6.6 Application des développements limités

6.6.1 Application à la recherche des limites

Ici aussi, nous allons donner des exemples :

Exemple 11 :

Rechercher $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x(1+\cos x) - 2\tan x}{2x - \sin x - \tan x}$

On fait un développement limité à l'ordre 3 des différentes fonctions.

$$\begin{cases} \cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + x^3\varepsilon_1(x) \\ \tan x = x + \dfrac{x^3}{3} + x^3\varepsilon_2(x) \\ \sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + x^3\varepsilon_3(x) \end{cases}$$

Donc, si $f(x) = \dfrac{x(1+\cos x) - 2\tan x}{2x - \sin x - \tan x}$, au voisinage de 0, nous avons

$$f(x) = \frac{x\left(2 - \dfrac{x^2}{2} + x^3\varepsilon_1(x)\right) - 2\left(x + \dfrac{x^3}{3} + x^3\varepsilon_2(x)\right)}{2x - \left(x - \dfrac{x^3}{6} + x^3\varepsilon_3(x)\right) - \left(x + \dfrac{x^3}{3} + x^3\varepsilon_2(x)\right)}$$

d'où

$$f(x) = \frac{-\dfrac{x^3}{2} - \dfrac{2}{3}x^3 + x^3\varepsilon(x)}{\dfrac{x^3}{6} - \dfrac{x^3}{3} + x^3\varepsilon'(x)} = \frac{-\dfrac{7}{6}x^3 + x^3\varepsilon(x)}{-\dfrac{x^3}{6} + x^3\varepsilon'(x)} = \frac{\dfrac{7}{6} + \varepsilon(x)}{\dfrac{1}{6} + \varepsilon'(x)}$$

Et donc, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 7$

6.6.2 Application à la recherche d'asymptotes

La recherche de développement asymptotique nous permet de connaître le comportement des fonctions en ∞, et donc de trouver les courbes asymptotes *(droites, ou autre chose..)*

Exemple 12 :

Soit $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}$.

On fait un développement asymptotique de f au voisinage de l'infini.

Auparavant, nous avons : $f(x) = |x|\sqrt{\dfrac{x}{x-1}} = |x|\sqrt{\dfrac{1}{1-\frac{1}{x}}}$, et en faisant le changement de variables $X = \dfrac{1}{x}$, il ne nous reste plus qu'à chercher le développement limité, au vooisinage de 0 de $(1-X)^{-\frac{1}{2}}$.

Nous avons :

$$(1-X)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{X}{2} + \frac{3}{8}X^2 + \frac{5}{16}X^3 + X^3\varepsilon(X)$$

et donc, en remplaçant X par $\dfrac{1}{x}$, nous avons :

$$f(x) = |x|\left(1 + \frac{1}{2x} + \frac{3}{8} \times \frac{1}{x^2} + \frac{5}{16} \times \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^3}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

Donc :

- $\triangleright$ Si $x > 0$, alors $f(x) = x + \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{8} \times \dfrac{1}{x} + \dfrac{5}{16} \times \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^2}\varepsilon\left(\dfrac{1}{x}\right)$
- $\triangleright$ Si $x < 0$, alors $f(x) = -x - \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{8} \times \dfrac{1}{x} - \dfrac{5}{16} \times \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^2}\varepsilon\left(\dfrac{1}{x}\right)$

D'où, au voisinage de $+\infty$, f admet pour asymptote la droite $y = x + \dfrac{1}{2}$, et en $-\infty$, la droite $y = -x - \dfrac{1}{2}$

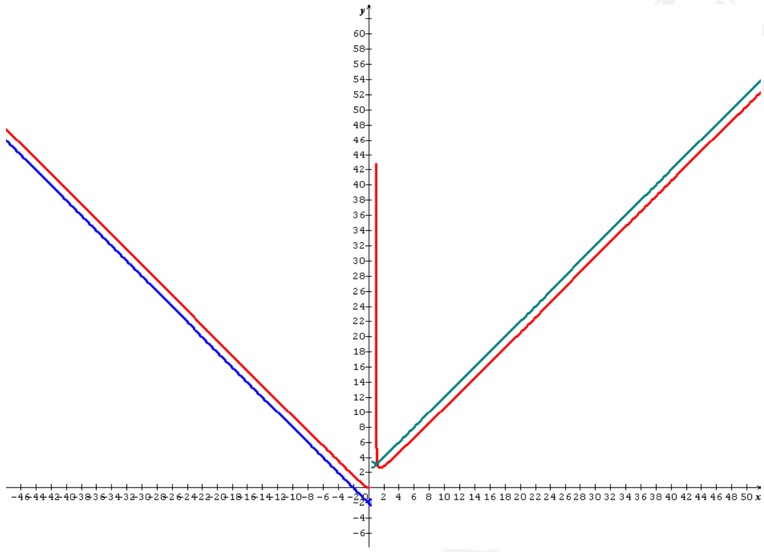

FIGURE 6.9 – Graphe de $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}$ avec ses asymptotes

6.6.3 Exercices

Exercice 14 :

Etudier les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{x(1-\cos x)}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\tan^2 x}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin^2 x}\right)$
4. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)}\right)$
5. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(1-e^x)\sin x}{x^3+2x^2}$
6. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{x}{\ln x}\right)$
7. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - \cos\frac{1}{x}}{1-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}$
8. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x + \cos x - e^x}{\ln(1+x^2)}$

Exercice 15 :

Etudier les asymptotes des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$
2. $f(x) = \dfrac{x^3 e^{-\frac{1}{x}}}{x-1}$
3. $f(x) = \dfrac{x^3+2}{x^2-1}$

Exercice 16 :

Dans cet exercice, on considère $a > 0$ et $b > 0$

1. Donner un développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0 de a^x
2. En déduire le développement limité , à l'ordre 2, au voisinage de 0 de $f(x) = \left(\dfrac{a^x + b^x}{2}\right)$
3. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^{*+}$ par $u_n = \left(\dfrac{a^{\frac{1}{n}} + b^{\frac{1}{n}}}{2}\right)^n$. Donner $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

Exercice 17 :

1. On considère la fonction suivante : $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}$
   (a) Ecrire le développement limité de f, à l'ordre 3, au voisinage de 0
   (b) A la lecture du développement limité, donner l'équation de la tangente au graphe de f en 0
2. Ecrire le développement asymptotique de f, à l'ordre 3, au voisinage de l'infini.

Exercice 18 :

Toutes les questions de ce problème sont indépendantes les unes des autres.

1. Ecrire le développement limité de $\ln x$ à l'ordre 4 au voisinage de 5
2. Ecrire le développement limité de $e^{\sqrt[3]{1+x}}$ à l'ordre 4 au voisinage de 0
3. Quel est le développement limité de $\arcsin x$, au voisinage de 0, à l'ordre 7
4. Donner un développement asymptotique de $\dfrac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$ en $+\infty$ à l'ordre 3; en déduire une droite asymptote, en $+\infty$ de $f(x) = \dfrac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$

Dans les 2 exercices qui suivent, à chaque question correspond des affirmations numérotées.
Il faut donc donner les affirmations correctes

Exercice 19 :

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - \ln(\cosh x)$.
On se propose de déterminer quelques propriétés de f.

Question 1

1. La fonction cosh est paire
2. Un développement limité de la fonction cosh à l'ordre 4, au voisinage de 0 est :
$$\cosh x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^4 \varepsilon(x)$$
avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$
3. Un développement limité de la fonction $\ln(1 + h)$ à l'ordre 2, au voisinage de 0 est :
$$\ln(1 + h) = 1 - h + \frac{h^2}{2} + h^2 \varepsilon(h)$$
avec $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$
4. Un développement limité de la fonction f à l'ordre 4, au voisinage de 0 est :
$$f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} + x^4 \varepsilon(x)$$
avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$

5. La courbe représentative admet la première bissectrice comme tangente à l'origine

Question 2

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est :$f^{'}(x) = 1 - \tanh x$
2. La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
3. La fonction f peut s'écrire $f(x) = \ln 2 + \ln\left(1 + e^{-2x}\right)$
4. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ln 2$
5. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

Exercice 20 :

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left(\dfrac{a^x + b^x + c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$ avec a, b et c trois paramètres réels strictement positifs

Question 1

1. La fonction f n'est pas définie pour x strictement négatif
2. Le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0 de e^x est

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon(x)$$

   avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$
3. Le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0 de a^x est

$$a^x = 1 + ax + \frac{a^2 x^2}{2} + x^2 \varepsilon(x)$$

   avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$
4. Le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0 de $\left(\dfrac{a^x + b^x + c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$ est

$$\left(\frac{a^x + b^x + c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}} = 1 + x \ln\left(\sqrt[3]{abc}\right) + \frac{x^2\left(\ln^2 a + \ln^2 b + \ln^2 c\right)}{3} + x^2 \varepsilon(x)$$

   avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$
5. $\ln(1 + x) = x + \dfrac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon(x)$

Question 2

1. $f(x) = \dfrac{e^{\frac{\ln\left(a^x + b^x + c^x\right)}{x}}}{3}$
2. Le développement limité à l'ordre 1, au voisinage de 0 de $\ln\left(\dfrac{a^x + b^x + c^x}{3}\right)$ est :

$$\ln\left(\frac{a^x + b^x + c^x}{3}\right) = x \ln\left(\sqrt[3]{abc}\right) + x\varepsilon(x)$$

   avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$
3. $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \dfrac{a + b + c}{3}$

4. Si $d > 0$ le développement limité à l'ordre 1, au voisinage de 0 de $\ln\left(\dfrac{a^x + b^x + c^x + d^x}{4}\right)$ est

$$\ln\left(\frac{a^x + b^x + c^x + d^x}{4}\right) = x\ln\left(\sqrt[3]{abcd}\right) + x\varepsilon\left(x\right)$$

avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon\left(x\right) = 0$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x + b^x + c^x + d^x}{4}\right)^{\frac{1}{x}} = \sqrt[4]{abcd}$