6.8 Croissance comparée des suites

Les suites sont des cas particuliers de fonctions numériques, et nous étudions le comportement des suites en $+\infty$. Ce paragraphe est donc l'aplication ou l'adaptation de la section précédente.

6.8.1 Définition

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 2 suites numériques.

1. **On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dominée par la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et on écrit $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec\prec (v_n)_{n\in\mathbb{N}}}$ s'il existe $A>0$ tel que $(\forall n\in\mathbb{N})\,(|u_n| \leqslant A\,|v_n|)$**
2. **La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est négligeable devant la suite $(v_n)_{n\in N}$, et on écrit $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} << (v_n)_{n\in\mathbb{N}}}$ s'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite zéro, telle que $u_n = \varepsilon_n v_n$ à partir d'un certain rang**

Remarque 20 :

1. Si pour tout $n\in\mathbb{N}$ nous avons $v_n \neq 0$, nous avons alors les équivalences suivantes :

$$\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec\prec (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \Longleftrightarrow \left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ bornée}}$$

$$\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} << (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0}$$

2. En utilisant la définition de la limite, nous avons l'équivalence :

$$\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} << (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \Longleftrightarrow (\forall\varepsilon>0)\,(\exists N_\varepsilon\in\mathbb{N} \text{ tel que } n\geqslant N_\varepsilon \Rightarrow |u_n| \leqslant \varepsilon\,|v_n|)}$$

3. C'est bien une adaptation aux suites des définitions données pour les fonctions.

6.8.2 Notations de Landau

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique

1. **On appelle $O(v_n)$ l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dominées par $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, c'est à dire :**

$$\boxed{O(v_n) = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \textbf{ tel que } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec\prec (v_n)_{n\in\mathbb{N}}\right\}}$$

2. **On appelle $o(v_n)$ l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ négligeables devant $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ c'est à dire :**

$$\boxed{o(v_n) = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \textbf{ tel que } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} << (v_n)_{n\in\mathbb{N}}\right\}}$$

Exemple 17 :

Quelques exemples simples :

1. Soient $\alpha<\beta$ 2 réels alors $\dfrac{n^\alpha}{n^\beta} = n^{\alpha-\beta}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\alpha-\beta} = 0$ et donc, $n^\alpha \in o\left(n^\beta\right)$ i.e. n^α est négligeable devant n^β lorsque n devient très grand *(au voisinage de $+\infty$)*
   (a) On a donc la suite $(\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$ négligeable devant la suite $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ *(on a : $\alpha = \dfrac{1}{2}$ et $\beta = 1$)*
   (b) De même, la suite $\left(\dfrac{1}{n^3}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est négligeable devant la suite $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *(on a : $(\alpha=-3)$ et* $(\beta=-1)$)

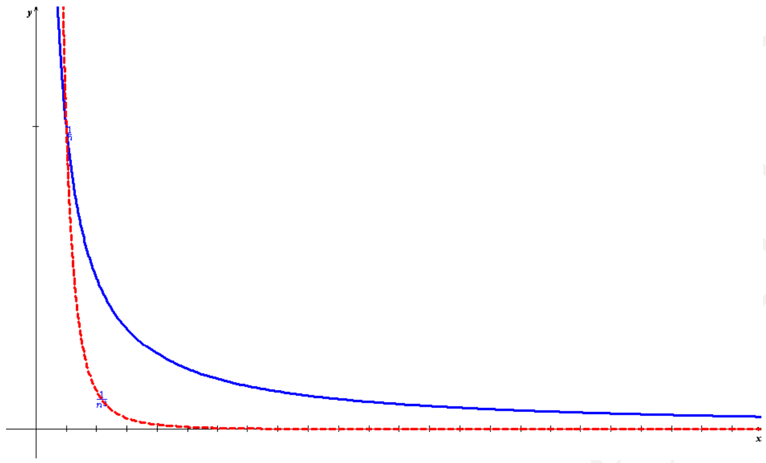

FIGURE 6.10 – Schéma montrant les deux suites $\frac{1}{n^3}$ et $\frac{1}{n}$

(c) En particulier, si P est un polynôme de degré d, à coefficients dans $\mathbb{R}$, alors,

$$(\forall \alpha \in \mathbb{R})\ \left(\alpha > d \Rightarrow (P(n))_{n\in\mathbb{N}} \in o(n^{\alpha})\right)$$

(d) Ceci veut donc dire que, par exemple, que la suite $\left(5n^{12} + 25456n^8 + \frac{\sqrt{5}}{23}n^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est négligeable devant $\left(n^{\frac{157}{12}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

2. Soient α et β 2 réels tels que $0 < \alpha < \beta$; alors, $0 < \frac{\alpha}{\beta} < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n = 0$ et $\alpha^n \in o(\beta^n)$

   <u>par exemple</u> : 2^n est négligeable devant 3^n et $\frac{1}{3^n}$ est négligeable devant $\frac{1}{2^n}$

Exercice 22 :

1. Pour $\beta \in \mathbb{R}$, démontrer que n^{β} est négligeable devant e^n

   Correction

   Il faut donc démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^{\beta}}{e^n} = 0$

   Pour commencer, nous allons présenter autrement l'expression $\frac{n^{\beta}}{e^n}$.

   $$\frac{n^{\beta}}{e^n} = \frac{e^{\beta\ln n}}{e^n} = e^{\beta\ln n - n} = e^{n\left(\beta\frac{\ln n}{n} - 1\right)}$$

   Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln n}{n} = 0$, donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(\beta\frac{\ln n}{n} - 1\right) = -\infty$, et en utilisant les limites par composition, $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{n\left(\beta\frac{\ln n}{n}-1\right)} = 0$, c'est à dire $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^{\beta}}{e^n} = 0$

2. De même, pour $\beta \in \mathbb{R}$, démontrer que n^{β} est négligeable devant a^n où $a > 1$

Correction

La démonstration est la même, sauf que a remplace e !!

$$\frac{n^\beta}{a^n} = \frac{e^{\beta \ln n}}{e^{n \ln a}} = e^{\beta \ln n - n \ln a} = e^{n\left(\beta \frac{\ln n}{n} - \ln a\right)}$$

Et on termine comme ci-dessus, car, comme $a > 1$, $\ln a > 0$

3. Pour $\beta > 0$ et $\alpha > 0$, démontrer que $(\ln n)^\alpha$ est négligeable devant n^β

Correction

Cette fois ci, la question est plus délicate. Il faut toujours démontrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{(\ln n)^\alpha}{n^\beta} = 0$

L'idée principale de la démonstration est d'utiliser la limite connue : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

L'objet est donc de s'y ramener. Nous avons donc :

$$\frac{(\ln n)^\alpha}{n^\beta} = \frac{(\ln n)^\alpha}{\left(n^{\frac{\beta}{\alpha}}\right)^\alpha} = \frac{\left(\frac{\alpha}{\beta} \ln n^{\frac{\beta}{\alpha}}\right)^\alpha}{\left(n^{\frac{\beta}{\alpha}}\right)^\alpha} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\alpha \left(\frac{\ln n^{\frac{\beta}{\alpha}}}{n^{\frac{\beta}{\alpha}}}\right)^\alpha$$

En posant $N = n^{\frac{\beta}{\alpha}}$, nous avons $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{\ln n^{\frac{\beta}{\alpha}}}{n^{\frac{\beta}{\alpha}}}\right)^\alpha == \lim\limits_{N \to +\infty} \left(\frac{\ln N}{N}\right)^\alpha = 0$

Nous en concluons donc que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{(\ln n)^\alpha}{n^\beta} = 0$, c'est à dire que si $\beta > 0$ et $\alpha > 0$, $(\ln n)^\alpha$ est négligeable devant n^β

6.8.3 Proposition

1. **Si** $\left(u_n^1\right)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{O}(v_n)$ **et si** $\left(u_n^2\right)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{O}(v_n)$ **alors,** $(\forall \lambda \in \mathbb{R})(\forall \mu \in \mathbb{R})\left(\lambda u_n^1 + \mu u_n^2 \in \mathcal{O}(v_n)\right)$
   On dit alors que $\mathcal{O}(v_n)$ **est stable par combinaison linéaire**
   $\mathcal{O}(v_n)$ **est un sous-espace vectoriel de l'espace des suites** $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
2. **De même, si** $\left(u_n^1\right)_{n \in \mathbb{N}} \in o(v_n)$ **et si** $\left(u_n^2\right)_{n \in \mathbb{N}} \in o(v_n)$ **alors,** $(\forall \lambda \in \mathbb{R})(\forall \mu \in \mathbb{R})\left(\lambda u_n^1 + \mu u_n^2 \in o(v_n)\right)$
   On dit alors que $o(v_n)$ **est stable par combinaison linéaire**
   $o(v_n)$ **est un sous-espace vectoriel de l'espace des suites** $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

Remarque 21 :

Une remarque sur la stabilité de l'addition et de la multiplication par un scalaire ; c'est un résultat que l'on retrouve pour un polynôme. Les ensembles $\mathcal{O}(v_n)$ et $o(v_n)$ sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. *(Voir le cours d'Algèbre)*

6.8.4 Equivalence de suites

Voici un énoncé important ; nous retrouverons la notion d'équivalence tout au long des cours d'analyse.
Deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **et** $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **sont dites équivalentes, et on écrit :**

$$\boxed{u_n \underset{n \to +\infty}{\approx} v_n}$$

Si et seulement si $u_n - v_n \in o(v_n)$

mathinfovannes.free.fr ©

Remarque 22 :

1. La condition $u_n - v_n \in o(v_n)$, en fait un peu compliquée, est équivalente à la condition *(donnée par la définition)* :
   Il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ et une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers zéro, telle que si $n > N_0$, alors $u_n - v_n = \varepsilon_n v_n$, ou ce qui est équivalent, $u_n = (1+\varepsilon_n)\, v_n$
2. Si la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang, la propriété $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\approx} v_n}$ **est équivalente à** $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1}$. C'est ce qui est précisé dans le théorème suivant

6.8.5 Théorème

$E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est l'ensemble des suites numériques réelles.

1. **Dans $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, la relation $u_n \approx v_n$ est une relation d'équivalence**
2. **Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \neq 0$, alors,**

$$\boxed{u_n \approx v_n \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1}$$

Démonstration

1. Montrons que c'est une relation d'équivalence

   Réflexivité Evidemment, on a $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \approx (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$; il suffit de prendre pour $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite nulle.

   Symétrie Supposons $u_n \approx v_n$; il faut donc montrer que $v_n \approx u_n$

   A partir d'un certain rang N_0 , nous avons $u_n = (1+\varepsilon_n)\, v_n$, et donc $v_n = \left(\dfrac{1}{1+\varepsilon_n}\right) u_n$, ou encore, $v_n = \left(1 - \dfrac{\varepsilon_n}{1+\varepsilon_n}\right) u_n$; si nous posons $\varepsilon'_n = \dfrac{-\varepsilon_n}{1+\varepsilon_n}$, nous avons : $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon'_n = 0$,et donc $v_n \approx u_n$

   Transitivité Supposons $u_n \approx v_n$ et $v_n \approx w_n$; il faut donc démontrer que $u_n \approx w_n$

   Il existe donc un entier N_0 tel que si $n \geqslant N_0$, alors, $u_n = (1+\varepsilon_n)\, v_n$

   De même, il existe N_1 tel que, si $n \geqslant N_1$, alors, $v_n = (1+\varepsilon'_n)\, w_n$

   Donc, pour $n \geqslant \max(N_0, N_1)$, nous avons $u_n = (1+\varepsilon_n)\, v_n$ et $v_n = (1+\varepsilon'_n)\, w_n$, et, dès ce moment, $u_n v_n = (1+\varepsilon_n)(1+\varepsilon'_n)\, u_n$. En posant $\varepsilon''_n = \varepsilon_n(1+\varepsilon'_n) + \varepsilon'_n$, on a bien $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon''_n = 0$

   On a donc $u_n \approx w_n$
2. La démonstration du second point est très facile. Nous allons, comme pour toutes les équivalences, la démontrer en deux temps.

   (a) Supposons $u_n \underset{n\to+\infty}{\approx} v_n$

   Traduisons maintenant ce que ceci veut dire *(retour à la définition)* : à partir d'un certain rang $N_0 \in \mathbb{N}$, nous avons $u_n = (1+\varepsilon_n)\, v_n$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$ donc, si $n > N_0$, $\dfrac{u_n}{v_n} = 1 + \varepsilon_n$, et de $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$, nous concluons que $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$

   (b) Supposons $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$

   Ceci veut donc dire, que nous avons $\dfrac{u_n}{v_n} = 1 + \beta_n$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \beta_n = 0$; en fait, donc, nous pouvons conclure que $u_n = v_n(1+\beta_n)$; ici, nous avons donc $\beta_n = \varepsilon_n$

mathinfovannes.free.fr ©

Remarque 23 :

Remarques très importantes

1. Si $u_n \underset{+\infty}{\approx} v_n$, alors, pour tout $A > 0$, il existe N_A, entier positif tel que $n > N_A \Rightarrow |u_n| \leqslant A\,|v_n|$
   De même, pour tout $B > 0$, il existe N_B tel que $n > N_B \Rightarrow |v_n| \leqslant B\,|u_n|$
   Ces inégalités montrent la relation "forte" qu'est l'équivalence des suites.
   Les démonstrations reposent sur le fait que les suites $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendent vers zéro
   De plus, avec ces inégalités, on voit que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'annule à partir d'un certain rang, il en est de même de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et réciproquement !
2. Si $u_n \underset{+\infty}{\approx} v_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$, alors, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$, même si $\lim\limits_{n\to+\infty} = \infty$. On en conclue donc que, **dans une recherche d'existence ou de valeur de la limite, on peut remplacer une suite, par une autre suite équivalente**

Exemple 18 :

1. Soit P un polynôme, $P(X) = a_k X^k + a_{k-1}X^{k-1} + \ldots + a_0$, alors, $P(n) \approx a_k n^k$
   exemple : $125n^{258} + n^7\sqrt{\pi} \approx 125n^{258}$
   On retrouve, ici, l'expresssion vue en Lycée :
   $\boxed{\textbf{en } +\infty\textbf{, un polynôme tend comme son terme de plus haut degré.}}$
2. Autre exemple classique : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{\dfrac{1}{n}} = 1$, donc, $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\approx} \dfrac{1}{n}$
3. De même, en utilisant les limites classiques : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$, nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\dfrac{1}{n}} = 1$; donc,
   $\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right) \underset{+\infty}{\approx} \dfrac{1}{n}$
4. Dans les chapitres ultérieurs *(développements limités)*, nous aurons d'autres outils pour trouver des équivalents.

6.8.6 Proposition : Règles de calcul sur les suites équivalentes

1. **Si $u_n^1 \underset{+\infty}{\approx} u_n^2$ et si $v_n^1 \underset{+\infty}{\approx} v_n^2$, alors $u_n^1 v_n^1 \underset{+\infty}{\approx} u_n^2 v_n^2$**
2. **Si $u_n \underset{+\infty}{\approx} v_n$ et si u_n et v_n ne s'annulent pas, alors $\dfrac{1}{u_n} \underset{+\infty}{\approx} \dfrac{1}{v_n}$**
3. **Conséquence : Si $u_n^1 \underset{+\infty}{\approx} u_n^2$ et si $v_n^1 \approx v_n^2$, et si u_n^2 et v_n^2 ne s'annulent pas, alors $\dfrac{u_n^1}{u_n^2} \underset{+\infty}{\approx} \dfrac{v_n^1}{v_n^2}$**

Démonstration

1. *Démonstration du premier point*
   Supposons $u_n^1 \underset{+\infty}{\approx} u_n^2$ et $v_n^1 \underset{+\infty}{\approx} v_n^2$, alors, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n^1}{u_n^2} = 1$, et, de même, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{v_n^1}{v_n^2} = 1$, ce qui montre que, en utilisant le produit des limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n^1 v_n^1}{u_n^2 v_n^2} = 1$, c'est à dire $u_n^1 v_n^1 \underset{+\infty}{\approx} u_n^2 v_n^2$
2. *Démonstration du second point*
   Il existe donc un entier N_0 tel que si $n \geqslant N_0$, alors, $u_n = (1+\varepsilon_n)\,v_n$, donc, si $n \geqslant N_0$
   $\dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1}{(1+\varepsilon_n)\,v_n} = \dfrac{1}{(1+\varepsilon_n)} \times \dfrac{1}{v_n}$;

Or, $\dfrac{1}{(1+\varepsilon_n)} = 1 - \frac{\varepsilon_n}{(1+\varepsilon_n)}$; en posant $E_n = -\dfrac{\varepsilon_n}{(1+\varepsilon_n)}$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} E_n = 0$ et $\dfrac{1}{u_n} = (1+E_n)\dfrac{1}{v_n}$ donc $\dfrac{1}{u_n} \approx \dfrac{1}{v_n}$

3. *Démonstration du troisième point*
   Le troisième point est une synthèse des 2 points précédents.

Exemple 19 :

L'exemple type est la question posée par le rapport de deux polynômes.
Si $u_n = \dfrac{P(n)}{Q(n)} = \dfrac{a_k n^k + \ldots + a_0}{b_j n^j + \ldots + b_0}$, comme nous avons $P(n) \underset{+\infty}{\approx} a_k n^k$ et $Q(n) \underset{+\infty}{\approx} b_j n^j$, nous avons $u_n \underset{+\infty}{\approx} \dfrac{a_k n^k}{b_j n^j}$, c'est à dire : $u_n \underset{+\infty}{\approx} \dfrac{a_k}{b_j} n^{k-j}$

Exercice 23 :

1. En utilisant les équivalents, calculer les limites suivantes :
   (a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2+2n\sin n+1}{2n^2+3n+1}$
   Nous avons $n^2+2n\sin n+1 \underset{+\infty}{\approx} n^2$ et $2n^2+3n+1 \underset{+\infty}{\approx} 2n^2$. nous en déduisons :
   $$\frac{n^2+2n\sin n+1}{2n^2+3n+1} \underset{+\infty}{\approx} \frac{n^2}{2n^2}$$
   Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2+2n\sin n+1}{2n^2+3n+1} = \dfrac{1}{2}$
   (b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2^n+n^2+3}{2^n+3^n+1}$
   La démonstration est la même :
   Nous avons $2^n+n^2+3 \underset{+\infty}{\approx} 2^n$ et $2^n+3^n+1 \underset{+\infty}{\approx} 3^n$. nous en déduisons :
   $$\frac{2^n+n^2+3}{2^n+3^n+1} \underset{+\infty}{\approx} \frac{2^n}{3^n}$$
   Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2^n+n^2+3}{2^n+3^n+1} = 0$
2. Montrer que si $\alpha \in \mathbb{R}$ et que si $u_n \underset{+\infty}{\approx} v_n$, alors $(u_n)^\alpha \underset{+\infty}{\approx} (v_n)^\alpha$

   Rien de plus simple. Par hypothèse, nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$, donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)^\alpha = 1$, c'est à dire $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n^\alpha}{v_n^\alpha} = 1$
3. On appelle $u_n^1 = n^3+4n^2$, $u_n^2 = n^3+1$, $v_n^1 = -n^3 + \dfrac{1}{n}$, $v_n^2 = -n^3+2n$. Montrer que l'on a $u_n^1 \underset{+\infty}{\approx} u_n^2$, $v_n^1 \underset{+\infty}{\approx} v_n^2$, mais pas $u_n^1 + v_n^1 \underset{+\infty}{\approx} u_n^2 + v_n^2$

   Il suffit de remarquer que $u_n^1 + v_n^1 = 4n^2 + \dfrac{1}{n}$ et que $u_n^2+v_n^2 = 2n+1$

   Avons nous $e^{n^3+4n^2} \underset{+\infty}{\approx} e^{n^3+1}$?

   Il suffit de faire le rapport $\frac{e^{n^3+4n^2}}{e^{n^3+1}} = e^{4n^2-1}$ qui ne tend pas vers 1 lorsque n tend vers l'infini !

Remarque 24 :

On ne fait pas ce qu'on veut avec les équivalents *(par exemple additionner, prendre l'exponentielle ou le logarithme)* il faut, le plus souvent, revenir à la définition.