6.7 Comparaison de fonctions

Soient 2 fonctions $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$, $g : I \longrightarrow \mathbb{C}$ et un point $a \in I$. Nous supposerons ici que f et$g$ sont deux fonctions qui ne s'annulent pas sur un voisinage de a privé de a.
Il s'agit ici de comparer les 2 fonctions au voisinage de a.
Pour cela, formons le rapport $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ et regardons ce qui se passe lorsque $x \longrightarrow a$.
Trois cas intéressants se présentent alors :

1. Cas 1 :
   $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ est borné au voisinage de a. On dira que$f$ est dominé par g ; on écrit $f \in O(g)$
2. Cas 2 :
   $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ tend vers 0 lorsque x tend vers a. On dira que f est négligeable devant g et on écrit $f \in o(g)$
3. Cas 3 :
   $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ tend vers 1 lorsque x tend vers a. On dira que f et g sont équivalentes au voisinage de a,et on écrit $f \simeq g$

6.7.1 Définition de fonction dominée

Soit $g : I \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$ et $a \in I$.
On appelle $O(g)$ l'ensemble des fonctions dominées par g au voisinage de a, c'est à dire :

$$O(g) = \left\{ \begin{array}{c} f : I \longrightarrow \mathbb{C} \textbf{ telles que } \exists K_f > 0 \textbf{ et } V_a \textbf{ voisinage de } a \textbf{ tel que} \\ (\forall x \in I \cap V_a)\,(|f(x)| \leqslant K_f\,|g(x)|) \end{array} \right\}$$

Remarque 13 :

1. Cet intervalle I peut être de toutes les formes : $]a; b[$, $]a; +\infty[$, $]-\infty; b[$
2. Il faut remarquer que l'on considère toujours le voisinage d'un point a qui peut, éventuellement, être infini. Souvent, si on sait où nous nous situons, nous omettons de préciser ce point a

Exemple 13 :

1. Toutes les fonctions bornées sur un intervalle I sont des éléments de $O(1)$, puisque, pour tout $x \in I$, $|f(x)| \leqslant M$
2. Soit f la fonction polynômiale $f(x) = 3x^5 - x^4 + 2x^2$, alors :
   $\longrightarrow$ $f \in O\left(x^5\right)$ au voisinage de ∞ *(que ce soit $+\infty$ ou $-\infty$)*
   $\longrightarrow$ $f \in O\left(x^2\right)$ au voisinage de 0

6.7.2 Proposition

Soit $g : I \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction définie sur un intervalle $I \in \mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$.

1. **Si $f_1 \in O(g)$ et $f_2 \in O(g)$, alors $f_1 + f_2 \in O(g)$**
2. **Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ et tout $f \in O(g)$, alors $\lambda f \in O(g)$**
3. **$O(g)$ est donc un $\mathbb{C}$-espace vectoriel**

Démonstration

1. Montrons que si $f_1 \in O(g)$ et $f_2 \in O(g)$, alors $f_1 + f_2 \in O(g)$
   Soient $f_1 \in O(g)$ et $f_2 \in O(g)$
   Alors, il existe $K_{f_1} > 0$ tel que pour tout $x \in I$, $|f_1(x)| \leqslant K_{f_1} |g(x)|$
   De même, il existe $K_{f_2} > 0$ tel que pour tout $x \in I$, $|f_2(x)| \leqslant K_{f_2} |g(x)|$
   Ainsi, pour tout $x \in I$:
   $$|f_1(x) + f_2(x)| \leqslant |f_1(x)| + |f_2(x)| \leqslant K_{f_1} |g(x)| + K_{f_2} |g(x)| = (K_{f_1} + K_{f_2}) |g(x)|$$
   Ainsi, $f_1 + f_2 \in O(g)$.
   Ce que nous voulions
2. Montrons que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ et tout $f \in O(g)$, alors $\lambda f \in O(g)$
   Démonstration facile.
   Soient $f \in O(g)$
   Alors, il existe $K_f > 0$ tel que pour tout $x \in I$, $|f(x)| \leqslant K_f |g(x)|$ Ainsi :
   $$|(\lambda f)(x)| = |\lambda f(x)| = |\lambda| \times |f(x)| \leqslant |\lambda| K_f |g(x)|$$
   Ainsi $\lambda f \in O(g)$
3. Montrons que $O(g)$ est donc un $\mathbb{C}$-espace vectoriel
   - ▷ Nous venons de montrer que $O(g)$ était stable par combinaison linéaire
   - ▷ Il faut maintenant montrer que $O(g)$ est non vide.
     C'est simple, la fonction nulle, qui à tout $x \in I$ fait correspondre $O(x) = 0$ est bien un élément de $O(g)$

6.7.3 Propriété de transitivité

Soient $g : I \longrightarrow \mathbb{C}$ et $h : I \longrightarrow \mathbb{C}$, deux fonctions définies sur un intervalle $I \in \mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$
Si $f \in O(g)$ et $g \in O(h)$, alors $f \in O(h)$

Démonstration

- ▷ Si $g \in O(h)$, alors, il existe $M_g > 0$ tel que pour tout $x \in I$, $|g(x)| \leqslant M_g |h(x)|$
- ▷ Si $f \in O(g)$, alors, il existe $M_f > 0$ tel que pour tout $x \in I$, $|f(x)| \leqslant M_f |g(x)|$
- ▷ Donc, pour tout $x \in I$:
  $$|f(x)| \leqslant M_f |g(x)| \leqslant M_f M_g |h(x)|$$
  Et donc, $f \in O(h)$

6.7.4 Proposition

Si la fonction g ne s'annule pas sur I, nous avons $f \in O(g) \Longleftrightarrow (\exists K > 0) \left(\left| \dfrac{f(x)}{g(x)} \right| \leqslant K \right)$

Démonstration

Evidente

Remarque 14 :

Ainsi, $f \in O(g)$ si et seulement si le rapport $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ est borné sur I

6.7.5 Définition de fonction négligeable devant une autre

Soit $g : I \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$ et $a \in I$.
On appelle $o(g)$ l'ensemble des fonctions négligeables devant g au voisinage de a, c'est à dire :

$$o(g) = \left\{ \begin{array}{r} f : I \longrightarrow \mathbb{C} \text{ telles que } \exists \varepsilon : I \longrightarrow \mathbb{C} \text{ et } V_a \text{ voisinage de } a \text{ tels que } \lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0 \text{ et } \varepsilon(x) > 0 \\ \text{et } (\forall x \in I \cap V_a) (|f(x)| = \varepsilon(x) |g(x)|) \end{array} \right\}$$

Remarque 15 :

Comme $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage W_a^{ε} de a tel que si $x \in W_a^{\varepsilon}$, alors $|\varepsilon(x)| \leqslant \varepsilon$
Une défnition équivalente de $f \in o(g)$ est donc donnée par :

$$f \in o(g) \Longleftrightarrow (\forall \epsilon > 0) (\exists W_a^{\varepsilon}) ((x \in W_a^{\varepsilon}) \Longrightarrow (|f(x)| \leqslant \varepsilon |g(x)|))$$

Exemple 14 :

Ci après quelques exemples et remarques.

1. On considère la fonction UN définie par :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} UN : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & UN(x) = 1 \end{array} \right.$$

   UN est donc une fonction constante.
   Nous avons, au voisinage de tout $x_0 \in \mathbb{R}$ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0 \Longleftrightarrow f \in o(UN) \Longleftrightarrow f \in o(1)$.
   En effet, puisque nous avons, pour tout $x \in \mathbb{R}$ $|f(x)| = |f(x)| \times UN(x)$, et nous choisissons $\varepsilon(x) = |f(x)|$
   Cette remarque est vraie aussi pour toute fonction K constante non nulle sur $\mathbb{R}$. En en effet ; soit K la fonction définie par :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} K : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & K(x) = k \text{ avec } k \neq 0 \end{array} \right.$$

   Alors, au voisinage de tout $x_0 \in \mathbb{R}$, nous avons l'équivalence :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \Longleftrightarrow f \in o(K)$$

   En effet, puisque nous avons, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| = \dfrac{|f(x)|}{|k|} \times |K(x)|$.
   Nous posons, bien entendu $\varepsilon(x) = \dfrac{|f(x)|}{|k|}$
   Un traitement particulier est donc réservé à la fonction nulle $\mathcal{O}$
2. La fonction nulle $\mathcal{O}$ est, elle, négligeable, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$ devant toute fonction f. Nous avons donc, pour toute fonction f définie au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$, $\mathcal{O} \in o(f)$
3. Pour toute fonction f, nous ne pouvons avoir $f \in\in o(f)$ sauf si la fonction f est la fonction nulle.
   En effet, $f \in o(f) \Longleftrightarrow |f(x)| = \varepsilon(x) |f(x)| \Longleftrightarrow |f(x)| (1 - \varepsilon(x)) = 0$ avec, bien entendu $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$.
   Ce qui sous entend que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| (1 - \varepsilon(x)) = 0$; comme $1 - \varepsilon(x) \neq 0$, nous en déduisons que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| = 0$, c'est à dire que f est la fonction nulle $\mathcal{O}$
4. Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $m > n$. Alors, en $+\infty$, nous avons $x^n \in o(x^m)$.
   En effet, nous avons $x^m = x^n x^{m-n}$, et comme $m - n < 0$, nous avons $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{m-n} = 0$[2].
   Nous posons alors $\varepsilon(x) = x^{m-n}$. D'où le résultat.
5. Dans le même ordre d'idée, si $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$ avec $0 < \alpha < \beta$, nous avons, en $+\infty$, $x^{\alpha} \in o\left(x^{\beta}\right)$.
   La démonstration est la même que ci-dessus

2. Nous avons, ici, enlevé les valeurs absolues, puisque, au voisinage de $+\infty$, les fonctions sont positives

6.7.6 Proposition

Soit $g : I \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$ et $a \in I$. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$ et $a \in I$.
Si $f \in o(g)$, alors $f \in O(g)$

Démonstration

Supposons $f \in o(g)$. Alors, il existe $\varepsilon : I \longrightarrow \mathbb{C}$ et V_a voisinage de a tels que $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$, $\varepsilon(x) > 0$ et $(\forall x \in I \cap V_a)\,(|f(x)| = \varepsilon(x)\,|g(x)|)$
Comme $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$, il existe un voisinage W de a tel que, pour tout $x \in W$, $0 < \varepsilon(x) < 1$. Et donc, pour tout $x \in I \cap V_a \cap W$, nous avons :

$$|f(x)| = \varepsilon(x)\,|g(x)| \Longrightarrow |f(x)| \leqslant |g(x)|$$

Et donc, $f \in O(g)$

6.7.7 Proposition

Soit $g : I \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$ et $a \in I$ et qui ne s'annule pas dans un voisinage de a. Alors, pour toute fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$, nous avons l'équivalence :

$$f \in o(g) \Longleftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Démonstration

La démonstration est simple : il suffit de poser $\varepsilon(x) = \left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right|$

6.7.8 Propriétés

Toutes les fonctions définies ci-après, sont définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$; soit $a \in I$

1. **Si, au voisinage de a, $f \in o(g)$ et $g \in o(h)$, alors $f \in o(h)$ (Propriété de transitivité)**
2. **Si, au voisinage de a, $f \in o(g)$, alors, pour toute fonction $h : I \longrightarrow \mathbb{C}$ bornée, nous avons $fh \in o(g)$.**
   En particulier, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda f \in o(g)$
3. **Si, au voisinage de a, $f \in o(g)$, alors, pour toute fonction $h : I \longrightarrow \mathbb{C}$, nous avons $fh \in o(gh)$.**
   En particulier, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda f \in o(\lambda g)$
4. **Si, au voisinage de a, nous avons $f \in o(g)$ et $f_1 \in o(g_1)$, alors, nous avons $ff_1 \in o(gg_1)$**
5. **Si, au voisinage de a, nous avons $f \in o(g)$ et $f_1 \in o(g)$, alors, nous avons $f + f_1 \in o(g)$**
6. **Si, au voisinage de a, nous avons $f \in o(g)$ et $g \in O(h)$, alors, nous avons $f \in o(h)$**

Démonstration

1. Supposons $f \in o(g)$ et $g \in o(h)$ et démontrons la propriété de transitivité
   $\longrightarrow$ Il existe alors $\varepsilon : I \longrightarrow \mathbb{C}$ et V_a voisinage de a tels que $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$, $\varepsilon(x) > 0$ et $(\forall x \in I \cap V_a)\,(|f(x)| = \varepsilon(x)\,|g(x)|)$
   $\longrightarrow$ De même, Il existe alors $\varepsilon_1 : I \longrightarrow \mathbb{C}$ et V_a^1 voisinage de a tels que $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon_1(x) = 0$, $\varepsilon_1(x) > 0$ et $\left(\forall x \in I \cap V_a^1\right)(|g(x)| = \varepsilon_1(x)\,|h(x)|)$
   $\longrightarrow$ Donc, pour tout $x \in I \cap V_a \cap V_a^1$, nous avons :

$$|f(x)| = \varepsilon(x)\,|g(x)| = \varepsilon(x)\,\varepsilon_1(x)\,|h(x)|$$

En posant $E(x) = \varepsilon(x)\varepsilon_1(x)$, nous avons $E(x) > 0$ et $\lim\limits_{x \to a} E(x) = 0$, c'est à dire $f \in o(h)$

2. Supposons $f \in o(g)$ et soit $h : I \longrightarrow \mathbb{C}$ bornée
$\longrightarrow$ Il existe alors $\varepsilon : I \longrightarrow \mathbb{C}$ et V_a voisinage de a tels que $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$, $\varepsilon(x) > 0$ et $(\forall x \in I \cap V_a)\,(|f(x)| = \varepsilon(x)\,|g(x)|)$
$\longrightarrow$ Alors, pour tout $x \in I \cap V_a$, nous avons $|f(x)\,h(x)| = \varepsilon(x)\,|h(x)|\,|g(x)|$
Posons $E(x) = \varepsilon(x)\,|h(x)|$; nous avons $E(x) > 0$ et comme, il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in I$, $0 \leqslant |h(x)| \leqslant M$, nous avons $0 < E(x) \leqslant M\varepsilon(x)$. Et comme $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$, nous avons $\lim\limits_{x \to a} E(x) = 0$.
D'où $fh \in o(g)$.
Si h est la fonction constante telle que pour tout $x \in I$ $h(x) = \lambda$, nous avons donc, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda f \in o(g)$
3. Supposons $f \in o(g)$ et soit $h : I \longrightarrow \mathbb{C}$
On remarquera que h **n'est pas forcément bornée**
$\longrightarrow$ Il existe alors $\varepsilon : I \longrightarrow \mathbb{C}$ et V_a voisinage de a tels que $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$, $\varepsilon(x) > 0$ et $(\forall x \in I \cap V_a)\,(|f(x)| = \varepsilon(x)\,|g(x)|)$
$\longrightarrow$ Alors, pour tout $x \in I \cap V_a$, nous avons $|f(x)\,h(x)| = \varepsilon(x)\,|h(x)|\,|g(x)|$
La démonstration est donc terminée.
4. Supposons que $f \in o(g)$ et $f_1 \in o(g_1)$
$\longrightarrow$ Il existe alors $\varepsilon : I \longrightarrow \mathbb{C}$ et V_a voisinage de a tels que $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$, $\varepsilon(x) > 0$ et $(\forall x \in I \cap V_a)\,(|f(x)| = \varepsilon(x)\,|g(x)|)$
$\longrightarrow$ De même, il existe $\varepsilon_1 : I \longrightarrow \mathbb{C}$ et V_a^1 voisinage de a tels que $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon_1(x) = 0$, $\varepsilon_1(x) > 0$ et $\left(\forall x \in I \cap V_a^1\right)(|f_1(x)| = \varepsilon_1(x)\,|g_1(x)|)$
Alors, pour tout $x \in I \cap V_a^1 \cap V_a$, nous avons $|f(x)\,f_1(x)| = \varepsilon(x)\,\varepsilon_1(x)\,|g(x)|\,|g_1(x)|$
En posant, comme tout à l'heure, $E(x) = \varepsilon(x)\,\varepsilon_1(x)$, nous avons, une nouvelle fois $\lim\limits_{x \to a} E(x) = 0$ et $E(x) > 0$
D'où $ff_1 \in o(gg_1)$
5. Supposons que $f \in o(g)$ et $f_1 \in o(g)$
$\longrightarrow$ Il existe alors $\varepsilon : I \longrightarrow \mathbb{C}$ et V_a voisinage de a tels que $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$, $\varepsilon(x) > 0$ et $(\forall x \in I \cap V_a)\,(|f(x)| = \varepsilon(x)\,|g(x)|)$
$\longrightarrow$ De même, il existe $\varepsilon_1 : I \longrightarrow \mathbb{C}$ et V_a^1 voisinage de a tels que $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon_1(x) = 0$, $\varepsilon_1(x) > 0$ et $\left(\forall x \in I \cap V_a^1\right)(|f_1(x)| = \varepsilon_1(x)\,|g(x)|)$
Alors, pour tout $x \in I \cap V_a^1 \cap V_a$, nous avons $|f(x) + f_1(x)| = (\varepsilon(x) + \varepsilon_1(x))\,|g(x)|$
En posant, comme tout à l'heure, $E(x) = \varepsilon(x) + \varepsilon_1(x)$, nous avons $\lim\limits_{x \to a} E(x) = 0$ et $E(x) > 0$
D'où $f + f_1 \in o(g)$
6. Supposons que $f \in o(g)$ et $g \in O(h)$
Nous allons utiliser des propriétés déjà démontrées :
$\longrightarrow$ Comme $f \in o(g)$, nous avons $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$
$\longrightarrow$ Comme $g \in O(h)$, il existe W_a voisinage de a et $K > 0$ tels que $(\forall x \in I \cap W_a)\left(\dfrac{|g(x)|}{|h(x)|} \leqslant K\right)$
Ainsi, pour tout $x \in I \cap W_a$,
$$\left|\frac{f(x)}{h(x)}\right| = \left|\frac{f(x)}{g(x)} \times \frac{g(x)}{h(x)}\right| \leqslant K \times \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|$$
Comme $\lim\limits_{x \to a} K \times \left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right| = 0$, nous avons $\lim\limits_{x \to a} \left|\dfrac{f(x)}{h(x)}\right| = 0$, c'est à dire, qu'au voisinage de a, $f \in o(h)$

6.7.9 Proposition

Soient $g : I \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction numérique. Alors, $o(g)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^I$

Démonstration

Il suffit d'utiliser 6.7.8

6.7.10 Exemples importants

Nous allons utiliser les résultats sur les croissances comparées des fonctions logarithmes et exponentielles.

1. **Pour tout $\alpha > 0$ et tout $\beta > 0$, nous avons, en $+\infty$ $(\ln x)^{\beta} \in o(x^{\alpha})$**

   Démonstration

   Il suffit de se reporter à 5.4.7

2. **Pour tout $\alpha > 0$ et tout $\beta > 0$, nous avons, en $+\infty$ $x^{\alpha} \in o\left((e^{x})^{\beta}\right)$**

   Démonstration

   Reportez vous à 5.4.3

3. **Pour tout $\alpha > 0$ et tout $\beta > 0$, nous avons, en $+\infty$ $(\ln x)^{\alpha} \in o\left((e^{x})^{\beta}\right)$**

   Démonstration

   Il suffit d'utiliser la transitivité

Remarque 16 :

A la relecture de la section 5.4 il est très possible de formuler d'autres résultats

6.7.11 Définition de fonctions équivalentes

Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ et $g : I \longrightarrow \mathbb{C}$, 2 fonctions. Soit aussi $x_0 \in I$
f et g sont dites équivalentes en x_0 et on écrit : $f \underset{x_0}{\approx} g$ si et seulement si $f - g \in o(g)$

6.7.12 Proposition

On suppose que $g : I \longrightarrow \mathbb{C}$ ne s'annule pas sur I. Alors, nous avons :

$$f \underset{x_0}{\approx} g \Longleftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Démonstration

Nous ré-écrivons la définition de fonctions équivalentes :

$$f \underset{x_0}{\approx} g \Longleftrightarrow f - g \in o(g) \Longleftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - g(x)}{g(x)} = 0$$

Or, $\dfrac{f(x) - g(x)}{g(x)} = \dfrac{f(x)}{g(x)} - 1$ et donc, de $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - g(x)}{g(x)} = 0$, nous tirons $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

6.7.13 Proposition

Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ et $g : I \longrightarrow \mathbb{C}$, 2 fonctions. Soit aussi $x_0 \in I$

1. **Si $f \underset{x_0}{\approx} g$, alors $f \in O(g)$ et $g \in O(f)$**
2. **Nous avons aussi $f - g \in o(g) \Longleftrightarrow f - g \in o(f)$**

Démonstration

1. Soit $0 < \varepsilon < 1$. Il existe alors un voisinage $W_\varepsilon \subset I$ tel que si $x \in W_\varepsilon$, alors $|f(x) - g(x)| \leqslant \varepsilon |g(x)|$.
   Alors, comme $||f(x)| - |g(x)|| \leqslant |f(x) - g(x)|$, nous avons $||f(x)| - |g(x)|| \leqslant \varepsilon |g(x)|$
   Or :
   $$||f(x)| - |g(x)|| \leqslant \varepsilon |g(x)| \iff -\varepsilon |g(x)| \leqslant |f(x)| - |g(x)| \leqslant \varepsilon |g(x)|$$
   Donc :
   - ⋆ Si $x \in W_\varepsilon$, alors $|f(x)| \leqslant (1+\varepsilon)|g(x)|$ et donc $f \in O(g)$
   - ⋆ De même, si $x \in W_\varepsilon$, alors $|g(x)| \leqslant \dfrac{1}{1-\varepsilon}|f(x)|$ et donc $g \in O(f)$ *(Nous avons choisi $0 < \varepsilon < 1$, et donc $1 - \varepsilon > 0$)*

   Ce que nous voulions
2. C'est assez simple. Supposons que $f - g \in o(g)$, alors $g \in O(f)$; et d'après 6.7.8 $f - g \in o(f)$.
   La réciproque est évidente.

6.7.14 Proposition

La relation $f \approx g$ entre 2 fonctions définies au voisinage d'un point x_0 est une relation d'équivalence

Démonstration

La démonstration ne pose pas de grandes difficultés.

1. **Elle est réflexive**
   Effectivement, puisque $f - f = \mathcal{O} \in o(f)$, c'est à dire $f \approx f$
2. **Elle est symétrique**
   En effet, supposons $f \approx g$; alors $f - g \in o(g)$, et nous venons de montrer que $f - g \in o(g) \iff f - g \in o(f)$ et donc $g \approx f$
3. **Elle est transitive**
   Supposons $f \approx g$ et $g \approx h$
   Alors, $f - g \in o(g)$ et $g - h \in o(h)$.
   D'après 6.7.6, si $g - h \in o(h)$ alors $g - h \in O(h)$, et donc, clairement, $g \in O(h)$.
   Ainsi, si $f - g \in o(g)$ et $g \in O(h)$, alors $f - g \in o(h)$.
   Par addition, nous avons : $(f - g) + (g - h) \in o(h)$, c'est à dire $f - h \in o(h)$ et donc $f \approx h$

Remarque 17 :

Il était tout à fait possible *(et plus facile !)* d'utiliser : $f \underset{x_0}{\approx} g \iff \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$

→ **Pour la réflexivité**, évidemment que nous avons $f \underset{x_0}{\approx} f$ puisque $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{f(x)} = 1$

→ **Pour la symétrie**, si $f \underset{x_0}{\approx} g$, alors $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ et alors $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{g(x)}{f(x)} = 1$, et donc $g \underset{x_0}{\approx} f$

→ **En ce qui concerne la transitivité**

Supposons $f \underset{x_0}{\approx} g$ et $g \underset{x_0}{\approx} h$; alors $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ et $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{g(x)}{h(x)} = 1$

Alors : $\dfrac{f(x)}{h(x)} = \dfrac{f(x)}{g(x)} \times \dfrac{g(x)}{h(x)}$. Et donc, en utilisant le produit des limites, nous avons :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{h(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \times \lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{h(x)} = 1$$

C'est à dire $f \underset{x_0}{\approx} h$

Exemple 15 :

1. En utilisant les limites remarquables, nous avons :
   - ⋆ Nous avons $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$ et donc $\ln(1+x)\underset{0}{\approx}x$
   - ⋆ Nous avons $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ et donc $\sin x\underset{0}{\approx}x$
   - ⋆ Nous avons $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$ et donc $e^x-1\underset{0}{\approx}x$
2. On suppose que f admette, au voisinage de 0 le développement limité
$$f(x)=a_px^p+a_{p+1}x^{p+1}+\cdots+a_nx^n+x^n\varepsilon(x)$$
Avec $p\geqslant 0$,$n\geqslant p$, $a_p\neq 0$ et $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$. Alors
$$f(x)\underset{0}{\approx}a_px^p+a_{p+1}x^{p+1}+\cdots+a_nx^n$$
En effet :
$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{a_px^p+a_{p+1}x^{p+1}+\cdots+a_nx^n} &= \frac{a_px^p+a_{p+1}x^{p+1}+\cdots+a_nx^n+x^n\varepsilon(x)}{a_px^p+a_{p+1}x^{p+1}+\cdots+a_nx^n}\\ &= \frac{a_px^p\left(1+\frac{a_{p+1}}{a_p}x+\cdots+\frac{a_n}{a_p}x^{n-p}+x^{n-p}\varepsilon_1(x)\right)}{a_px^p\left(1+\frac{a_{p+1}}{a_p}x+\cdots+\frac{a_n}{a_p}x^{n-p}\right)} \text{ avec } \varepsilon_1(x)=\frac{\varepsilon(x)}{a_p}\\ &= \frac{1+\frac{a_{p+1}}{a_p}x+\cdots+\frac{a_n}{a_p}x^{n-p}+x^{n-p}\varepsilon_1(x)}{1+\frac{a_{p+1}}{a_p}x+\cdots+\frac{a_n}{a_p}x^{n-p}}\end{aligned}$$
Et nous avons $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\frac{a_{p+1}}{a_p}x+\cdots+\frac{a_n}{a_p}x^{n-p}+x^{n-p}\varepsilon_1(x)}{1+\frac{a_{p+1}}{a_p}x+\cdots+\frac{a_n}{a_p}x^{n-p}}=1$
C'est à dire $f(x)\underset{0}{\approx}a_px^p+a_{p+1}x^{p+1}+\cdots+a_nx^n$
3. **Pour les polynômes**, nous avons, en $+\infty$ $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0\underset{+\infty}{\approx}a_nx^n$ et, en 0, $Q(x)=b_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_px^p\underset{0}{\approx}b_px^p$

6.7.15 Multiplication et quotients d'équivalents

Si, au voisinage d'un point x_0, nous avons $f\underset{x_0}{\approx}g$ et $f_1\underset{x_0}{\approx}g_1$, alors, nous avons :
$$f\times f_1\underset{x_0}{\approx}g\times g_1 \text{ et } \frac{f}{f_1}\underset{x_0}{\approx}\frac{g}{g_1}$$

Démonstration

Très simple : il suffit d'utiliser le fait que $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f}{g}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f_1}{g_1}=1$

Remarque 18 :

Nous n'avons pas du tout le même résultat avec l'addition

En clair
Si $f\underset{x_0}{\approx}g$ et $f_1\underset{x_0}{\approx}g_1$, alors, nous n'avons pas $f+f_1\underset{x_0}{\approx}g+g_1$.
Par exemple : $x-\cos x\underset{0}{\approx}1$ et $\cos x\underset{0}{\approx}1+x^2$, mais nous n'avons pas $x-\cos x+\cos x\underset{0}{\approx}2+x^2$

Exercice 21 :

1. Vérifier que nous avons $e^x \underset{0}{\approx} e^{x^2}$, mais que nous n'avons pas $\ln e^x \underset{0}{\approx} \ln e^{x^2}$
2. De même, vérifier que $x \underset{+\infty}{\approx} x + \pi$, mais que nous n'avons pas $\sin x \underset{+\infty}{\approx} \sin(x+\pi)$

Conclusion : pas plus que pour l'addition $f \underset{x_0}{\approx} f_1$, alors, nous n'avons pas $g \circ f \underset{x_0}{\approx} g \circ f_1$

6.7.16 Proposition

Si $f \underset{x_0}{\approx} g$ **et si** $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = L$**, alors** $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$

Démonstration

Il suffit d'écrire $f(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} \times g(x)$ et de conclure.

Remarque 19 :

Des 2 théorèmes précédents, il résulte que si nous devons rechercher la limite d'un produit ou d'un quotient de fonctions, on peut remplacer chacune des fonctions par une fonction équivalente.

Exemple 16 :

Rechercher $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(e^x - 1)\tan^2 x}{x(1-\cos x)}$

→ Nous avons $e^x - 1 \underset{0}{\approx} x$ et $\tan x \underset{0}{\approx} x$

→ De même $1 - \cos x \underset{0}{\approx} \dfrac{x^2}{2}$

Donc $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(e^x - 1)\tan^2 x}{x(1-\cos x)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \times x^2}{x \times \frac{x^2}{2}} = 2$

Bien entendu, un développement limité *(à l'ordre 2)* aurait donné le même résultat.