

6.4 Exercices sur les développements limités

Quelques conseils

1. Dans les calculs, les développements limités manipulés doivent être **tous du même ordre**
2. Dans les produits et les compositions de développements limités, on sera donc amené à ne pas tenir compte des termes négligeables devant x^n , n étant l'ordre fixé demandé.
3. Pour un développement limité de $g \circ f$ au voisinage de x_0 , penser que le développement de la fonction g se fera au voisinage de $f(x_0)$
4. N'effectuer un quotient de développements limités que **si le dénominateur a un terme constant non nul** : pour s'y ramener, on mettra éventuellement une puissance de x en facteur
5. Certaines opérations (facteur x^p , dérivation, intégration) **modifient l'ordre du développement limité** : essayer de le prévoir pour bien atteindre l'ordre souhaité.
6. Quand l'ordre du développement limité n'est pas précisé dans la question, il faudra parfois **faire des essais** pour parvenir à des résultats significatifs
7. Le développement limité en 0, à l'ordre n , de f' , permet d'obtenir par intégration terme à terme le développement en 0, à l'ordre $n + 1$, de f , et en établit du même coup l'existence. C'est la méthode utilisée pour $\ln(1+x)$, $\arcsin x$, etc...La dérivation d'un développement limité exige plus de précautions

6.4.1 Exercices d'application directe

Exercice 4 :

Calculez les développements limités suivants :

1. $\sin x + \cosh x$ à l'ordre 3, au voisinage de 0
2. $\sqrt{1+x} + \sqrt[3]{1+x}$ à l'ordre 3, au voisinage de 0
3. $\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$ à l'ordre 3, au voisinage de 0
4. $(1+x)^2 + \sinh x$ à l'ordre 3, au voisinage de 0

Exercice 5 :

Calculez les développements limités suivants :

1. $f(x)g(x)$, à l'ordre maximum possible, au voisinage de 0, sachant que :
 - $f(x) = 2 + x - x^2 + 2x^3 - 2x^4 - x^6 + x^7\varepsilon_1(x)$
 - $g(x) = -3x + 5x^2 + 3x^4 + x^4\varepsilon_2(x)$
 où $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_1(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_2(x) = 0$
2. $x^2 \cos x$ à l'ordre 4, au voisinage de 0
3. $\sin x \sinh x$ à l'ordre 4, au voisinage de 0

Exercice 6 :

Calculez les développements limités suivants :

1. $\frac{f(x)}{g(x)}$, à l'ordre maximum possible, au voisinage de 0, sachant que :
 - $\triangleright f(x) = 2 + x - x^2 + 2x^3 - 2x^4 + x^4\varepsilon_1(x)$ $\triangleright g(x) = 1 - 3x + 5x^2 - 2x^3 + 3x^4 + x^4\varepsilon_2(x)$
 où $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_1(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_2(x) = 0$
2. $\frac{f(x)}{g(x)}$, à l'ordre maximum possible, au voisinage de 0, sachant que :

$$\triangleright f(x) = x - x^2 + 2x^3 - 2x^4 + x^4\varepsilon_1(x)$$

$$\triangleright g(x) = -3x + 5x^2 - 2x^3 + 3x^4 + x^4\varepsilon_2(x)$$

où $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_1(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_2(x) = 0$

3. $\frac{\ln(1+x)}{\cos x}$ à l'ordre 3, au voisinage de 0
4. $\frac{1 - \cos x}{(\sinh x)^2}$ à l'ordre 2, au voisinage de 0
5. $\frac{1}{\cos x}$ à l'ordre 4, au voisinage de 0
6. $\frac{x}{e^x - 1}$ à l'ordre 4, au voisinage de 0
7. $\frac{x}{\sin x}$ à l'ordre 4, au voisinage de 0

Exercice 7 :

1. Donnez le développement limité, au voisinage de 0 de

$$\triangleright \frac{1}{1+x^2}$$

$$\triangleright \frac{1}{1-x^2}$$

$$\triangleright \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

2. Donnez le développement de $f \circ g$ à l'ordre maximum possible, au voisinage de zéro, sachant que

$$\triangleright f(x) = 2 + x - x^2 + 2x^3 - 2x^4 + x^4\varepsilon_1(x) \quad \triangleright g(x) = 2x + 5x^2 - 2x^3 + 3x^4 + x^4\varepsilon_2(x)$$

où $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_1(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_2(x) = 0$

3. Donnez le développement limité, à l'ordre 4, au voisinage de zéro de $e^{\sin x}$

Exercice 8 :

Est-il exact qu'au voisinage de 0, nous ayons l'égalité : $\frac{1}{1-x-x^2} = 1 + x + x^2 + x^2\varepsilon(x)$?

Exercice 9 :

Rechercher les développements limités des fonctions suivantes, au voisinage de 0 :

1. $\ln(1-x)$

3. $\arcsin x$

2. $\arctan x$

4. $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$