x \in \left]-\frac{\pi}{2}; 0\right[$ et alors $\tan 2x \leqslant 0$. De même, si $x \in \left]0; \frac{\pi}{4}\right[$, alors $2x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ et alors $\tan 2x \geqslant 0$

- Il n'est pas difficile de constater que $\lim\limits_{\substack{x\to-\frac{\pi}{4} \\ x>-\frac{\pi}{4}}} \ln\sqrt{\cos 2x} = -\infty$; de même, $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{4} \\ x<\frac{\pi}{4}}} \ln\sqrt{\cos 2x} = -\infty$

On trouvera le graphe de la fonction $h(x) = \ln\sqrt{1-2\sin^2 x}$ dans la figure 5.16

Exercice 7 :

1. *Soit f la fonction définie pour $x > 1$ par $f(x) = \ln(\ln x)$. Montrer qu'elle est concave.*

   Pour montrer que f est concave, nous allons en calculer la dérivée seconde. Nous connaissons déjà la dérivée première de f ; en effet, nous avons $f'(x) = \dfrac{1}{x\ln x}$ et la dérivée seconde est donc $f''(x) = \dfrac{-(1+\ln x)}{(x\ln x)^2}$.

   Comme $x > 1$, nous avons $1 + \ln x > 1$ et donc $f''(x) < 0$. f est donc concave

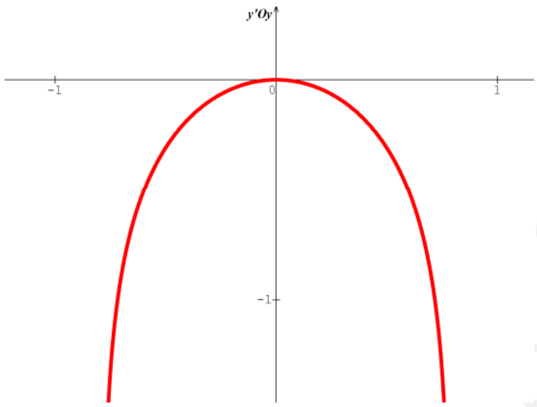

FIGURE 5.16 – Le graphe de la fonction $h(x) = \ln\sqrt{1-2\sin^2 x} = \ln\sqrt{\cos 2x}$ sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right[$

2. *En déduire l'inégalite vraie pour $a > 1$ et $b > 1$: $\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geqslant \sqrt{\ln a \ln b}$*

   f étant concave, pour tout $a > 1$, tout $b > 1$ et tout $\lambda \in]0;1[$, nous avons
   $$f(\lambda a + (1-\lambda)b) \geqslant \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)$$
   Et donc, pour $\lambda = \frac{1}{2}$, nous obtenons $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geqslant \frac{1}{2}(f(a) + f(b))$

   C'est à dire, ici, $\ln\left(\ln\left(\frac{a+b}{2}\right)\right) \geqslant \frac{1}{2}(\ln(\ln a) + \ln(\ln b))$.

   Or, $\ln(\ln a)+\ln(\ln b) = \ln(\ln a \ln b)$ et donc, $\frac{1}{2}(\ln(\ln a) + \ln(\ln b)) = \frac{1}{2}\ln(\ln a \ln b) = \ln\sqrt{(\ln a \ln b)}$

   Nous avons donc $\ln\left(\ln\left(\frac{a+b}{2}\right)\right) \geqslant \ln\sqrt{(\ln a \ln b)}$, et en utilisant le fait que la fonction logarithme est une fonction croissante, nous avons $\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geqslant \sqrt{(\ln a \ln b)}$

   Important :
   L'inégalité ne vaut que pour $a > 1$ et $b > 1$.
   Pour le démontrer, nous allons utiliser un contre-exemple :
   Supposons $a = b = \frac{1}{2}$. Alors :
   $\longrightarrow \ln\left(\frac{a+b}{2}\right) = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2 < 0$
   $\longrightarrow \ln a \ln b = \left(\ln\frac{1}{2}\right)^2 = (-\ln 2)^2 = (\ln 2)^2$, et $\sqrt{(\ln a \ln b)} = \sqrt{(\ln 2)^2} = \ln 2$
   Nous n'avons donc pas $\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geqslant \sqrt{\ln a \ln b}$

Exercice 8 :

1. *Démontrer que, pour $x > 0$, nous avons $\ln x \leqslant \frac{x}{e}$*

   Comme souvent, nous allons utiliser la fonction auxiliaire $\varphi(x) = \ln x - \frac{x}{e}$, de domaine de définition $\mathbb{R}^{*+}$ et dont la dérivée est donnée par $\varphi'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e} = \frac{e-x}{ex}$

   Ainsi, si $0 < x \leqslant e$, alors $\varphi'(x) \geqslant 0$ et si $x \geqslant 0$ alors $\varphi'(x) \leqslant 0$; ce qui veut dire que φ est croissante sur $]0; e]$ et que φ est décroissante sur $[e; +\infty[$

   Le maximum de φ est donc atteint en $x = e$, ce qui sous-entend que pour tout $x > 0$, nous avons $\varphi(x) \leqslant \varphi(e) = 0$ et, donc, pour tout $x > 0$, $\ln x - \frac{x}{e} \leqslant 0$, c'est à dire que pour tout $x > 0$, nous avons $\ln x \leqslant \frac{x}{e}$

2. *Démontrer que, pour $x > -1$, $\dfrac{x}{x+1} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$*

   Nous avons, ici, 2 inégalités :
   $\longrightarrow$ La première : $\ln(1+x) \leqslant x$
   $\longrightarrow$ La seconde : $\dfrac{x}{x+1} \leqslant \ln(1+x)$

   - Démontrons la première inégalité
     Il y a la méthode classique qui consiste à étudier la fonction auxiliaire $\psi(x) = \ln(1+x) - x$ et à démontrer qu'elle est négative si $x > -1$; se référer à la démonstration de la question précédente.
     Il y a une autre méthode : celle qui consiste à utiliser la formule de Taylor-Lagrange. D'après 4.4.1, il existe $\theta \in \left]0;1\right[$ tel que

     $$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2} f''(\theta x) \Longleftrightarrow \ln(1+x) = x + \frac{x^2}{2} \times \frac{-1}{(1+\theta x)^2}$$

     C'est à dire que $\ln(1+x) - x = \dfrac{x^2}{2} \times \dfrac{-1}{(1+\theta x)^2} \leqslant 0$, c'est à dire que, si $x > -1$ alors $\ln(1+x) \leqslant x$
   - Démontrons la seconde inégalité
     Ici, le meilleur choix est bien celui de la fonction auxiliaire $\psi(x) = \dfrac{x}{x+1} - \ln(1+x)$ dont la dérivée est donnée par $\psi'(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2} - \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{-x}{(1+x)^2}$
     Il est facile de voir que le maximum est atteint en $x = 0$, et donc, pour tout $x > -1$, $\psi(x) \leqslant \psi(0) = 0$ et donc, nous avons $\dfrac{x}{x+1} \leqslant \ln(1+x)$

   D'où, en faisant la synthèse, pour tout $x > -1$, nous avons $\dfrac{x}{x+1} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$

3. *Démontrer que, pour tout a et b tels que $0 < b \leqslant a$, nous avons $\dfrac{a-b}{a} \leqslant \ln\left(\dfrac{a}{b}\right) \leqslant \dfrac{a-b}{b}$*

   Première remarque, qui est importante :

   $$\frac{a-b}{a} \leqslant \ln\left(\frac{a}{b}\right) \leqslant \frac{a-b}{b} \Longleftrightarrow 1 - \frac{b}{a} \leqslant \ln\left(\frac{a}{b}\right) \leqslant \frac{a}{b} - 1$$

   Nous avons aussi $0 < b \leqslant a \Longleftrightarrow 1 \leqslant \dfrac{a}{b}$. Pour cela, nous allons démontrer que si $x \geqslant 1$, nous avons $1 - \dfrac{1}{x} \leqslant \ln x \leqslant x - 1$
   Nous avons, une nouvelle fois 2 inégalités à démontrer dès que $x \geqslant 1$:
   $\longrightarrow$ La première : $\ln x \leqslant x - 1$
   $\longrightarrow$ La seconde : $1 - \dfrac{1}{x} \leqslant \ln x$

   - Démontrons la première inégalité
     Nous allons, à nouveau, utiliser la formule de Taylor-Lagrange en $x_0 = 1$ appliquée, cette fois ci à $\ln x$. D'après 4.4.1, il existe $\theta \in \left]0;1\right[$ tel que

     $$f(x) = f(1) + (x-1) f'(1) + \frac{(x-1)^2}{2} f''(\theta x) \Longleftrightarrow \ln x = x - 1 + \frac{(x-1)^2}{2} \times \frac{-1}{(\theta x)^2}$$

     C'est à dire que $\ln x - (x-1) = \dfrac{(x-1)^2}{2} \times \dfrac{-1}{(\theta x)^2} \leqslant 0$, c'est à dire que, si $x \geqslant 1$ alors $\ln x \leqslant x - 1$
   - Démontrons la seconde inégalité
     Ici, le meilleur choix est encore celui de la fonction auxiliaire $\psi(x) = 1 - \dfrac{1}{x} - \ln x$ dont la dérivée est donnée par $\psi'(x) = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{1-x}{x^2}$
     Il est facile de voir que le maximum est atteint en $x = 1$, et donc, pour tout $x > 0$, $\psi(x) \leqslant \psi(1) = 0$ et donc, nous avons $1 - \dfrac{1}{x} \leqslant \ln x$ dès que $x \geqslant 1$

D'où, en faisant la synthèse, pour tout $x \geqslant 1$, nous avons $1 - \dfrac{1}{x} \leqslant \ln x \leqslant x - 1$

Ainsi, si $0 < b \leqslant a \Longleftrightarrow 1 \leqslant \dfrac{a}{b}$, nous avons $1 - \dfrac{b}{a} \leqslant \ln\left(\dfrac{a}{b}\right) \leqslant \dfrac{a}{b} - 1$, ce qui veut dire que nous avons, pour $0 < b \leqslant a$, $\dfrac{a-b}{a} \leqslant \ln\left(\dfrac{a}{b}\right) \leqslant \dfrac{a-b}{b}$

Exercice 9 :

Etudier les fonctions suivantes et les représenter graphiquement :

1. $f(x) = \ln(\sin x)$

$\longrightarrow$ Dans un premier temps, nous pouvons remarquer que f est périodique et de période 2π. Dans un second temps, f n'est définie que si $\sin x > 0$. Nous n'étudierons donc f que sur l'intervalle $]0;\pi[$.
D'autre part, comme pour tout $x \in]0;\pi[$, $0 < \sin x \leqslant 1$, nous avons $f(x) \leqslant 0$

$\longrightarrow$ Si nous étudions les limites de f, nous avons $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to\pi\\ x<\pi}} f(x) = -\infty$

$\longrightarrow$ Le calcul de la dérivée nous donne $f'(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x}$.
Donc, si $0 < x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ alors $f'(x) \geqslant 0$ et si $\dfrac{\pi}{2} \leqslant x < \pi$, alors $f'(x) \leqslant 0$.
Ce qui nous donne pour tableau de variations :

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

D'où le graphe *(figure 5.17)*

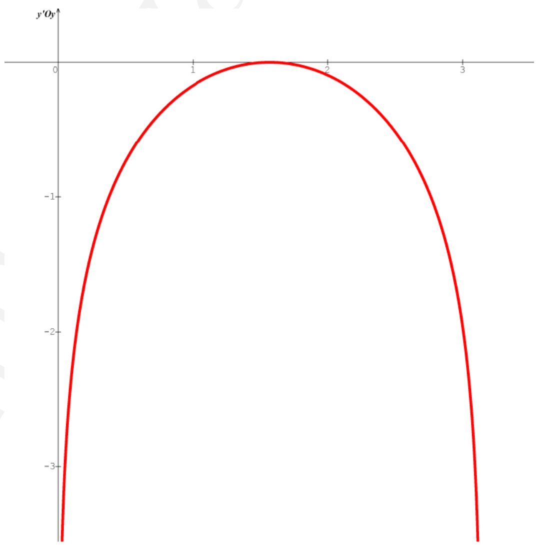

FIGURE 5.17 – Le graphe de la fonction $f(x) = \ln(\sin x)$

2. $g(x) = \ln\left(\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\right)$

Nous avons $g(x) = \ln\left(\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\right) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

$\longrightarrow$ Dans un premier temps, intéressons nous au domaine de définition.

Nous devons avoir $\dfrac{1+x}{1-x} > 0$ et $x \neq 1$; d'où on trouve comme domaine de définition $]-1;+1[$

$\longrightarrow$ Etudions les limites aux bornes du domaine de définition

- Nous avons $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \dfrac{1+x}{1-x} = 0$ et donc $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \dfrac{1}{2} \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) = -\infty$
- De même, nous avons $\lim\limits_{\substack{x \to +1 \\ x < +1}} \dfrac{1+x}{1-x} = +\infty$ et donc $\lim\limits_{\substack{x \to +1 \\ x < +11}} \dfrac{1}{2} \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) = +\infty$

$\longrightarrow$ Etudions la dérivée

- Tout calculs faits, $f'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$
- Donc, pour tout $x \in]-1;+1[$, nous avons $f'(x) > 0$ et donc f est strictement croissante sur $]-1;+1[$

D'où le graphe *(figure 5.18)* :

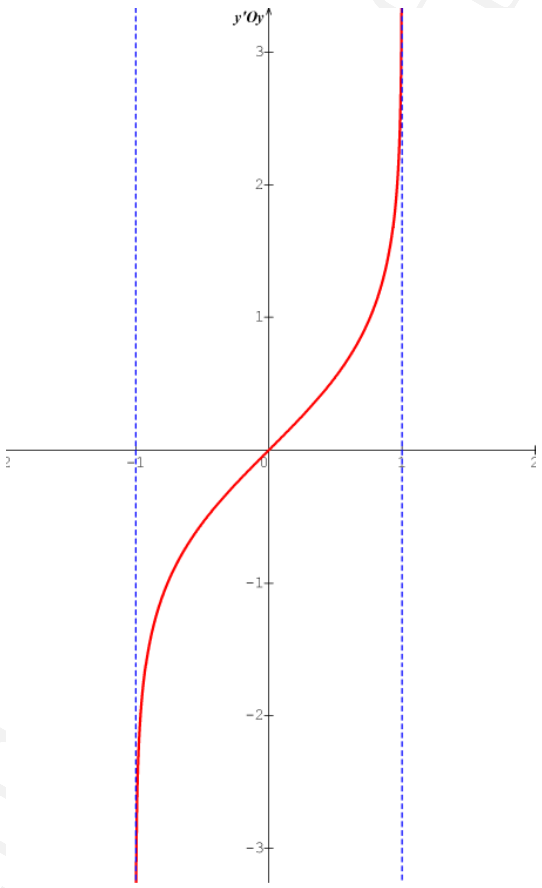

FIGURE 5.18 – Le graphe de la fonction $g(x) = \ln\left(\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\right)$

Exercice 10 :

Soit $a > 0$. Trouver toutes les valeurs de x et y strictement positives vérifiant le système

$$\begin{cases} x^y = & y^x \\ y = & ax \end{cases}$$

Première remarque, c'est que si $a=1$, alors $x=y$ et tout $x>0$ convient.
On suppose maintenant $x\neq 1$
En regardant la première équation, nous avons $x^y=y^x \Longleftrightarrow e^{y\ln x}=e^{x\ln y}$, et, en remplaçant y par ax, nous obtenons $x^y=y^x \Longleftrightarrow e^{y\ln x}=e^{x\ln y}=e^{ax\ln x}=e^{x\ln ax}$. Du fait que la fonction exponentielle est une bijection, nous avons donc :

$$\begin{aligned} ax\ln x = x\ln ax &\Longleftrightarrow ax\ln x = x\ln a + x\ln x \\ &\Longleftrightarrow x\ln x\,(a-1) = x\ln a \\ &\Longleftrightarrow \ln x = \frac{\ln a}{a-1} \text{ pour } a\neq 1 \end{aligned}$$

D'où $x=e^{\frac{\ln a}{a-1}}=a^{\frac{1}{a-1}}$ et $y=ax=a\times a^{\frac{1}{a-1}}=a^{\frac{a}{a-1}}$

Exercice 11 :

Soit $a>0$. Donner $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{a^h-1}{h}$ puis $\lim\limits_{k\to\pm\infty} k\left(a^{\frac{1}{k}}-1\right)$

La dérivée de a^h est donnée par $(\ln a)\,a^h$ et le nombre dérivée de a^h en 0 est donné par $\ln a$. Nous avons donc $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{a^h-1}{h}=\ln a$.

En faisant le changement de variables $k=\dfrac{1}{h}$, nous avons donc $\lim\limits_{k\to\pm\infty} k\left(a^{\frac{1}{k}}-1\right)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{a^h-1}{h}=\ln a$

Exercice 12 :

Nous considérons la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_n=\dfrac{n^n}{n!}$. Donner $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$

Nous avons $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\times\dfrac{n!}{n^n}=\frac{(n+1)^n}{n^n}=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$

Nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=e$, ce qui montre aussi que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^n}{n!}=+\infty$

Exercice 14 :

Donner le domaine de définition et la dérivée des fonctions suivantes

1. $f_1(x)=x^x$
   - ▷ Nous avons donc $f_1(x)=e^{x\ln x}$ et donc le domaine de définition est $\mathbb{R}^{*+}$.
   - ▷ Etude de limites
     - Nous avons $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} x\ln x=0$, et donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} x^x=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} e^{x\ln x}=1$. Nous pouvons donc prolonger f_1 par continuité en 0, en posant $f_1(0)=1$
     - D'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln x=+\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x^x=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x\ln x}=+\infty$
   - ▷ Calcul de la dérivée

     $f_1(x)=x^x=e^{x\ln x}$ est donc du type $f_1(x)=e^{u(x)}$, de dérivée $f_1'(x)=u'(x)\,e^{u(x)}$. la dérivée est donc donnée par :

     $$f_1'(x)=(1+\ln x)\,e^{x\ln x}$$

     La dérivée de f_1 est donc du signe de $1+\ln x$. Ainsi :
     - Si, $0<x\leqslant\dfrac{1}{e}$ alors $f_1'(x)\leqslant 0$ et f_1 y est décroissante
     - Si, $x\geqslant\dfrac{1}{e}$ alors $f_1'(x)\geqslant 0$ et f_1 y est croissante
     - f_1 admet donc un minimum en $x_0=\dfrac{1}{e}$ et, pour tout $x\geqslant 0$, $f_1(x)\geqslant f_1\left(\dfrac{1}{e}\right)=\left(\dfrac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}=e^{\frac{-1}{e}}$

   D'où le graphe *(figure 5.19)* :
2. $f_2(x)=x^{\frac{1}{x}}$

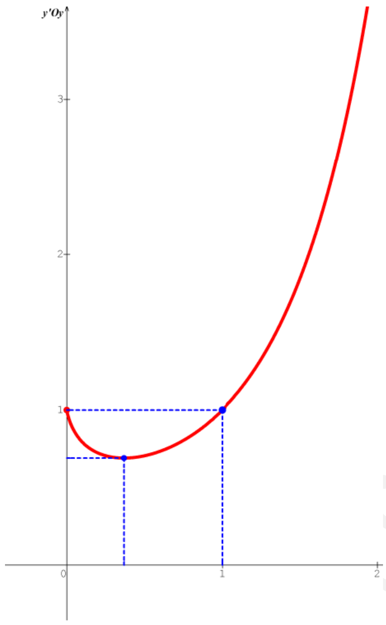

FIGURE 5.19 – Le graphe de la fonction $f_1(x) = x^x$

- ▷ Comme tout à l'heure, nous avons $f_2(x) = x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\times\ln x}$ et donc le domaine de définition est $\mathbb{R}^{*+}$.
- ▷ <u>Etude de limites</u>
  - Nous avons $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{\ln x}{x} = -\infty$, et donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} e^{\frac{\ln x}{x}} = 0$. Nous pouvons donc prolonger f_2 par continuité en 0, en posant $f_2(0) = 0$
  - D'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = 1$
- ▷ <u>Calcul de la dérivée</u>

  Un calcul simple montre que $f_2'(x) = \dfrac{1-\ln x}{x^2} x^{\frac{1}{x}}$ et donc que f_2' est du signe de $1-\ln x$
  - Si, $0 < x \leqslant e$ alors $f_2'(x) \geqslant 0$ et f_2 y est croissante
  - Si, $x \geqslant e$ alors $f_2'(x) \leqslant 0$ et f_2 y est décroissante
  - f_1 admet donc un maximum en $x_0 = e$ et, pour tout $x \geqslant 0$, $f_1(x) \leqslant f_2(e) = e^{\frac{1}{e}} =$

D'où le tableau de variations :

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$e^{\frac{1}{e}}$	$\searrow$	$+1$

Et le graphe *(figure 5.20)* :

3. $f_3(x) = a^{b^x}$ *avec* $a > 0$ *et* $b > 0$ *et* $f_4(x) = a^{x^b}$ *avec* $a > 0$ *et* $b > 0$

Il est intéressant de bien regarder ces fonctions pour éviter beaucoup de confusions.

- ▷ Une première lecture peut être ainsi faite :

  $f_3(x) = \left(a^b\right)^x$ et alors $f_3(x) = e^{xb\ln a}$

  De même $f_4(x) = (a^x)^b$ et alors $f_4(x) = e^{xb\ln a}$ et donc $f_3(x) = f_4(x) = a^{bx}$ et nous avons là, l'étude d'une exponentielle normale.
- ▷ Une seconde lecture donne des résultats bien différents !!

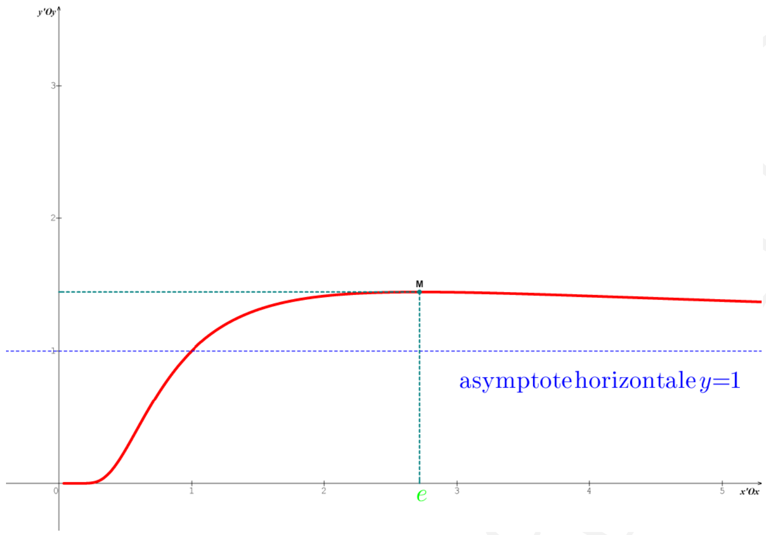

FIGURE 5.20 – Le graphe de la fonction $f_2(x) = x^{\frac{1}{x}}$

En effet, si $f_3(x) = a^{(b^x)} = e^{b^x \ln a} = e^{\ln a e^{x \ln b}}$ et si $f_4(x) = a^{(x^b)} = e^{x^b \ln a} = e^{\ln a e^{b \ln x}}$, nous avons alors $f_3(x) \neq f_4(x)$

▷ *Etude de $f_3(x) = a^{(b^x)}$*

Voilà une très longue étude ! ! Tout d'abord, écrivons $f_3(x) = e^{\ln a e^{x \ln b}}$

- Le domaine de définition est bien sûr $\mathbb{R}$ et la dérivée est donnée par

$$f_3'(x) = \ln a \ln b \times e^{x \ln b} e^{\ln a e^{x \ln b}} = \ln a \ln b \times e^{\left(x \ln b + \ln a e^{x \ln b}\right)}$$

  Le signe de la dérivée ne dépend donc que de celui de $\ln a \ln b$
- Supposons $\ln a \ln b > 0$, c'est à dire $a > 1$ et $b > 1$ ou $0 < a < 1$ et $0 < b < 1$; alors $f_3'(x) > 0$ et f_3 est croissante sur $\mathbb{R}$

  Etude des limites
  - ■ Supposons $a > 1$ et $b > 1$, c'est à dire $\ln a > 0$ et $\ln b > 0$
    - ⋆ Tout d'abord $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln a e^{x \ln b} = +\infty$ et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{\ln a e^{x \ln b}} = +\infty$, c'est à dire $\lim\limits_{x \to +\infty} f_3(x) = +\infty$
    - ⋆ Ensuite, $\lim\limits_{x \to -\infty} x \ln b = -\infty$, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x \ln b} = 0$ et donc $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{\ln a e^{x \ln b}} = 1$, c'est à dire $\lim\limits_{x \to -\infty} f_3(x) = 1$
  - ■ Supposons $0 < a < 1$ et $0 < b < 1$, c'est à dire $\ln a < 0$ et $\ln b < 0$
    - ⋆ Tout d'abord $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x \ln b} = 0$, d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln a e^{x \ln b} = 0$ et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{\ln a e^{x \ln b}} = 1$, c'est à dire $\lim\limits_{x \to +\infty} f_3(x) = 1$
    - ⋆ Ensuite, $\lim\limits_{x \to -\infty} x \ln b = +\infty$, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x \ln b} = +\infty$, puis $\lim\limits_{x \to -\infty} \ln a e^{x \ln b} = -\infty$ et donc $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{\ln a e^{x \ln b}} = 0$, c'est à dire $\lim\limits_{x \to -\infty} f_3(x) = 0$
- D'où les graphes de f_3 pour $\ln a \ln b > 0$ *(figure 5.21)* :
- Supposons $\ln a \ln b < 0$, c'est à dire $a > 1$ et $0 < b < 1$ ou $0 < a < 1$ et $b > 1$; alors $f_3'(x) < 0$ et f_3 est décroissante sur $\mathbb{R}$

  Etude des limites
  - ■ Supposons $a > 1$ et $0 < b < 1$, c'est à dire $\ln a > 0$ et $\ln b < 0$
    - ⋆ Alors $\lim\limits_{x \to +\infty} x \ln b = -\infty$, d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x \ln b} = 0$ et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{\ln a e^{x \ln b}} = 1$, c'est à dire $\lim\limits_{x \to +\infty} f_3(x) = 1$
    - ⋆ Ensuite, $\lim\limits_{x \to -\infty} x \ln b = +\infty$, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x \ln b} = +\infty$ et donc $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{\ln a e^{x \ln b}} = +\infty$, c'est à dire $\lim\limits_{x \to -\infty} f_3(x) = +\infty$

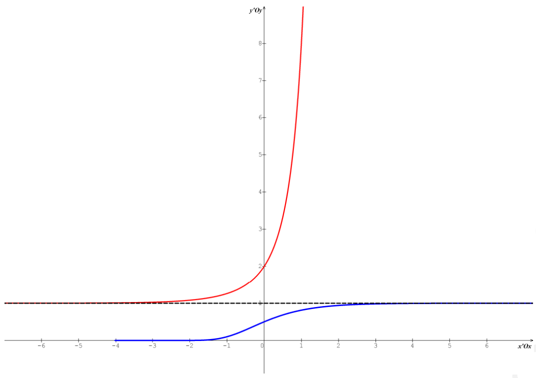

FIGURE 5.21 – Les graphes de la fonction $f_3(x) = a^{(b^x)}$ pour $\ln a \ln b > 0$

■ Supposons $0 < a < 1$ et $b > 1$, c'est à dire $\ln a < 0$ et $\ln b > 0$

- ⋆ Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x\ln b} = +\infty$, d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln a e^{x\ln b} = -\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\ln a e^{x\ln b}} = 0$, c'est à dire $\lim\limits_{x\to+\infty} f_3(x) = 0$
- ⋆ Ensuite, $\lim\limits_{x\to-\infty} x\ln b = -\infty$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x\ln b} = 0$, puis $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln a e^{x\ln b} = 0$ et donc $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{\ln a e^{x\ln b}} = 1$, c'est à dire $\lim\limits_{x\to-\infty} f_3(x) = 1$

- D'où les graphes de f_3 pour $\ln a \ln b < 0$ *(figure 5.22)* :

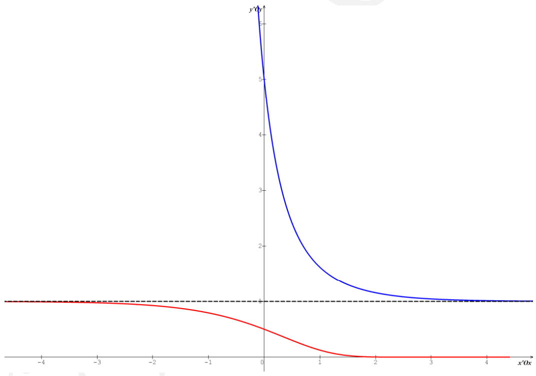

FIGURE 5.22 – Les graphes de la fonction $f_3(x) = a^{(b^x)}$ pour $\ln a \ln b < 0$

▷ *Etude de $f_4(x) = a^{\left(x^b\right)}$*

Nous allons, une nouvelle fois, « triturer » f_4. Nous avons :

$$f_4(x) = a^{\left(x^b\right)} = e^{\left(x^b\right)\ln a} = e^{\left(e^{b\ln x}\right)\ln a} = e^{\ln a e^{b\ln x}}$$

Donc, le domaine de définition de f_4 est $\mathbb{R}^{*+}$

- Calculons la dérivée de f_4.

En posant $u(x) = \ln a e^{b\ln x}$, nous avons $u'(x) = \dfrac{b\ln a}{x} e^{b\ln x}$ et donc :

$$f_4'(x) = \frac{b\ln a}{x} e^{b\ln x} \times e^{\ln a e^{b\ln x}} = \frac{b\ln a}{x} e^{b\ln x + \ln a e^{b\ln x}}$$

Le signe de f_4' ne dépend donc que de celui de $\ln a$

- Etude de la limite en 0.

Nous avons $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} b\ln x = -\infty$ et donc $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} e^{b\ln x} = 0$, tout comme $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \ln a \times e^{b\ln x} = 0$

Donc, pour tout $a > 0$, nous avons $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f_4(x) = 1$

Il nous est donc possible de prolonger f_4 en 0, en posant $f_4(0) = 1$

- Etude de la limite en $+\infty$.
  Tout d'abord, nous avons $\lim\limits_{x\to+\infty} b\ln x = +\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{b\ln x} = +\infty$
  - ⋆ Si $\ln a > 0$, c'est à dire si $a > 1$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln a e^{b\ln x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_4(x) = +\infty$
  - ⋆ Si $\ln a < 0$, c'est à dire si $0 < a < 11$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln a e^{b\ln x} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_4(x) = 0$
- Signe de la dérivée.
  - ⋆ Si $\ln a > 0$, c'est à dire si $a > 1$, alors $\ln a > 0$ et alors $f_4'(x) > 0$ et f_4 est croissante.
  - ⋆ Si $\ln a < 0$, c'est à dire si $0 < a < 11$, alors $\ln a < 0$ et alors $f_4'(x) < 0$ et f_4 est décroissante.
- D'où les graphes de f_4 *(figure 5.23)* :

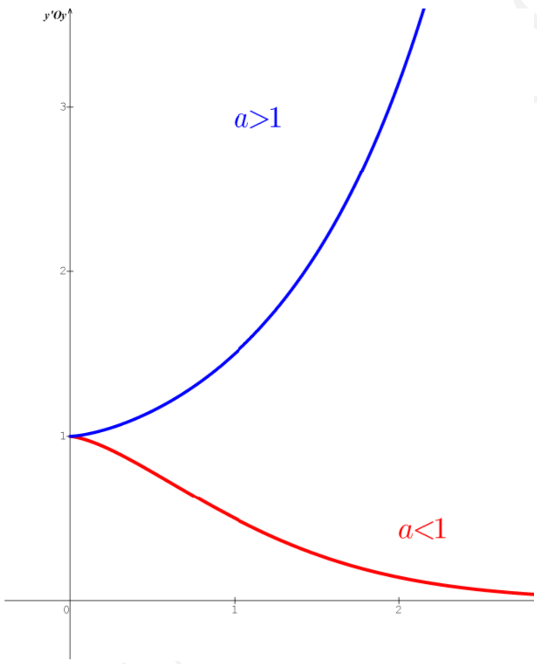

FIGURE 5.23 – Les graphes de la fonction $f_4(x) = a^{\left(x^b\right)}$ pour $a > 1$ et $0 < a < 1$

Il y a,cependant, des cas triviaux, que nous n'avons pas évoqués :

- ⧫ Pour $f_3(x) = a^{\left(b^x\right)} = e^{\ln a e^{x\ln b}}$, si $b = 1$, nous obtenons la fonction constante $f_3(x) = a$ et si $a = 1$, nous obtenons la fonction constante $f_3(x) = 1$, pour tout $b > 0$
- ⧫ Pour $f_4(x) = a^{\left(x^b\right)} = e^{\ln a e^{b\ln x}}$, si $b = 1$, nous obtenons $f_4(x) = e^{\ln a e^{\ln x}} = e^{x\ln a} = a^x$; c'est une fonction exponentielle de base a, et si $a = 1$, nous obtenons à nouveau la fonction constante $f_4(x) = 1$, pour tout $b > 0$

Exercice 16 :

1. *Etudier et représenter la fonction $g(x) = \tanh \dfrac{x-1}{x+1}$*

⟶ Le domaine de définition de g est $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

⟶ Limites aux bornes du domaine

⇝ Nous avons $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x-1}{x+1} = 1$ et donc $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \tanh \dfrac{x-1}{x+1} = \tanh 1 \simeq 0,761594156$

⇝ D'autre part, $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} \dfrac{x-1}{x+1} = -\infty$ et donc $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} \tanh \dfrac{x-1}{x+1} = -1$

⇝ De même, $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} \dfrac{x-1}{x+1} = +\infty$ et donc $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} \tanh \dfrac{x-1}{x+1} = +1$

$\longrightarrow$ Calcul de la dérivée

g est une fonction du type $g(x) = \tanh u(x)$ et a donc pour dérivée $g'(x) = u'(x)\tanh' u(x) = \dfrac{u'(x)}{\cosh^2 u(x)}$

g' est donc du signe de $u'(x) = \dfrac{2}{(x+1)^2}$ et donc, pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$, nous avons $g'(x) > 0$

D'où le graphes de g *(figure 5.24)* :

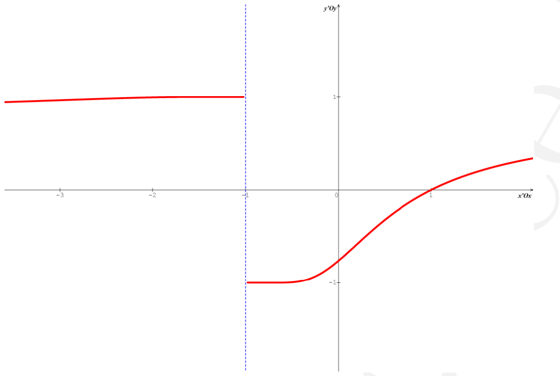

FIGURE 5.24 – Le graphe de la fonction $g(x) = \tanh \dfrac{x-1}{x+1}$

2. *Quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes que doit vérifier $\lambda \in \mathbb{R}$ pour que la fonction $h_\lambda(x) = \dfrac{1}{\lambda + \cosh x}$ soit définie ? Etudier et représenter la fonction $h_2(x) = \dfrac{1}{2+\cosh x}$*

   Pour que h_λ, il faut que $\lambda + \cosh x \neq 0$. Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $\cosh x \geqslant 1$, donc $\cosh x + \lambda \geqslant 1 + \lambda$ et donc nous devons avoir $\lambda > -1$

   L'étude de la fonction $h_2(x) = \dfrac{1}{2+\cosh x}$ ne pose aucune difficulté et est déduite de celle de $\cosh x$. Nous avons, en particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 < \dfrac{1}{2+\cosh x} \leqslant \dfrac{1}{3}$

   En fait, pour tout $\lambda > -1$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $0 < \dfrac{1}{\lambda + \cosh x} \leqslant \dfrac{1}{1+\lambda}$

5.6.3 Croissances comparées

Exercice 19 :

1. *Soit $n \in \mathbb{N}$ et nous considérons la fonction f_n définie par :*

$$\begin{cases} f_n : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \quad x & \longmapsto & \begin{cases} 0 \text{ si } x = 0 \\ \dfrac{1}{x^n} e^{-\frac{1}{x^2}} \text{ si } x \neq 0 \end{cases} \end{cases}$$

   Montrer que f_n est continue en 0 et dérivable en 0

   ▹ Il est clair que f_n est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$

   ▹ Il faut donc étudier la continuité de f_n en 0

   Faisons le changement de variable $X = \dfrac{1}{x^2}$ alors $x^2 = \dfrac{1}{X}$ et $x = \dfrac{1}{\sqrt{X}}$ ou $x = \dfrac{-1}{\sqrt{X}}$

   $\longrightarrow$ Si $x > 0$, alors $\dfrac{1}{x^n} e^{-\frac{1}{x^2}} = \dfrac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{X}}\right)^n} e^{-X} = X^{\frac{n}{2}} e^{-X}$ et donc :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x^n} e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to +\infty} X^{\frac{n}{2}} e^{-X} = \lim_{x \to +\infty} \frac{X^{\frac{n}{2}}}{e^X} = 0$$

   f_n est donc continue à droite de 0

$\longrightarrow$ Si $x < 0$, alors $\dfrac{1}{x^n}e^{-\frac{1}{x^2}} = \dfrac{1}{\left(\frac{-1}{\sqrt{X}}\right)^n}e^{-X} = (-1)^n X^{\frac{n}{2}}e^{-X}$ et donc :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x^n}e^{-\frac{1}{x^2}} = (-1)^n \lim_{x\to+\infty} X^{\frac{n}{2}}e^{-X} = \lim_{x\to+\infty} \frac{X^{\frac{n}{2}}}{e^X} = 0$$

f_n est donc continue à gauche de 0

f_n étant continue à droite et à gauche de 0 est donc continue en 0, et de manière générale, continue sur $\mathbb{R}$

▷ Etudions la dérivabilité de f_n en 0

Nous avons :

$$\frac{f_n(x) - f_n(0)}{x} = \frac{\frac{1}{x^n}e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = \frac{1}{x^{n+1}}e^{-\frac{1}{x^2}}$$

Et, d'après l'étude précédente, nous avons $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^{n+1}}e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$, donc $f_n'(0)$ existe et $f_n'(0) = 0$

f_n est donc dérivable sur $\mathbb{R}$

2. *Démontrer que la fonction g définie par :*

$$\begin{cases} g : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \quad x & \longmapsto & \begin{cases} 0 \text{ si } x = 0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}} \text{ si } x \neq 0 \end{cases} \end{cases}$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$

▷ Tout d'abord g est continue et dérivable en 0

$\longrightarrow$ Continue parce que $\lim\limits_{x\to 0} -\dfrac{1}{x^2} = -\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0 = g(0)$.

$\longrightarrow$ Dérivable puisque, si nous regardons le rapport $\dfrac{g(x) - g(0)}{x}$, nous avons :

$$\frac{g(x) - g(0)}{x} = \frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x^2}}$$

D'après la question précédente, nous avons $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$.

Ainsi, g est dérivable en 0 et $g'(0) = 0$

$\longrightarrow$ Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, nous avons $g'(x) = \dfrac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$. g est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$

▷ Nous allons démontrer, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, g est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ et que :

$$g^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{\alpha_n}}e^{-\frac{1}{x^2}} \text{ et } g^{(n)}(0) = 0$$

Avec P_n polynôme et $\alpha_n \in \mathbb{N}$

⋆ C'est vrai pour $n = 1$ puisque $g'(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$. Nous avons $P_1(x) = 2$ et $\alpha_1 = 3$

⋆ Supposons que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, g est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ et que :

$$g^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{\alpha_n}}e^{-\frac{1}{x^2}} \text{ et } g^{(n)}(0) = 0$$

Avec P_n polynôme et $\alpha_n \in \mathbb{N}$

⋆ Démontrons le à l'ordre $n + 1$

$\longrightarrow$ Tout d'abord, $g^{(n+1)}(0) = \dfrac{g^{(n)}(x) - g^{(n)}(0)}{x} = \dfrac{P_n(x)}{x^{\alpha_n+1}}e^{-\frac{1}{x^2}}$

Comme $P_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{p_n} a_k x^k$, nous avons $\dfrac{P_n(x)}{x^{\alpha_n+1}}e^{-\frac{1}{x^2}} = \sum\limits_{k=0}^{p_n} \dfrac{a_k}{x^{\alpha_n+1-k}}e^{-\frac{1}{x^2}}$.

Or, nous avons que pour tout k tel que $0 \leqslant k \leqslant p_n$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a_k}{x^{\alpha_n+1-k}}e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$, d'où nous déduisons que $\lim\limits_{x\to 0} \sum\limits_{k=0}^{p_n} \dfrac{a_k}{x^{\alpha_n+1-k}}e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$, c'est à dire $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{g^{(n)}(x) - g^{(n)}(0)}{x} = 0$, et donc $g^{(n+1)}(0) = 0$

$\longrightarrow$ Pour $x \neq 0$, nous avons $g^{(n+1)}(x) = \left(\dfrac{P_n(x)}{x^{\alpha_n+1}} e^{-\frac{1}{x^2}}\right)'$. Or :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{P_n(x)}{x^{\alpha_n}} e^{-\frac{1}{x^2}}\right)' &= \left(\frac{P_n(x)}{x^{\alpha_n}}\right)' e^{-\frac{1}{x^2}} + \frac{P_n(x)}{x^{\alpha_n}} \left(e^{-\frac{1}{x^2}}\right)' \\
&= \left(\frac{x^{\alpha_n} P_n'(x) - \alpha_n x^{\alpha_n - 1} P_n(x)}{x^{2\alpha_n}} + \frac{2P_n(x)}{x^{\alpha_n+3}}\right) e^{-\frac{1}{x^2}} \\
&= \left(\frac{x^{\alpha_n+3} P_n'(x) - \alpha_n x^{\alpha_n+2} P_n(x) + 2x^{\alpha_n} P_n(x)}{x^{2\alpha_n+3}}\right) e^{-\frac{1}{x^2}} \\
&= \left(\frac{\left(2x^{\alpha_n} - \alpha_n x^{\alpha_n+2}\right) P_n(x) + x^{\alpha_n+3} P_n'(x)}{x^{2\alpha_n+3}}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}
\end{aligned}$$

Nous avons donc $P_{n+1}(x) = \left(2x^{\alpha_n} - \alpha_n x^{\alpha_n+2}\right) P_n(x) + x^{\alpha_n+3} P_n'(x)$ et $\alpha_{n+1} = 2\alpha_n + 3$

$\longrightarrow$ Comme tout à l'heure, nous avons $\lim\limits_{x \to 0} g^{(n+1)}(x) = 0$

g est donc de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}$

C'est à dire que g est de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $\mathbb{R}$

On peut connaître explicitement le degré du polynôme P_n et la valeur de α_n

Nous avons, en fait :

- $\deg P_{n+1} = \deg P_n + \alpha_n + 2$
- $\alpha_{n+1} = 2\alpha_n + 3$

avec $\deg P_1 = 0$ et $\alpha_1 = 3$

(a) Commençons par étudier la suite $(\alpha_n)_{n \geqslant 1}$.
En prenant la suite auxiliaire $(v_n)_{n \geqslant 1}$ définie par $v_n = \alpha_n + 3$, la suite $(v_n)_{n \geqslant 1}$ est géométrique, de raison 2 et de premier terme $v_1 = 6$.
Nous obtenons donc $v_n = 2^{n-1} v_1 = 6 \times 2^{n-1} = 3 \times 2^n$
Donc, $\alpha_n + 3 = 3 \times 2^n \iff \alpha_n = 3 \times 2^n - 3$

(b) Pour nous simplifier la vie, posons $D_n = \deg P_n$. Nous avons alors :

$$D_{n+1} = D_n + 3 \times 2^n - 3 + 2 \iff D_{n+1} = D_n + 3 \times 2^n - 1$$

En faisant les sommations, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} D_{k+1} &= \sum_{k=1}^{n} D_k + 3 \sum_{k=1}^{n} 2^k - \sum_{k=1}^{n} 1 \\
&= \sum_{k=1}^{n} D_k + 3 \times 2\left(2^n - 1\right) - n
\end{aligned}$$

Donc, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} D_{k+1} - \sum_{k=1}^{n} D_k = 3 \times 2\left(2^n - 1\right) - n \iff D_{n+1} - D_1 = 6\left(2^n - 1\right) - n \iff$ $D_{n+1} = 6\left(2^n - 1\right) - n$

(c) Nous obtenons donc :

$$\alpha_n = 3 \times 2^n - 3 \quad \text{et} \quad D_n = 6\left(2^{n-1} - 1\right) + 1 - n$$

Exercice 20 :

Démontrer que la dérivée n-ième de la fonction $g(x) = e^{-x^2}$ est de la forme $g^{(x)} = P_n(x) e^{-x^2}$ où P_n est un polynôme de degré n et de coefficient dominant $(-2)^n$

Nous allons démontrer, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $g^{(x)} = P_n(x) e^{-x^2}$

▷ C'est évidemment vrai pour $n = 0$, où $P_0(x) = 1$; on peut remarqer que $\deg P_0 = 0$ et que $1 = (-2)^0$

- ▷ Supposons qu'à l'ordre n, nous avons $g^{(x)} = P_n(x)\,e^{-x^2}$ où P_n est un polynôme de degré n et de coefficient dominant $(-2)^n$
- ▷ A l'ordre $n+1$, nous avons :

$$g^{(x)} = \left(P_n(x)\,e^{-x^2}\right)' = P_n'(x)\,e^{-x^2} - 2xP_n(x)\,e^{-x^2} = \left(P_n'(x) - 2xP_n(x)\right)e^{-x^2}$$

Et donc $P_{n+1}(x) = P_n'(x) - 2xP_n(x)$.
$\longrightarrow$ Si $\deg P_n = n$, alors $\deg -2xP_n = n+1$ et comme $\deg P_n' = n-1$, nous avons $\deg P_{n+1} = n+1$
$\longrightarrow$ D'autre part, si $P_n(x) = (-2)^n x^n + Q_{n-1}(x)$, alors $-2xP_n(x) = -2x \times (-2)^n x^n + Q_{n-1}(x)$ et donc, le coefficient dominant de P_{n+1} est donc $(-2)^{n+1}$

Ce que nous voulions

5.6.4 Miscelleanous

Exercice 21 :

Trouver $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}}$

Voilà une expression que nous avons plus ou moins travaillée!!

- Nous avons déjà $(x^x)^x = e^{x\ln x^x} = e^{x^2\ln x}$
- Nous avons aussi, $x^{(x^x)} = e^{x^x\ln x}$; comme $x^x\ln x = \ln x e^{x\ln x}$, nous avons $x^{(x^x)} = e^{\ln x e^{x\ln x}}$
- De telle sorte que $\dfrac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}} = e^{x^2\ln x - \ln x e^{x\ln x}} = e^{x^2\ln x\left(1-\frac{1}{x^2}e^{x\ln x}\right)}$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\ln x\left(1 - \dfrac{1}{x^2}e^{x\ln x}\right) = -\infty$, nous avons $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x^2\ln x\left(1-\frac{1}{x^2}e^{x\ln x}\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}} = 0$

Exercice 22 :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. *Nous notons :*

$$\left\{\begin{array}{rcl} f_\alpha : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f_\alpha(x) = e^{\alpha x}\end{array}\right.$$

Montrer que la famille de fonctions $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}}$ *est une une famille libre du* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel* $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

Pour montrer que la famille de fonctions $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}}$ est une une famille libre du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, il faut montrer que toute famille finie $(f_{\alpha_i})_{1\leqslant i\leqslant n}$ extraite de $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}}$ est une famille libre, c'est à dire que l'implication suivante :

$$\lambda_1 f_{\alpha_1} + \lambda_2 f_{\alpha_2} + \cdots + \lambda_n f_{\alpha_n} = \mathcal{O} \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$$

est vraie.
Supposons donc qu'il existe $\lambda_1 \in \mathbb{R}, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 f_{\alpha_1} + \lambda_2 f_{\alpha_2} + \cdots + \lambda_n f_{\alpha_n} = \mathcal{O}$; ceci sgnifie donc que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 f_{\alpha_1}(x) + \lambda_2 f_{\alpha_2}(x) + \cdots + \lambda_n f_{\alpha_n}(x) = 0$.
Pour simplifier, quitte à réordonner, nous supposons $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n$. L'hypothèse donne donc :

$$\lambda_1 e^{\alpha_1 x} + \lambda_2 e^{\alpha_2 x} + \cdots \lambda_n e^{\alpha_n x} = 0$$

Nous appelons $\varphi(x) = \lambda_1 e^{\alpha_1 x} + \lambda_2 e^{\alpha_2 x} + \cdots + \lambda_n e^{\alpha_n x}$

- ▷ Regardons le comportement de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
Factorisons par $e^{\alpha_n x}$; alors :

$$\varphi(x) = e^{\alpha_n x}\left(\lambda_1 e^{(\alpha_1-\alpha_n)x} + \lambda_2 e^{(\alpha_2-\alpha_n)x} + \cdots + \lambda_n\right) = 0$$

Comme, pour tout i tel que $1 \leqslant i \leqslant n-1$, nous avons $(\alpha_i - \alpha_n) < 0$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \lambda_i e^{(\alpha_i-\alpha_n)x} = 0$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \lambda_n e^{\alpha_n x} = 0$, car, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = 0$.
Comme, pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $e^{\alpha_n x} > 0$, nous en déduisons que $\lambda_n = 0$
D'où $\varphi(x) = \lambda_1 e^{\alpha_1 x} + \lambda_2 e^{\alpha_2 x} + \cdots + \lambda_{n-1} e^{\alpha_{n-1} x}$
- ▷ Nous poursuivons en factorisant par $e^{\alpha_{n-1} x}$, et en faisant le même raisonnement que ci-dessus, nous obtenons $\lambda_{n-1} = 0$

▷ Et ainsi de suite jusque $\lambda_1 = 0$

Nous avons donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$, ce qui montre que la famille $(f_{\alpha_i})_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est libre, et que, plus généralement, la famille $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$ est une une famille libre.
Ce que nous voulions

Exercice 23 :

1. *Démontrer que la fonction logarithme $\ln$ n'est la restriction sur $]0; +\infty[$ d'aucune fonction fraction rationnelle*

   Supposons donc que, pour tout $x > 0$, nous ayions $\ln x = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ où P est le polynôme $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ avec $a_n \neq 0$ et $Q(x) = b_p x^p + \cdots + b_0$ avec $b_p \neq 0$.

   Comme $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$, et que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{a_n x^n}{b_p x^p}$, nous avons $n > p$ et $\dfrac{a_n}{b_p} > 0$

   Dans le cours, nous avons vu que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, donc, si $\ln x = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ lorsque $x > 0$, nous avons : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{P(x)}{xQ(x)} = 0$. Or :

   $$\lim_{x \to +\infty} \frac{P(x)}{xQ(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{a_n x^n + \cdots + a_0}{b_p x^{p+1} + \cdots + b_0 x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{a_n x^n}{b_p x^{p+1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{a_n}{b_p} x^{n-p-1}$$

   ▷ Si $n = p + 1$, alors $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{P(x)}{xQ(x)} = \frac{a_n}{b_p} > 0$, ce qui est impossible, puisque $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

   ▷ Si $n > p+1$, alors $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{P(x)}{xQ(x)} = +\infty$, ce qui est à nouveau impossible, puisque $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

   Ainsi, l'hypothèse $\ln x = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ sur $]0; +\infty[$ est contradictoire.

   Donc, la fonction logarithme ln n'est la restriction sur $]0; +\infty[$ d'aucune fonction fraction rationnelle

2. *Démontrer que la fonction exponentielle $\exp$ n'est pas une fonction fraction rationnelle*

   Supposons donc que, pour tout $x > 0$, nous ayions $e^x = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ où P est le polynôme $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ avec $a_n \neq 0$ et $Q(x) = b_p x^p + \cdots + b_0$ avec $b_p \neq 0$.

   Comme $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$, et que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{a_n x^n}{b_p x^p}$, nous avons $n > p$ et $\dfrac{a_n}{b_p} > 0$ [3]

   Faisons un calcul de dérivée basique :

   $$(e^x)' = \left(\frac{P(x)}{Q(x)}\right)' \Longleftrightarrow e^x = \frac{P'(x)\,Q(x) - Q'(x)\,P(x)}{(Q(x))^2} = \frac{P(x)}{Q(x)} \Longleftrightarrow P'(x)\,Q(x) - Q'(x)\,P(x) = P(x)\,Q(x)$$

   Nous avons donc l'égalité $P'Q - Q'P = PQ$. En considérant les degrés des polynômes, nous avons :
   - ⋆ $\deg(PQ) = n + p$
   - ⋆ $\deg(P'Q) = n - 1 + p$ et $\deg(PQ') = n + p - 1$
   - ⋆ Et donc $\deg(P'Q - Q'P) \leqslant n + p - 1$

   Ce qui est en contradiction avec $P'Q - Q'P = PQ$

   Donc, la fonction exponentielle exp n'est pas une fonction fraction rationnelle.

Exercice 24 :

Démontrer que, pour tout $x \in]0; +1[$, nous avons $x^x (1-x)^{1-x} \geqslant \dfrac{1}{2}$

Ce n'est pas un exercice bien difficile, plutôt calculatoire.
Nous appelons $\varphi(x) = x^x (1-x)^{1-x}$ et $u(x) = \ln \varphi(x) = x \ln x + (1-x) \ln(1-x)$

3. Mais, ceci ne nous apportera rien !!

- Dérivons u ; nous avons $u'(x) = 1 + \ln x - \ln(1-x) - 1 = lnx - \ln(1-x) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$

  Nous pouvons remarquer que, pour tout $x \in]0;+1[$, nous avons $\frac{x}{1-x} > 0$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} u'(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} u'(x) = +\infty$.

  De plus, $u'(x) = 0 \Longleftrightarrow \frac{x}{1-x} = 1 \Longleftrightarrow x = \frac{1}{2}$

  Par contre, il est assez difficile de connaître le comportement de $u'(x)$ sur l'intervalle $]0;+1[$
- Tentons dons la dérivée seconde de u :

$$u''(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} = \frac{1}{x(1-x)}$$

  Nous avons donc, pour tout $x > 0$, $u''(x) > 0$
- Ainsi, $u'(x)$ est une fonction croissante sur $]0;+1[$

  $\longrightarrow$ Si $0 < x \leqslant \frac{1}{2}$, alors $u'(x) \leqslant 0$ et si $\frac{1}{2} \leqslant x < +1$, alors $u'(x) \geqslant 0$

  $\longrightarrow$ C'est à dire que u est décroissante sur $\left]0;\frac{1}{2}\right]$ et croissante sur $\left[\frac{1}{2}:+1\right[$

  $\longrightarrow$ Et donc, pour tout $x \in]0;+1[$, nous avons $u(x) \geqslant u\left(\frac{1}{2}\right)$

  Or, $u\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\frac{1}{2}$.

  Nous en déduisons que, pour tout $x \in]0;+1[$, nous avons :

$$\ln\varphi(x) \geqslant \ln\frac{1}{2} \Longleftrightarrow \varphi(x) \geqslant \frac{1}{2} \Longleftrightarrow x^x(1-x)^{1-x} \geqslant \frac{1}{2}$$

  Ce que nous voulions

Exercice 25 :

1. *Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, nous avons $\tanh x = \frac{2}{\tanh 2x} - \frac{1}{\tanh x}$*

   Nous allons utiliser les formules d'addition des fonctions hyperboliques qui ont déjà été démontrées. Nous avons, en particulier :

$$\tanh 2x = \frac{2\tanh x}{1+\tanh^2 x}$$

   Donc :

$$\begin{aligned}\frac{2}{\tanh 2x} - \frac{1}{\tanh x} &= \frac{2\left(1+\tanh^2 x\right)}{2\tanh x} - \frac{1}{\tanh x}\\ &= \frac{1+\tanh^2 x - 1}{\tanh x}\\ &= \tanh x\end{aligned}$$

   Ce que nous voulions [4]

2. *En déduire $\sum\limits_{k=0}^{n} 2^k \tanh\left(2^k x\right)$*

   En réutilisant le résultat précédent, nous avons :

$$2^k\tanh\left(2^k x\right) = 2^k\left(\frac{2}{\tanh\left(2\times\left(2^k x\right)\right)} - \frac{1}{\tanh\left(2^k x\right)}\right) = \frac{2^{k+1}}{\tanh\left(2^{k+1}x\right)} - \frac{2^k}{\tanh\left(2^k x\right)}$$

4. Simple comme ≪ Bonjour ! ! ≫

D'où :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} 2^k \tanh\left(2^k x\right) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{2^{k+1}}{\tanh\left(2^{k+1}x\right)} - \frac{2^k}{\tanh\left(2^k x\right)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{2^{k+1}}{\tanh\left(2^{k+1}x\right)} - \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{\tanh\left(2^k x\right)} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{2^{k}}{\tanh\left(2^{k}x\right)} - \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{\tanh\left(2^k x\right)} \\
&= \frac{2^{n+1}}{\tanh\left(2^{n+1}x\right)} - \frac{1}{\tanh x}
\end{aligned}$$

Donc, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k \tanh\left(2^k x\right) = \frac{2^{n+1}}{\tanh\left(2^{n+1}x\right)} - \frac{1}{\tanh x}$

Exercice 26 :

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. Evaluer $\Pi_n(x) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \cosh\left(\frac{x}{2^k}\right)$. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \Pi_n(x)$

▷ La clef de la démonstration tient dans les différents formules des fonctions hyperboliques. Nous avons :

$$\sinh 2x = 2\sinh x \cosh x \Longleftrightarrow \cosh x = \frac{\sinh 2x}{2\sinh x}$$

De telle sorte que $\cosh\left(\dfrac{x}{2^k}\right) = \dfrac{\sinh\left(\dfrac{x}{2^{k-1}}\right)}{2\sinh\left(\dfrac{x}{2^k}\right)}$. D'où :

$$\begin{aligned}
\Pi_n(x) = \prod_{k=1}^{n} \cosh\left(\frac{x}{2^k}\right) &= \quad \Pi_n(x) = \prod_{k=1}^{n} \frac{\sinh\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)}{2\sinh\left(\frac{x}{2^k}\right)} \\
&= \frac{1}{2^n} \prod_{k=1}^{n} \frac{\sinh\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)}{\sinh\left(\frac{x}{2^k}\right)} \\
&= \frac{1}{2^n} \times \frac{\sinh x}{\sinh\left(\frac{x}{2}\right)} \times \frac{\sinh\left(\frac{x}{2}\right)}{\sinh\left(\frac{x}{2^2}\right)} \times \cdots \times \frac{\sinh\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right)}{\sinh\left(\frac{x}{2^n}\right)} \\
&= \frac{1}{2^n} \times \frac{\sinh x}{\sinh\left(\frac{x}{2^n}\right)}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\Pi_n(x) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \cosh\left(\frac{x}{2^k}\right) = \frac{1}{2^n} \times \frac{\sinh x}{\sinh\left(\frac{x}{2^n}\right)}$

▷ L'étude de la limite de $\Pi_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$ vient de l'étude d'une limite remarquable.

- Nous avons, en effet, $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\sinh t}{t} = 1$. En voici la démonstration :

$$\begin{aligned}
\frac{\sinh t}{t} &= \frac{e^t - e^{-t}}{2t} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{e^t - 1 + 1 - e^{-t}}{t}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{e^t - 1}{t} + \frac{1 - e^{-t}}{t}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{e^t - 1}{t} + \frac{e^{-t} - 1}{-t}\right)
\end{aligned}$$

Nous avons, comme limite remarquable : $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{e^t-1}{t}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{e^{-t}-1}{-t}=1$, et donc :

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sinh t}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{2}\left(\frac{e^t-1}{t}+\frac{e^{-t}-1}{-t}\right)=1$$

Et, en corollaire, $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\sinh t}=1$

- D'où nous tirons $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\dfrac{x}{2^n}}{\sinh\left(\dfrac{x}{2^n}\right)}=1$

Or, $\Pi_n(x)=\dfrac{1}{2^n}\times\dfrac{\sinh x}{\sinh\left(\dfrac{x}{2^n}\right)}=\dfrac{\sinh x}{x}\times\dfrac{\dfrac{x}{2^n}}{\sinh\left(\dfrac{x}{2^n}\right)}$, et donc :

$$\lim_{n\to+\infty}\Pi_n(x)=\frac{\sinh x}{x}$$

Exercice 27 :

Soit $G:\left]-\dfrac{\pi}{2};+\dfrac{\pi}{2}\right[\longrightarrow\mathbb{R}$ *définie, pour tout* $t\in\left]-\dfrac{\pi}{2};+\dfrac{\pi}{2}\right[$ *par* $G(t)=\operatorname{Arg}\sinh(\tan t)$

1. *Montrer que* G *est dérivable sur* $\left]-\dfrac{\pi}{2};+\dfrac{\pi}{2}\right[$ *et que, pour tout* $t\in\left]-\dfrac{\pi}{2};+\dfrac{\pi}{2}\right[$*, nous avons*

$$G'(t)=\cosh(G(t))$$

▷ G est la fonction composée de 2 fonctions bijectives, continues et dérivables :

$$\tan:\left]-\frac{\pi}{2};+\frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow\mathbb{R}\text{ et }\operatorname{Arg}\sinh:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$$

Donc, G est une fonction bijective, continue et dérivable.

▷ D'après les résultats sur la composition des fonctions dérivables, nous avons $G'(t)=\tan' t\operatorname{Arg}\sinh'(\tan t)$.
Or :
- ⋆ $\tan' t=1+\tan^2 t$
- ⋆ Et $\operatorname{Arg}\sinh' x=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ et donc $\operatorname{Arg}\sinh'(\tan t)=\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2 t}}$

De telle sorte que $G'(t)=\sqrt{1+\tan^2 t}$

Or, des propriétés de bijection, nous pouvons écrire : $\tan t=\sinh(\operatorname{Arg}\sinh(\tan t))=\sinh(G(t))$ et donc $G'(t)=\sqrt{1+\sinh^2(G(t))}$

Comme nous avons $\cosh x=\sqrt{1+\sinh^2 x}$, nous avons donc :

$$G'(t)=\sqrt{1+\sinh^2(G(t))}=\cosh(G(t))$$

Ce que nous voulions

2. *Démontrer que, pour tout* $t\in\left]-\dfrac{\pi}{2};+\dfrac{\pi}{2}\right[$ *nous avons* $\tanh(G(t))=\sin t$

Voilà un exercice classique, que nous retrouvons dans l'étude des fonctions trigonométriques réciproques.
Pour commencer, nous avons, par définition de la fonction $\operatorname{Arg}\sinh$

$$y=\operatorname{Arg}\sinh x\iff\begin{cases}x\in\mathbb{R}\text{ et }y\in\mathbb{R}\\ x=\sinh y\end{cases}$$

Or, $\tanh y=\dfrac{\sinh y}{\cosh y}=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Donc, de $G(t) = \text{Arg}\sinh(\tan t)$ nous tirons, en remplaçant x par $\tan t$:

$$\tanh(G(t)) = \tanh(\text{Arg}\sinh(\tan t)) = \frac{\tan t}{\sqrt{1+\tan^2 t}} = \frac{\sin t \cos t}{\cos t} = \sin t$$

Ce que nous voulions

Exercice 28 :

1. *Soit $\Phi : [0:1[\longrightarrow \mathbb{R}$, l'application définie par :*

$$\left\{\begin{array}{rcl} \Phi : [0:1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \Phi(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) - 2x \end{array}\right.$$

Il faut montrer que, pour tout $x \in [0:1[$, nous avons $\Phi(x) \geqslant 0$

- $\star$ Première remarque, $\Phi(0) = 0$ et comme $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{1+x}{1-x} = +\infty$, nous avons $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \Phi(x) = +\infty$
- $\star$ Une autre écriture de Φ est donnée par : $\Phi(x) = \ln(1+x) - \ln(1-x) - 2x$ et le calcul de dérivée donne :

$$\Phi'(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} - 2 = \frac{1-x+1+x-2\left(1-x^2\right)}{1-x^2} = \frac{2x^2}{1-x^2}$$

  Donc, pour tout $x \in [0:1[$, nous avons $\Phi'(x) \geqslant 0$
- $\star$ Comme la dérivée est positive, la fonction Φ est croissante et donc, pour tout $x \in [0:1[$, nous avons $\Phi(x) \geqslant \Phi(0)$, c'est à dire que pour tout $x \in [0:1[$, nous avons $\Phi(x) \geqslant 0$

Ce que nous voulions

2. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on appelle f_n, l'application définie par :*

$$\left\{\begin{array}{rcl} f_n : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f_n(x) = x^n e^{-x} \end{array}\right.$$

Il faut montrer que, pour tout $x \in [0:n]$, nous avons $f_n(n+x) \geqslant f_n(n-x)$

Ce n'est pas une question d'une grande évidence ! ! Il faut, bien entendu, utiliser la question précédente.

- $\star$ Soit $x \in [0:n[$. Nous avons, dans ce cas, $f_n(n+x) \geqslant 0$ et $f_n(n-x) \geqslant 0$. Nous allons faire le rapport $\dfrac{f_n(n+x)}{f_n(n-x)}$. Donc :

$$\frac{f_n(n+x)}{f_n(n-x)} = \frac{(n+x)^n e^{-n-x}}{(n-x)^n e^{-n+x}} = \left(\frac{n+x}{n-x}\right)^n e^{-2x} = \left(\left(\frac{n+x}{n-x}\right)e^{-2\frac{x}{n}}\right)^n = \left(\left(\frac{1+\frac{x}{n}}{1-\frac{x}{n}}\right)e^{-2\frac{x}{n}}\right)^n$$

- $\star$ En prenant le logarithme, nous avons :

$$\ln\left(\frac{f_n(n+x)}{f_n(n-x)}\right) = \ln\left(\left(\left(\frac{1+\frac{x}{n}}{1-\frac{x}{n}}\right)e^{-2\frac{x}{n}}\right)^n\right) = n\left(\ln\left(\frac{1+\frac{x}{n}}{1-\frac{x}{n}}\right) - 2\frac{x}{n}\right)$$

- $\star$ Comme $x \in [0:n[$, nous avons $\dfrac{x}{n} \in [0:1[$ et donc, comme $\Phi\left(\dfrac{x}{n}\right) = \dfrac{1+\frac{x}{n}}{1-\frac{x}{n}} - 2\dfrac{x}{n} \geqslant 0$, d'où nous déduisons $\ln\left(\dfrac{f_n(n+x)}{f_n(n-x)}\right) \geqslant 0$.

  Or :

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{f_n(n+x)}{f_n(n-x)}\right) \geqslant 0 &\iff \ln(f_n(n+x)) - \ln(f_n(n+x)) \geqslant 0 \\ &\iff \ln(f_n(n+x)) \geqslant \ln(f_n(n+x)) \\ &\iff f_n(n+x) \geqslant f_n(n+x) \end{aligned}$$

  Ce que nous voulions

3. *Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons $\displaystyle\int_0^n f_n(t)\,dt \leqslant \int_n^{2n} f_n(t)\,dt$*

   Intéressons nous à l'intégrale $\displaystyle\int_n^{2n} f_n(t)\,dt$.
   Faisons le changement de variables $t = x + n \Longleftrightarrow x = t - n$ et donc $du = dt$. Nous avons alors :

$$\int_n^{2n} f_n(t)\,dt = \int_0^n f_n(n+x)\,dx$$

   D'après la question précédente, si $x \in [0 : n]$, alors $f_n(n+x) \geqslant f_n(n-x)$. Nous pouvons alors écrire :

$$I_n^{2n} f_n(t)\,dt = \int_0^n f_n(n+x)\,dx \geqslant \int_0^n f_n(n-x)\,dx$$

   Faisons maintenant, dans l'intégrale $\displaystyle\int_0^n f_n(n-x)\,dt$ le changement de variables $t = n - x \Longleftrightarrow x = n - t$ et donc $dx = -dt$. Nous avons alors :

$$\int_0^n f_n(n-x)\,dx = \int_n^0 f_n(t) - dt = \int_0^n f_n(t)\,dt$$

   Et nous avons donc $\displaystyle\int_n^{2n} f_n(t)\,dt \geqslant \int_0^n f_n(t)\,dt \Longleftrightarrow \int_0^n f_n(t)\,dt \leqslant \int_n^{2n} f_n(t)\,dt$
   Ce que nous voulions

4. *Démontrer que, pour tout $x \geqslant 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons : $\displaystyle\int_0^x f_n(t)\,dt = n!\left(1 - e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right)$*

   Nous allons faire cette démonstration par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$
   $\longrightarrow$ **Vérifions pour $n = 1$**
   Nous avons $\displaystyle\int_0^x f_1(t)\,dt = \int_0^x te^{-t}\,dt$.
   En faisant une intégration par tarties, nous avons :

$$\begin{array}{ll} u = t & u' = 1 \\ v' = e^{-t} & v = -e^{-t} \end{array}$$

   Et donc :

$$\begin{aligned} \int_0^x te^{-t}\,dt &= \left[-te^{-t}\right]_0^x + \int_0^x e^{-t}\,dt \\ &= -xe^{-x} + \left[-e^{-t}\right]_0^x \\ &= -xe^{-x} + 1 - e^{-x} \\ &= 1\left(1 - e^{-x}(1+x)\right) \\ &= 1!\left(1 - e^{-x}\sum_{k=0}^{1}\frac{x^k}{k!}\right) \end{aligned}$$

   C'est donc vrai pour $n = 1$
   $\longrightarrow$ **Supposons que c'est vrai à l'ordre n**
   $\longrightarrow$ **Démontrons à l'ordre $n+1$**
   Comme tout à l'heure, nous avons $\displaystyle\int_0^x f_{n+1}(t)\,dt = \int_0^x t^{n+1}e^{-t}\,dt$.
   En faisant une intégration par tarties, nous avons :

$$\begin{array}{ll} u = t^{n+1} & u' = (n+1)\,t^n \\ v' = e^{-t} & v = -e^{-t} \end{array}$$

Et donc :

$$\begin{aligned}\int_0^x t^{n+1}e^{-t}\,dt &= \left[-t^{n+1}e^{-t}\right]_0^x + (n+1)\int_0^x t^n e^{-t}\,dt \\ &= -x^{n+1}e^{-x} + (n+1)\int_0^x f_n(t)\,dt \\ &= -x^{n+1}e^{-x} + (n+1)!\left(1 - e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right) \text{ d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= (n+1)!\left(\frac{-x^{n+1}e^{-x}}{(n+1)!} + 1 - e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right) \\ &= (n+1)!\left(1 - e^{-x}\sum_{k=0}^{n+1}\frac{x^k}{k!}\right)\end{aligned}$$

Ce que nous voulions.

Ainsi, pour tout $x \geqslant 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons : $\displaystyle\int_0^x f_n(t)\,dt = n!\left(1 - e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right)$

5. *Pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, démontrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f_n(t)\,dt = n!$*

   Soit donc $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Alors, pour tout $x \geqslant 0$, nous avons :

$$\left|\int_0^x f_n(t)\,dt - n!\right| = \sum_{k=0}^{n}\frac{e^{-x}x^k \times n!}{k!}$$

   En utilisant les croissances comparées entre la fonction exponentielle et les fonctions puissances, nous avons $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x}x^k \times n!}{k!} = 0$, et donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{e^{-x}x^k \times n!}{k!} = 0$, de telle sorte que

$$\lim_{x\to+\infty}\left|\int_0^x f_n(t)\,dt - n!\right| = 0$$

   et donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f_n(t)\,dt = n!$

6. *Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!} \geqslant \frac{e^n}{2}$*

   De l'identité $\displaystyle\int_0^x f_n(t)\,dt = n!\left(1 - e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right)$, nous tirons, pour $x = n$

$$\int_0^n f_n(t)\,dt = n!\left(1 - e^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}\right)$$

   C'est à dire :

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!} = e^n - \frac{e^n}{n!}\int_0^n f_n(t)\,dt$$

   De telle sorte que :

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!} - \frac{e^n}{2} = \frac{e^n}{2} - \frac{e^n}{n!}\int_0^n f_n(t)\,dt$$

   D'autre part :

$$2\int_0^n f_n(t)\,dt = \int_0^n f_n(t)\,dt + \int_0^n f_n(t)\,dt \leqslant \int_0^n f_n(t)\,dt + \int_n^{2n} f_n(t)\,dt = \int_0^{2n} f_n(t)\,dt$$

Pour tout t tel que $t \geqslant 0$, nous avons $t^n e^{-t} \geqslant 0$ et donc $0 \leqslant \displaystyle\int_0^{2n} f_n(t)\,dt$. D'autre part, pour tout $x \geqslant 2n$, nous avons aussi $\displaystyle\int_0^{2n} f_n(t)\,dt \leqslant \int_0^x f_n(t)\,dt$.

En particulier, $\displaystyle\int_0^{2n} f_n(t)\,dt \leqslant \lim_{x\to+\infty}\int_0^x f_n(t)\,dt = n!$. Ainsi, nous avons

$$2\int_0^n f_n(t)\,dt \leqslant n! \Longleftrightarrow \int_0^n f_n(t)\,dt \leqslant \frac{n!}{2}$$

Donc $\displaystyle\frac{e^n}{n!}\int_0^n f_n(t)\,dt \leqslant \frac{e^n}{n!}\times\frac{n!}{2} = \frac{e^n}{2}$.

Nous en déduisons $\displaystyle -\frac{e^n}{n!}\int_0^n f_n(t)\,dt \geqslant -\frac{e^n}{2}$

Et donc : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!} - \frac{e^n}{2} \geqslant \frac{e^n}{2} - \frac{e^n}{2} = 0$

Nous avons bien, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!} \geqslant \frac{e^n}{2}$