6.3 Opérations sur les développements limités

6.3.1 Somme

Soient f et g, deux fonctions qui admettent des développements limités à l'ordre n, au voisinage de 0 :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x)$$

Et

$$g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n + x^n \varepsilon^{'}(x)$$

Alors, la fonction $f+g$ admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0, et

$$(f+g)(x) = (a_0+b_0) + (a_1+b_1)x + (a_2+b_2)x^2 + \cdots + (a_n+b_n)x^n + x^n\varepsilon_1(x)$$

Où nous avons posé $\varepsilon_1(x) = \varepsilon(x) + \varepsilon^{'}(x)$

Exemple 2 :

Donner le développement limité à l'ordre maximum de $f+g$ au voisinage de 0, sachant que :

- $f(x) = 2 + x - x^2 + 2x^3 - 2x^4 + x^5\varepsilon_1(x)$
- $g(x) = 1 - 3x + 5x^2 - 2x^3 + 3x^4 + 7x^5 - 2x^6 + x^6\varepsilon_2(x)$

où $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon_1(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon_2(x) = 0$

Il faut faire remarquer que nous ne pouvons manipuler que des développement limité qui sont **tous du même ordre** ;

- Ici, l'ordre maximum sera l'ordre minimum des développements, soit celui de f, c'est à dire 5
- g admet aussi un développement limité à l'ordre 5 qui est donné par :

$$g(x) = 1 - 3x + 5x^2 - 2x^3 + 3x^4 + 7x^5 + x^5\varepsilon_2(x)$$

Ainsi, $f+g$ admet un développement limité à l'ordre 5 et ce développement limité est donné par :

$$\begin{aligned} f(x)+g(x) &= \left(2 + x - x^2 + 2x^3 - 2x^4 + x^5\varepsilon_1(x)\right) + \left(1 - 3x + 5x^2 - 2x^3 + 3x^4 + 7x^5 + x^5\varepsilon_2(x)\right) \\ &= 3 - 2x + 4x^2 + x^4 + 7x^5 + x^5\varepsilon(x) \end{aligned}$$

Où nous avons posé $\varepsilon(x) = \varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x)$

6.3.2 Produits

Soient f et g, deux fonctions qui admettent des développements limités à l'ordre n, au voisinage de 0 :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + x^n \varepsilon_1(x)$$

Et

$$g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n + x^n \varepsilon_2(x)$$

Alors, la fonction $f\times g$ admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0,

$$(fg)(x) = (c_0) + (c_1)x + (c_2)x^2 + \cdots + (c_n)x^n + x^n\varepsilon(x)$$

où $c_k = \sum\limits_{i+j=k} a_i b_j$

Remarque 7 :

1. Tout se passe comme si le développement limité de $f(x)\,g(x)$ s'obtient en faisant

le produit des parties principales :

$$\left(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n\right)\left(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n\right)$$

En ne retenant que les termes de degré inférieur ou égal à n

2. Il est aussi clair que si f admet pour développement limité

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + x^n\varepsilon(x)$$

Alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, λf admet pour développement limité :

$$(\lambda f)(x) = \lambda a_0 + \lambda a_1x + \lambda a_2x^2 + \cdots + \lambda a_nx^n + x^n\varepsilon(x)$$

Exemple 3 :

Calculez le développement limité de fg sachant que :
- $f(x) = 2 + x - x^2 + 2x^3 - 2x^4 + x^4\varepsilon_1(x)$
- $g(x) = 1 - 3x + 5x^2 - 2x^3 + 3x^4 + x^4\varepsilon_2(x)$

où $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_2(x) = 0$

Ici, c'est assez simple ; sachant que les deux fonctions admettent un développement limité au même ordre 4, la fonction fg admettra, au voisinage de 0, un développement limité d'ordre 4.
- Nous faisons donc le produite des parties principales
- Et nous ne retenons que les termes de degré inférieur ou égal à 4

Nous avons donc, pour le produit des parties principales :

$$\begin{aligned}\left(2 + x - x^2 + 2x^3 - 2x^4\right)\left(1 - 3x + 5x^2 - 2x^3 + 3x^4\right) = \quad & 2 - 6x + 10x^2 - 4x^3 + 6x^4 \\ & +x - 3x^2 + 5x^3 - 2x^4 + 3x^5 \\ & -x^2 + 3x^3 - 5x^4 + 2x^5 - 3x^6 \\ & +2x^3 - 6x^4 - 10x^5 - 4x^6 + 6x^7 \\ & -2x^4 + 6x^5 - 10x^6 + 4x^7 - 6x^8\end{aligned}$$

On ne retient que les termes de degré inférieur ou égal à 4 *(on aurait donc pu se passer de calculs superflus !)* D'où :

$$f(x)\,g(x) = 2 - 5x + 6x^2 + 6x^3 - 9x^4 + x^4\varepsilon(x)$$

6.3.3 Le Quotient

Soient f et g, deux fonctions qui admettent des développements limités à l'ordre n, au voisinage de 0 : $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + x^n\varepsilon(x)$ et $g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n + x^n\varepsilon'(x)$

Alors, pour que la fonction $\dfrac{f}{g}$ admette un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0, il faut que $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = b_0 \neq 0$

On fait alors la division des parties principales $A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ et $B(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n$ suivant les puissances croissantes

Exemple 4 :

Chercons le développement limité, à l'ordre 4, au voisinage de 0 de $\tan x$

Comme $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, nous allons donner les développement limité de $\sin x$ et $\cos x$, à l'ordre 4 :

$$\begin{aligned}\sin x = \quad & x - \frac{x^3}{6} + x^4\varepsilon_1(x) \\ \cos x = \quad & 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^4\varepsilon_2(x)\end{aligned}$$

Puis, nous faisons la division euclidienne des parties principales suivant les puissances croissantes :

$$\begin{array}{r|l} x-\dfrac{x^3}{6} & 1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24} \\ \hline -x+\dfrac{x^3}{2}-\dfrac{x^5}{24} & x+\dfrac{x^3}{3} \\ -\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^5}{24} & \end{array}$$

Et on s'arrête là, puisque nous ne souhaitons avoir qu'un développement limité à l'ordre 4.
D'où le développement limité, à l'ordre 4, au voisinage de 0 de $\tan x$ est donné par :

$$\boxed{\tan x = x + \frac{x^3}{3} + x^4\varepsilon(x)}$$

6.3.4 Fonctions composées

Plutôt que de faire de grandes théories, néanmoins nécessaires, un exemple est intéressant, avant de se lancer dans le grand bain.

Donner le développement de $f(x) = \sqrt{1+\sin x}$ au voisinage de 0, et à l'ordre 4

Nous allons appeler $u(x) = \sin x$ et donc, $f(x) = \sqrt{1+u(x)}$. Il faut remarquer que $\lim\limits_{x\to 0} u(x) = \lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0$

En fait, nous avons $f(x) = (1+u(x))^{\frac{1}{2}}$, et, comme lorsque x est voisin de zéro, $u(x)$ est aussi voisin de zéro, nous avons le développement limité suivant :

$$(1+u(x))^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}u(x) - \frac{1}{8}u(x)^2 + \frac{1}{16}u(x)^3 - \frac{5}{128}u(x)^4 + x^4\varepsilon(x)$$

Or, $\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + x^4\varepsilon_1(x)$

Nous allons donc élever la partie principale de $\sin x$ au carré, puis au cube, et nous retiendrons que les termes de degré inférieur ou égal à 4

$$\begin{aligned} u(x) &= \quad x - \frac{x^3}{6} \\ u(x)^2 &= \left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 = x^2 + \frac{x^6}{36} - \frac{x^4}{3} \\ u(x)^3 &= \left(x - \frac{x^3}{6}\right)^3 = x^3 - \frac{x^9}{216} - \frac{x^5}{2} + \frac{x^7}{12} \end{aligned}$$

On ne retient que les termes de degré inférieur ou égal à 4, et nous avons donc :

$$\sqrt{1+\sin x} = 1 + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6}\right) - \frac{1}{8}\left(x^2 - \frac{x^4}{3}\right) + \frac{1}{16}\left(x^3\right) - \frac{5}{128}x^4 + x^4\varepsilon(x)$$

C'est à dire, en ordonnant les termes

$$\boxed{\sqrt{1+\sin x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{8}x^2 - \frac{x^3}{48} + \frac{x^4}{384} + x^4\varepsilon(x)}$$

Remarque 8 :

Cette proposition nous autorise à faire des changements de variables

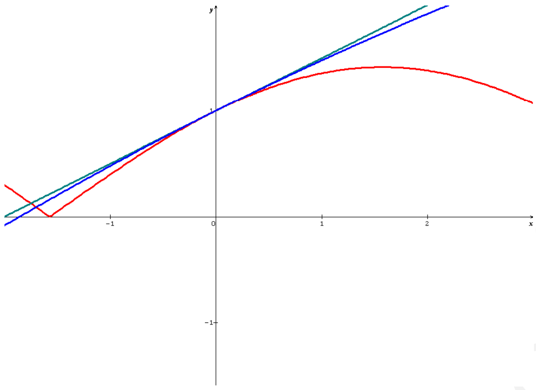

Figure 6.6 – Deux fonctions polynômes approchant $\sqrt{1+\sin x}$: la droite $y = 1 + \frac{x}{2}$ et la courbe $y = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^3}{48}$

Exemple 5 :

1. Quel est le développement limité de e^{-x} ?
   Nous connaissons le développement limité de e^x :
   $$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n \varepsilon(x)$$
   Et donc :
   $$\boxed{e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + x^n \varepsilon_1(x)}$$
   où nous avons posé $\varepsilon_1(x) = (-1)^n \varepsilon(-x)$
2. Quel est le développement limité de $\cosh x$?
   Par définition, $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. En utilisant les résultats sur la somme et le produit, le développement limité de $\cosh x$ est donné par :
   $$\boxed{\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n} \varepsilon(x)}$$
   On peut remarquer que, comme la fonction $\cosh x$ est paire, les termes de rang impair du développement limité sont nuls.
3. Quel est le développement limité de $\sinh x$?
   Par définition, $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. En utilisant les résultats sur la somme et le produit, le développement limité de $\sinh x$ est donné par :
   $$\boxed{\sinh x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+1} \varepsilon(x)}$$
   On peut remarquer que, comme la fonction $\sinh x$ est impaire, les termes de rang pair du développement limité sont nuls.

6.3.5 Dérivation

Soit f, une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ au voisinage de 0.
Si f admet au voisinage de 0 le développement limité d'ordre n :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x)$$

Alors, f' admet en 0 le développement limité d'ordre $n-1$

$$\boxed{f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + n a_{n-1} x^{n-1} + x^{n-1} \varepsilon(x)}$$

Démonstration

Soit f, une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ au voisinage de 0.
Alors, avec la formule de Taylor-Young,

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + x^n \varepsilon(x)$$

f' est de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ et alors :

$$f'(x) = f'(0) + x f''(0) + \frac{x^2}{2!} f^{(3)}(0) + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(0) + x^{n-1} \varepsilon(x)$$

Ainsi, en posant

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x)$$

et

$$f'(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_{n-1} x^{n-1} + x^{n-1} \varepsilon(x)$$

nous avons : $b_k = \dfrac{f^{(k+1)}(0)}{k!} = \dfrac{(k+1) f^{(k+1)}(0)}{(k+1)!} = (k+1) a_{k+1}$

Remarque 9 :

1. Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ au voisinage de 0, alors le développement limité de f' au voisinage de 0 est :

$$f'(x) = f'(0) + x f''(0) + \frac{f^3(0)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{f^{(n+1)}(0)}{n!} x^n + x^n \varepsilon(x)$$

2. Le problème est bien simplifié lors que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$

Exemple 6 :

Donnons le développement limité de $\dfrac{1}{(1-x)^2}$

Il faut remarquer que $\dfrac{1}{(1-x)^2}$ est la fonction dérivée de $\dfrac{1}{(1-x)}$.

Nous connaissons le développement limité de $\dfrac{1}{(1-x)}$:

$$\frac{1}{(1-x)} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + x^n \varepsilon(x)$$

Le développement limité de $\dfrac{1}{(1-x)^2}$ est donc :

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + n x^{n-1} + (n+1) x^n + x^n \varepsilon(x)$$

Exercice 3 :

En utilisant la dérivation, retrouver le développement limité de $\sin x$ à partir de celui de $\cos x$ *(et réciproquement !)*

6.3.6 Intégration-Primitivation

Soit f, une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, voisinage de 0 admettant au voisinage de 0 le développement limité d'ordre n :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x)$$

Alors, toute primitive de f notée F admet un développement limité d'ordre $(n+1)$ au voisinage de 0, et ce développement limité est de la forme :

$$\boxed{F(x) = K + a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + \cdots + \frac{a_n x^{n+1}}{n+1} + x^{n+1}\varepsilon(x)}$$

Avec $K = F(0)$

<u>Démonstration</u>

f étant continue sur I admet sur cet intervalle, une primitive F et cette primmitive est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ F admet donc un développement limité

$$F(x) = F(0) + xF'(0) + \frac{F^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{F^{(n)}(0)}{(n+1)!}x^{n+1} + x^{n+1}\varepsilon(x)$$

Comme dans le théorème précédent, on retrouve que $a_k = \dfrac{F^{(k+1)}(0)}{k!}$, et donc que $\dfrac{a_k}{k+1} = \dfrac{F^{(k+1)}(0)}{(k+1)!}$

Exemple 7 :

Recherchons le développement limité de $\ln(1+x)$ au voisinage de 0 :

Comme tout à l'heure, il faut remarquer que $\ln(1+x)$ est une primitive de $\dfrac{1}{(1+x)}$; or, le développement limité de $\dfrac{1}{(1+x)}$ est donné par :

$$\frac{1}{(1+x)} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + x^n \varepsilon(x)$$

Et donc le développement limité de $\ln(1+x)$ est donné par :

$$\ln(1+x) = K + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + x^n\varepsilon(x)$$

De $K = \ln(1+0) = 0$, le développement limité de $\ln(1+x)$ est donné par :

$$\boxed{\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + x^n\varepsilon(x)}$$