6.5 Généralisation des développements limités

Tout l'exposé précédent a mis en place les développements limités ***au voisinage de 0.*** *En mathématiques, il n'est pas question de privilégier un point.*
Nous allons donc étudier les développements limités en un point x_0, et en ∞.
L'étude en ∞ s'appelle les développements asymptotiques.

6.5.1 Développement limité au voisinage de x_0

On dit que f admet, au voisinage de x_0, un développement limité, si la fonction $F(X) = f(x_0 + X)$ admet, au voisinage de 0, un développement limité.

Remarque 10 :

Tout se passe comme si nous faisions le changement de variable $x = x_0 + X$; ainsi, si

$$F(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 + \cdots + a_nX^n + X^n\varepsilon(x)$$

Nous avons alors

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n\varepsilon(x)$$

avec $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$

Exemple 8 :

1. **Méthode de changement de variable**
   Cherchons le dévelopement limité de e^x, à l'ordre n, au voisinage de 1
   On fait donc le changement de variables $X = x - 1 \Leftrightarrow x = X + 1$, ce qui veut dire que si x est voisin de 1, alors X est voisin de zéro. Nous connaissons le développement limité de e^X au voisinage de 0 et $e^x = e^{X+1} = e \times e^X$. Or,
   $$e^X = 1 + X + \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3!} + \frac{X^4}{4!} + \cdots + \frac{X^n}{n!} + X^n\varepsilon(X)$$
   donc
   $$e^x = 1 + (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3!} + \frac{(x-1)^4}{4!} + \cdots + \frac{(x-1)^n}{n!} + (x-1)^n\varepsilon((x-1))$$
   C'est donc le développement limité de e^x, à l'ordre n, au voisinage de 1
2. **Utilisation de la formule de Taylor Young**
   Donnons le développement limité de $\cos x$ à l'ordre 3 et au voisinage de $\frac{\pi}{4}$
   On utilise donc la formule de Taylor-Young ; il faut calculer les dérivée successives de $\cos x$ en $\frac{\pi}{4}$; elles sont connues : $\cos^{(n)}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2}\right)$ D'où,
   $$\begin{cases} \cos^{(0)}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos^{(1)}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos^{(2)}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} + 2\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos^{(3)}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} + 3\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$
   Nous avons donc, le développement limité de $\cos x$ à l'ordre 3 et au voisinage de $\frac{\pi}{4}$
   $$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3}{3!} + \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3\varepsilon(x)$$

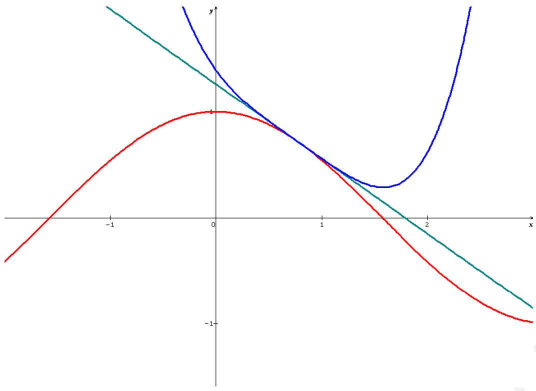

FIGURE 6.7 – Approximation de $\cos x$ au voisinage de $\dfrac{\pi}{4}$

Exercice 10 :

Utiliser la formule de Taylor-Young pour calculer le développement limité de e^x, à l'ordre n, au voisinage de 1

6.5.2 Développements asymptotiques au voisinage de l'infini

Soit f une fonction définie au voisinage de l'infini ; on dit que f admet, au voisinage de ∞, un développement asymptotique, si la fonction $F(X) = f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ admet, au voisinage de 0, un développement limité.

Remarque 11 :

Tout se passe comme si nous faisions le changement de variable $X = \dfrac{1}{x}$
Ainsi, si, au voisinage de 0,

$$F(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3 + \cdots + a_n X^n + X^n \varepsilon(x)$$

Nous avons alors

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_3}{x^3} + \cdots + \frac{a_n}{x^n} + \frac{1}{x^n}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$$

avec $\lim\limits_{x\to\infty} \varepsilon\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$

Exemple 9 :

Donnons un développement asymptotique, à l'ordre 4, au voisinage de $+\infty$ de $\dfrac{x^2-1}{x^2+2x}$

Nous avons :

$$\frac{x^2-1}{x^2+2x} = \frac{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{2}{x}\right)} = \frac{1-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{2}{x}}$$

En utilisant la définition, nous faisons le changement de variables $X = \dfrac{1}{x}$, et nous obtenons alors :

$$\frac{x^2-1}{x^2+2x} = \frac{1-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{2}{x}} = \frac{1-X^2}{1+2X}$$

Nous faisons alors un développement limité de $\dfrac{1}{1+2X}$, à l'ordre 4, en zéro, et nous obtenons :

$$\frac{1}{1+2X} = 1 - 2X + 4X^2 - 8X^3 + 16X^4 + X^4\varepsilon(X)$$

Donc, pour otenir le développement limité de $\dfrac{1-X^2}{1+2X}$, on multiplie la partie principale du développement limité de $\dfrac{1}{1+2X}$ par $1 - X^2$ en ne retenant que les termes de degré inférieur ou égal à 4. On obtient ainsi :

$$\frac{1-X^2}{1+2X} = 1 - 2X + 3X^2 - 6X^3 + 12X^4 + X^4\varepsilon(X)$$

et donc,

$$\frac{x^2-1}{x^2+2x} = 1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{6}{x^2} + \frac{12}{x^4} + \frac{1}{x^4}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$$

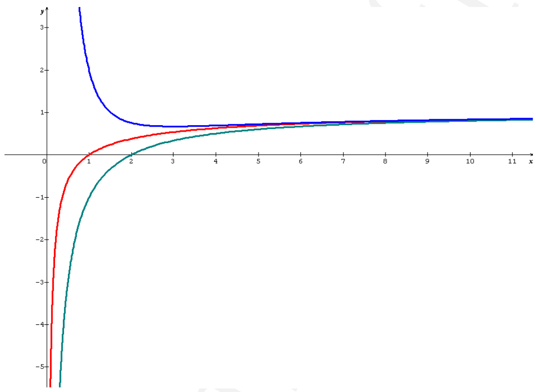

FIGURE 6.8 – Comportement asymptotique de $\dfrac{x^2-1}{x^2+2x}$ en $+\infty$

Remarque 12 :

Pour otenir le développement limité de $\dfrac{1-X^2}{1+2X}$ au voisinage de 0, il était aussi tout à fait possible d'utiliser la division euclidienne des polynômes suivant les puissances croissantes.

6.5.3 Développement asymptotique au voisinage de 0

Soit f une fonction définie au voisinage de 0, n'admettant pas forcément de développement limité en 0
On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que la fonction $\varphi(x) = x^k f(x)$ admette un développerment limité d'ordre n au voisinage de 0

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + +a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x)$$

et donc

$$f(x) = \frac{a_0}{x^k} + \frac{a_1}{x^{k-1}} + \frac{a_2}{x^{k-2}} + \frac{a_3}{x^{k-3}} + \cdots + \frac{a_n}{x^{n-k}} + \frac{1}{x^{n-k}}\varepsilon(x)$$

est le développement asymptotique de f au voisinage de 0

Exemple 10 :

Recherche du développement asymptotique, au voisinage de 0 de $\dfrac{1}{x-x^2}$

Or, il est évident que $\dfrac{1}{x-x^2} = \dfrac{1}{x} \times \dfrac{1}{1-x}$

Or, le développement limité, à l'ordre 4, en 0 de $\dfrac{1}{1-x}$ est donné par :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^4 \varepsilon(x)$$

et donc,

$$\frac{1}{x-x^2} = \frac{1}{x} + 1 + x + x^2 + x^3 + x^3 \varepsilon(x)$$

6.5.4 Exercices

Exercice 11 :

Calculez les développements limités suivants :

1. $\sinh x$, à l'ordre 3, au voisinage de 1
2. $\ln x$ à l'ordre 3, au voisinage de 2

Exercice 12 :

Donner le développement asymptotique, à l'ordre 3, au voisinage de $+\infty$ de :

1. La fonction $e^{\frac{1}{x}}$
2. Puis de la fonction $\sqrt{1 + \dfrac{1}{x^2}}$
3. Et enfin, du produit des 2 fonctions : la fonction $e^{\frac{1}{x}} \sqrt{1 + \dfrac{1}{x^2}}$

Exercice 13 :

Donnez le développement asymptotique, au voisinage de 0 et à l'ordre 4 de $\dfrac{1}{\sin x}$