## 6.2 Exemples de développements limités

La formule de Taylor fournit des développements limité : pour calculer des développements limités, il suffit d'utiliser la formule de Taylor-Young, et de savoir calculer des dérivées successives.

### 6.2.1 Les polynômes

**Les polynômes sont leurs propres développements limités**

**Remarque 5 :**

C'est donc, pour les polynômes, très simple !!

**Exemple :**

Considérons le polynôme $P(x) = x^7 + x^6 + x^5 + x^3 + x^2 + x + 1$.
Quel est le développement limité de $P$, au voisinage de 0, à l'ordre 3 ?
Nous avons : $P(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^3\varepsilon(x)$ où $\varepsilon(x)$ est une fonction, cette fois ci, bien définie : $\varepsilon(x) = x + x^2 + x^3 + x^4$

### 6.2.2 Développement limité de la fonction sinus

C'est un développement limité important ; il a déjà été travaillé dans le paragraphe précédent.
Nous rappelons ici son expression :

$$\boxed{\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + x^{2p+1}\varepsilon(x)}$$

### 6.2.3 Développement limité de la fonction cosinus

De la même manière, nous avons, toujours d'après le paragraphe précédent :

$$\boxed{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + x^{2p}\varepsilon(x)}$$

### 6.2.4 Développement limité de la fonction exponentielle

Les dérivées successives de la fonction exponentielle sont toutes égales, et de plus, $f^{(n)}(0) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ ; nous avons donc :

$$\boxed{e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x)}$$

### 6.2.5 Développement limité de la fonction exponentielle de base quelconque

C'est à dire que nous devons chercher le développement limité de $a^x$ où $a > 0$.
Vous pouvez démontrer que $f^{(n)}(x) = (\ln a)^n e^{x\ln a}$, et nous avons donc $f^{(n)}(0) = (\ln a)^n$
D'où :

$$\boxed{a^x = 1 + x\ln a + (\ln a)^2 \frac{x^2}{2} + (\ln a)^3 \frac{x^3}{3!} + (\ln a)^4 \frac{x^4}{4!} + \cdots + (\ln a)^n \frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x)}$$

On doit remarquer que si $a = e$, nous retrouvons le développement limité de $e^x$

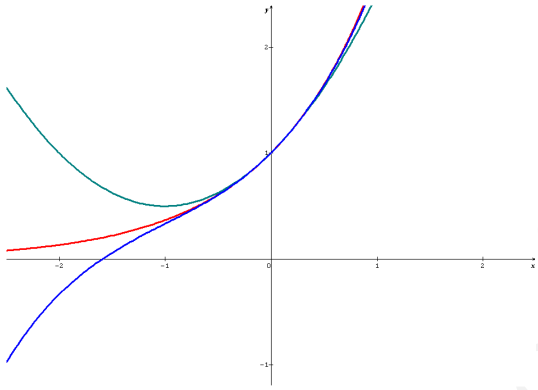

FIGURE 6.3 – Deux fonctions polynômes approchant $e^x$ en 0 : $1+x+\dfrac{x^2}{2}$ et $1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}$

**Exercice 1 :**

Démontrer que la dérivée $n$-ième de $a^x$ est $f^{(n)}(x)=(\ln a)^n e^{x\ln a}$

### 6.2.6 Développement limité de $\dfrac{1}{1-x}$

Il suffit de revenir à la somme des termes d'une suite géométrique

**Rappel** :

$$1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

Ce qui veut dire que :

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\frac{x^{n+1}}{1-x}$$

Autrement dit, $\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+x^n\dfrac{x}{1-x}$

En posant $\varepsilon(x)=\dfrac{x}{1-x}$, nous avons bien $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$.
Nous avons alors le développement limité, à l'ordre $n$, au voisinage de 0 :

$$\boxed{\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+x^n\varepsilon(x)}$$

**Exercice 2 :**

En calculant les dérivées successives de $\dfrac{1}{1-x}$ et en utilisant la formule de Tay-lor-Young, retrouver le développement limité de $\dfrac{1}{1-x}$

### 6.2.7 Développement limité de $(1+x)^m$ en 0 où $m\in\mathbb{R}$ et $x>-1$

Ici, c'est un vrai prpoblème. Il faut donc le prendre comme un problème résolu.

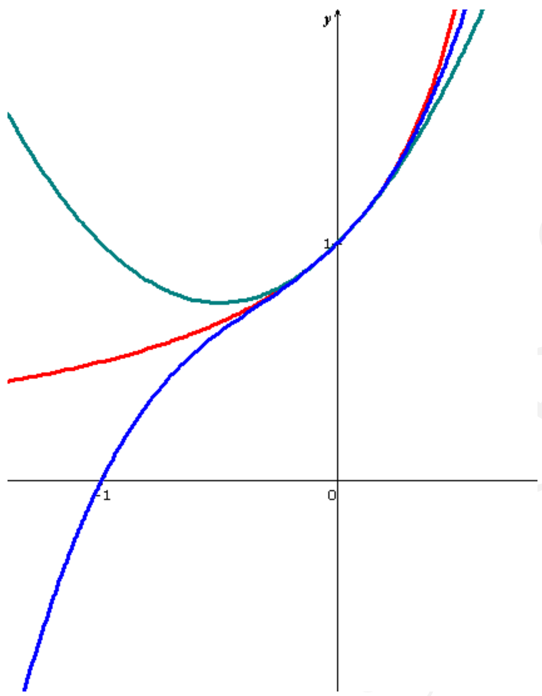


Figure 6.4 – Deux fonctions polynômes approchant $\dfrac{1}{1-x}$ en 0

1. **Calcul des dérivées successives de** $(1+x)^m$ **où** $m \in \mathbb{R}$
   Comme à chaque fois, il faut recalculer les dérivées successives, puis utiliser la formule de Taylor-Young.
   Nous avons :

$$f'(x) = m(1+x)^{m-1}$$
$$f''(x) = m(m-1)(1+x)^{m-2}$$
$$f^{(k)}(x) = m(m-1)\cdots(m-(k-1))(1+x)^{m-k} = \left(\prod_{j=0}^{k-1}(m-j)\right)(1+x)^{m-k}$$

   De telle sorte que

$$f^{(k)}(0) = m(m-1)\cdots(m-(k-1)) = \prod_{j=0}^{k-1}(m-j)$$

2. **Développement limité de** $(1+x)^m$
   En utilisant la formule de Taylor-Young, nous avons le développement limité de $(1+x)^m$ en 0 où $m \in \mathbb{R}$ et $x > -1$ :

$$\boxed{(1+x)^m = 1 + mx + m(m-1)\frac{x^2}{2} + m(m-1)(m-2)\frac{x^3}{3!} + \cdots + m(m-1)\cdots(m-(n-1))\frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x)}$$

### 6.2.8 Développement limité de $\sqrt{1+x}$

Il suffit de faire, dans le développement limité précédent 6.2.7 $m = \dfrac{1}{2}$ ; nous avons ainsi le développement limité de $\sqrt{1+x}$, à l'ordre 4 ($m = \dfrac{1}{2}$ et $n = 4$) :

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \times \frac{x^2}{2} + \frac{3}{8} \times \frac{x^3}{3!} - \frac{15}{16} \times \frac{x^4}{4!} + x^4 \varepsilon(x)$$

C'est à dire :

$$\boxed{\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + x^4 \varepsilon(x)}$$

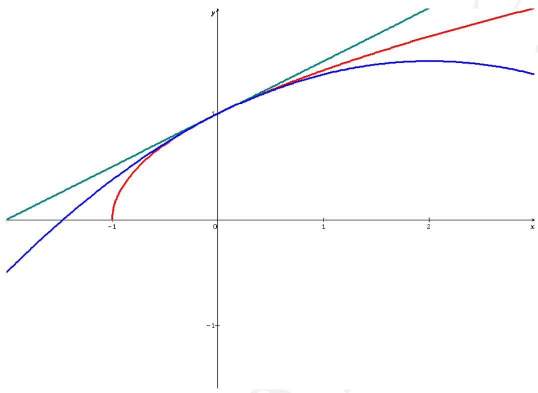

FIGURE 6.5 – Deux fonctions polynômes approchant $\sqrt{1+x}$ : la droite $y = 1 + \dfrac{x}{2}$ et la courbe $y = 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^3}{8}$

### 6.2.9 Développement limité de $\dfrac{1}{1+x}$

On retrouve le même développement limité que ci-dessus, en faisant cette fois-ci, $m = -1$ dans 6.2.7.
Ainsi, à l'ordre 3 :

$$\begin{aligned}(1+x)^{-1} &= 1 - x + (-1)(-1-1)\frac{x^2}{2} + (-1)(-1-1)(-1-2)\frac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon(x) \\ &= 1 - x + x^2 - x^3 + x^3\varepsilon(x)\end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^3\varepsilon(x)}$$

**Remarque 6 :**

Quel lien y-a-t-il entre $(1+x)^m$ où $m \in \mathbb{R}$ et $x > -1$ et $(1+x)^m$ où $m \in \mathbb{N}$ ?

**Si m est entier** on retrouve le binôme de Newton

**Si m n'est pas entier** on note alors

$$\binom{m}{k} = \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-(k-1))}{k!}$$

et lorsque $m \in \mathbb{N}$, on remarque que $\dbinom{m}{k} = \mathrm{C}_m^k$ [1]

1. La notation $\binom{m}{k}$ est la notation américaine, valable même si $m \in \mathbb{R}$, alors que la notation $\mathrm{C}_m^k$ est l'ancienne notation française, uniquement valable si $m \in \mathbb{N}$