Chapitre 6

Développements limités

6.1 Etude des développements limités

6.1.1 Définition de développement limité au voisinage de 0

Soit f une fonction définie au voisinage de zéro, sauf peut-être en zéro. On dit que cette fonction admet un développement limité d'ordre $n \in \mathbb{N}$ au voisinage de zéro, s'il existe un intervalle ouvert I de centre 0, tel que, pour tout $x \in I$, x éventuellement non nul,

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x) \quad \textbf{où} \quad \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$$

- **La partie $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ est appelée partie régulière, ou partie principale**
- **$x^n \varepsilon(x)$ est la partie complémentaire**

Remarque 1 :

1. Si f admet, au voisinage de 0, un développement limité à l'ordre $n \geqslant 1$, $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x)$, alors $\lim_{x \to 0} f(x) = a_0$
2. Si f admet, au voisinage de 0, un développement limité à l'ordre $n \geqslant 1$ et si, maintenant, nous supposons f définie et continue en 0, alors $f(0) = a_0$ et nous avons :

$$\frac{f(x) - a_0}{x} = a_1 + a_2 x + \cdots + a_n x^{n-1} + x^{n-1} \varepsilon(x)$$

Alors $\lim_{x \to 0} \dfrac{f(x) - a_0}{x} = a_1$.
En d'autres termes, si une fonction f est continue en 0 et admet un développement limité d'ordre $n \geqslant 1$ au voisinage de 0, alors, f est dérivable en 0 et admet pour dérivée $f'(0) = a_1$

Remarque 2 :

On peut se poser plusieurs questions :

1. Quelles sont les conditions pour que f admette un développement limité au voisinage de 0 ?
2. Si f admet un développement limité au voisinage de 0, ce développement limité est-il unique ?

6.1.2 Théorème d'existence

Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, contenant 0, alors, f, admet, au voisinage de 0, un développement limité d'ordre n :

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} \times f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!} \times f^{(n)}(0) + x^n \varepsilon(x) \quad \textbf{où} \quad \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$$

Démonstration

C'est la formule de Taylor-Young 4.4.5

Remarque 3 :

Si f est de classe $\mathcal{C}^n$, et si $f^{(n+1)}$ existe et est majorée sur un intervalle I contenant 0, la formule de Taylor nous montre que f admet un développement limité sur I :

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} \times f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!} \times f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x)$$

Comme $\left|f^{(n+1)}(\theta x)\right| \leqslant M$, la formule de Taylor nous permet de majorer l'erreur commise en n'utilisant que le polynôme pour approcher f

6.1.3 Théorème

Si f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0, alors, ce développement est unique.

Démonstration

On suppose, comme d'habitude, que f admet deux développements différents, c'est à dire :

$$\begin{aligned} f(x) = & \; a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x) \\ = & \; b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n + x^n \varepsilon'(x) \end{aligned}$$

Pour lequel, il existe au moins un k_0 tel que $a_{k_0} \neq b_{k_0} \iff a_{k_0} - b_{k_0} \neq 0$
Alors, $(a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + \cdots + (a_n - b_n)x^n + x^n(\varepsilon(x) - \varepsilon'(x)) = 0$
Soit k le plus petit entier tel que $(a_k - b_k) \neq 0$; alors, pour $x \neq 0$, on simplifie par x^k, et nous obtenons :

$$(a_k - b_k) + (a_{k+1} - b_{k+1})x + \cdots + (a_n - b_n)x^{n-k} + x^{n-k}(\varepsilon(x) - \varepsilon'(x)) = 0$$

Or,

$$\lim_{x \to 0} \left((a_k - b_k) + (a_{k+1} - b_{k+1})x + \cdots + (a_n - b_n)x^{n-k} + x^{n-k}(\varepsilon(x) - \varepsilon'(x))\right) = a_k - b_k$$

Or, nous devrions avoir $a_k - b_k = 0$; Il y a donc contradiction.
Le développement limité est donc unique

6.1.4 Proposition

Soit f une fonction qui admet un développement limité à l'ordre n en 0. Alors,
- **Si f est paire, tous les termes d'ordre impairs sont nuls**
- **Si f est impaire, tous les termes d'ordre pairs sont nuls**

Démonstration

On suppose que $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x)$

1. **On suppose f paire**

   Alors, pour tout $x \in I$, $f(x) = f(-x)$, et en utilisant le développement de f et en remplaçant x par $-x$, nous avons :

$$\begin{aligned} f(-x) = & \; a_0 + a_1(-x) + a_2(-x)^2 + \cdots + a_n(-x)^n + (-x)^n \varepsilon(-x) \\ = & \; a_0 - a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + (-1)^n a_n x^n + (-1)^n x^n \varepsilon'(x) \end{aligned}$$

   Où nous avons posé $\varepsilon'(x) = \varepsilon(-x)$

D'après l'unicité des développements limités, et comme $f(x) = f(-x)$, nous avons

$$\begin{cases} a_1 & = -a_1 & \Longrightarrow & 2a_1 = 0 & \Longrightarrow & a_1 = 0 \\ a_3 & = -a_3 & \Longrightarrow & 2a_3 = 0 & \Longrightarrow & a_3 = 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{2p+1} & = -a_{2p+1} & \Longrightarrow & 2a_{2p+1} = 0 & \Longrightarrow & a_{2p+1} = 0 \end{cases}$$

Les termes d'ordre impair sont donc nuls.

2. **Si f est impaire,** la méthode est la même pour montrer que $a_{2p} = 0$

Exemple 1 :

1. Le développement limité de $\cos x$ au voisinage de 0

   La fonction $\cos x$ est une fonction paire. Nous allons calculer le développement limité de la fonction $\cos x$ au voisinage de 0 et montrer que les termes de rang impair sont nuls

   Nous allons utiliser la formule de Taylor-Young 4.4.5

   Il suffit donc de connaître la forme des dérivées *n-iemes* de la fonction cosinus *(déjà étudiée dans le chapitre sur les dérivées)*

   Nous avons donc : $f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right)$ et donc, $f^{(n)}(0) = \cos\left(n\dfrac{\pi}{2}\right)$

   C'est à dire : $\begin{cases} f^{(n)}(0) = 0, & \text{si n est impair}; \\ f^{(n)}(0) = (-1)^p, & \text{si n=2p} \end{cases}$

   D'où, au voisinage de zéro, nous obtenons :

   $$\cos x = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^8}{8!} + \cdots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + x^{2p}\varepsilon(x)$$

   Les termes de rang impair sont bien nuls

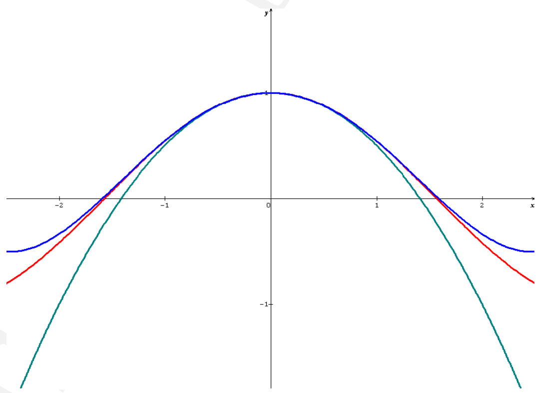

Figure 6.1 – Deux fonctions polynômes approchant $\cos x$ en 0 : $1 - \dfrac{x^2}{2}$ et $1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24}$

2. Le développement limité de $\sin x$ au voisinage de 0

   La fonction $\sin x$ est une fonction impaire. Nous allons calculer le développement limité de la fonction $\sin x$ au voisinage de 0 et montrer que les termes de rang pair sont nuls

   Nous allons utiliser la formule de Taylor-Young 4.4.5

   Il suffit donc de connaître la forme des dérivées *n-iemes* de la fonction sinus *(déjà étudiée dans le chapitre sur les dérivées)*

   Nous avons donc : $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$ et donc, $f^{(n)}(0) = \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$

   C'est à dire : $\begin{cases} f^{(n)}(0) = 0, & \text{si n est pair}; \\ f^{(n)}(0) = (-1)^p, & \text{si n=2p+1} \end{cases}$

D'où, au voisinage de zéro, nous obtenons :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + x^{2p+1}\varepsilon(x)$$

Les termes de rang pair sont bien nuls

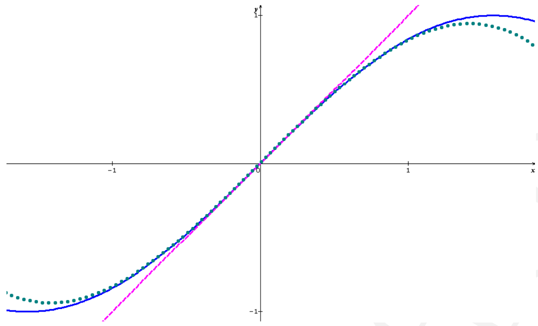

FIGURE 6.2 – Deux fonctions polynômes approchant $\sin x$ en 0 : x et $x - \dfrac{x^3}{6}$

6.1.5 Théorème

Supposons que f admette au voisinage de zéro le développement limité d'ordre n

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x) \ \textbf{où} \ \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$$

Alors, pour tout entier p tel que $p < n$, f admet au voisinage de zéro, le développement limité d'ordre p

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_p x^p + x^p \varepsilon(x) \ \textbf{où} \ \lim_{x\to 0} \varepsilon^{'}(x) = 0$$

Démonstration

On suppose que $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x)$
Soit $p < n$.
Alors, $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_p x^p + x^p \left(a_{p+1}x + a_{p+2}x^2 + \ldots + a_n x^{n-p} + x^{n-p}\varepsilon(x)\right)$,
Et en posant $\varepsilon'(x) = \left(a_{p+1}x + a_{p+2}x^2 + \ldots + a_n x^{n-p} + x^{n-p}\varepsilon(x)\right)$, nous avons bien $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon'(x) = 0$
Ce que nous voulions

Remarque 4 :

Soit k, le plus petit entier tel que $a_k \neq 0$
Alors,

$$f(x) = a_k x^k \left(1 + \frac{a_{k+1}}{a_k}x + \frac{a_{k+2}}{a_k}x^2 + \frac{a_{k+3}}{a_k}x^3 + \cdots + \frac{a_n}{a_k}x^{n-k} + x^{n-k}\varepsilon(x)\right) \ \text{où} \ \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$$

Donc, comme

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{a_k x^k} = \lim_{x\to 0} 1 + \frac{a_{k+1}}{a_k}x + \frac{a_{k+2}}{a_k}x^2 + \frac{a_{k+3}}{a_k}x^3 + \cdots + \frac{a_n}{a_k}x^{n-k} + x^{n-k}\varepsilon(x) = 1$$

Nous avons : $f(x) \underset{x\to 0}{\approxeq} a_k x^k$